

# MathByNight 2019

## Matematica alla prova



RESEARCH IN ACTION - RIA

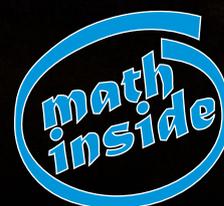
RESEARCHINACTION.IT



MathByNight ha l'obiettivo di stimolare nei giovani la passione per la matematica applicata attraverso una sfida in cui le squadre partecipanti si confrontano alla ricerca della soluzione di un problema, tutto nel corso di una nottata. Il problema è proposto da alcuni ricercatori del CNR che svolgono la loro professione a Roma, gli stessi che da anni ormai ci aiutano nello sviluppo di questo progetto.

MathByNight è una competizione che in realtà vuole essere un'occasione di incontro e confronto tra matematici in erba e ricercatori del CNR.

15 MathByNight - 02.20  
Revisione 0 del 01.03.20



# RiA - Research in Action

La parola ría in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne dà l'Oxford Living Dictionaries):

A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - [www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php](http://www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php))

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - [www.liceograssilatina.org](http://www.liceograssilatina.org) - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

## Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

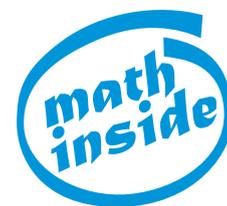
Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi del pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

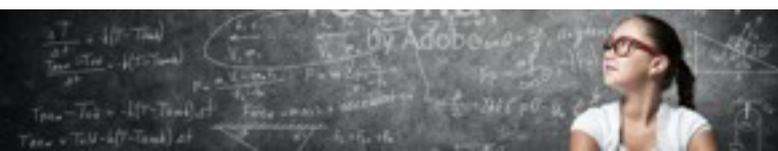
Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia (*hi-tech*), come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.



» <https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/>  
» <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/>



# Sommario dei contenuti

MATHBYNIGHT 2019 - Matematica alla prova.

## Sommario dei contenuti

### 1. Introduzione 5

### 2. Oblatezza di stelle di neutroni 6

2.1. SOLUZIONE 1: UN SOLO PARAMETRO 6

2.2. SOLUZIONE 2: DUE PARAMETRI 8

2.3. SOLUZIONE 3: LA MATEMATICA REGNA! 9

### 3. Luce e fotoni 11

3.1. SOLUZIONI 13

### 4. Analisi di incertezza 16

4.1. IL PROBLEMA 17

4.2. SOLUZIONI 20

4.3. UNA PRECISAZIONE 23



## Materiale disponibile per questo laboratorio:

- » il fascicolo con la prima parte del laboratorio (in formato PDF di circa 9MB): <http://researchinaction.it/materials/15-MathByNight-2019.pdf>.
- » documenti xMaxima e file GeoGebra con calcoli, soluzioni e grafici: <http://researchinaction.it/materials/15-MathByNight19-materiale.zip>.

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: <http://researchinaction.it/download/>.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA>.



Il contest di matematica applicata MathByNight è stato organizzato dal liceo scientifico G.B. Grassi di Latina e si è disputato nella suggestiva cornice del Museo Civico Duilio Cambellotti a Latina grazie alla disponibilità dell'amministrazione comunale.



# MathByNight 2019

Matematica alla prova

## 1. Introduzione

*MathByNight* ha l'obiettivo di stimolare nei giovani la passione per la matematica e per la matematica applicata in particolare, tramite una sfida in cui le squadre partecipanti si confrontano alla ricerca della soluzione di un problema. tutto nel corso di una nottata. Il problema è proposto da alcuni ricercatori del CNR che svolgono la loro professione a Roma, gli stessi che da anni ormai ci aiutano nello sviluppo di questo progetto.

Ai partecipanti si propone un problema tratto da un reale esperimento e loro, attraverso l'analisi dei dati disponibili, devono predisporre una risoluzione del problema proposto

*MathByNight* è una competizione, uno scontro, che in realtà vuole essere un'occasione di incontro e confronto tra matematici in erba e ricercatori del CNR, ma anche un modo per sottolineare la bellezza della matematica e il fascino del problema.

La competizione è pensata per squadre di 3-5 studentesse e studenti delle scuole secondarie di secondo grado. Ovviamente per partecipare a *MathByNight* c'è bisogno di competenze di matematica e fisica ma anche della capacità di ricercare informazioni, chiarimenti, procedure, ... *online* e, inoltre, è utile l'abilità di spiegare con chiarezza le proprie idee per realizzare un *report*, una relazione, quanto più precisa, chiara e esplicita possibile.

In questo fascicolo raccogliamo i tre problemi che sono stati proposti nell'edizione 2019 del contest *MathByNight*.



## 2. Oblatezza di stelle di neutroni

Questo laboratorio presenta uno dei problemi proposti nel corso di MathByNight 2019 ed è stato sviluppato in collaborazione con Donato Bini (CNR-IAC), il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Isc G.B. Grassi di Latina).

Una stella di neutroni rapidamente rotante non possiede in genere una configurazione sferica perché la rotazione crea una deformazione nella distribuzione delle masse (il termine oblatò, dal latino *oblatus*, indica proprio una deformazione, qui dovuta alla rotazione, di un corpo che nel nostro caso da sferico si trasforma in un ellissoide di rotazione a causa dello schiacciamento ai poli provocato dalla rapida rotazione). A sua volta poi l'oblatezza crea una distorsione del campo gravitazionale al di fuori della stella, che è misurata dal suo *momento di quadrupolo*.

È naturale che ci sia una relazione tra momento di quadrupolo (deformazione, di seguito indicata con  $q$  riferendosi alla quantità adimensionale associata) e momento angolare (rotazione, di seguito indicata con  $X$  riferendosi alla quantità adimensionale associata) della stella:  $q = q(X)$ .

A seconda della massa  $M$  della stella ( $M = 1.0M_{\odot}$ ,  $M = 1.2M_{\odot}$ ,  $M = 1.4M_{\odot}$ , fornite in funzione della massa solare  $M_{\odot}$ ) i dati osservativi sono riassunti nelle seguenti tabelle:

M = 1.0M <sub>⊙</sub>		M = 1.2M <sub>⊙</sub>		M = 1.4M <sub>⊙</sub>	
X	q	X	q	X	q
0.173	-0.158	0.203	-0.124	0.337	-0.173
0.232	-0.275	0.283	-0.241	0.354	-0.196
0.279	-0.391	0.345	-0.363	0.372	-0.223
0.320	-0.515	0.398	-0.491	0.393	-0.256
0.358	-0.642	0.445	-0.625	0.416	-0.295
0.393	-0.774	0.488	-0.765	0.440	-0.341
0.425	-0.909	0.528	-0.910	0.466	-0.394
0.460	-1.067	0.563	-1.054	0.493	-0.456
0.495	-1.239	0.596	-1.206	0.521	-0.526
0.531	-1.434			0.549	-0.605
0.566	-1.635			0.578	-0.696
0.599	-1.844			0.606	-0.795

Sapendo che  $X$  è compreso nell'intervallo  $[0,1)$ , si chiede di determinare:

- » Una relazione di *fit* tra  $q$  e  $X$  nei tre casi di masse considerati, tenendo presente che i *fit* migliori devono coinvolgere un minor numero di parametri e corrispondere ad una accuratezza maggiore.
- » Una relazione universale tra  $q$  e  $X$  che possa andare *ragionevolmente* bene per ogni valore della massa, motivando la scelta *ragionevole* effettuata.



I dati sono tratti da W. G. Laarakkers and E. Poisson, *Quadrupole Moments of Rotating Neutron Stars* The Astrophysical Journal, Volume 512, Issue 1, pp. 282-287, (1999) DOI: 10.1086/306732 (<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9709033>).



Il Toolbox:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf>  
suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

### 2.1. SOLUZIONE 1: UN SOLO PARAMETRO

Proponiamo per prima (ne vedremo altre due) la soluzione proposta dall'autore del problema. La prima richiesta è di determinare una funzione approssimante per ciascuna delle tre serie di dati, funzione che fornisca una buona precisione ma che sia anche semplice.

#### APPROSSIMAZIONE DELLE SERIE SPERIMENTALI

Come sempre, il primo passo è quello di rappresentare i dati su un piano cartesiano per avere un'idea del loro andamento. Scegliamo di rappresentare sull'asse delle ascisse il momento angolare



lare  $X$  e sull'asse delle ordinate il momento di quadrupolo: in rosso la prima tabella, relativa ai valori corrispondenti a una massa pari a quella solare ( $M_{10\text{Dati}}$ ), in verde le misure con massa pari a 1.2 masse solari ( $M_{12\text{Dati}}$ ) e in blu quelle riferite a una massa pari a 1.4 masse solari ( $M_{14\text{Dati}}$ ). Nota bene: in figura sono tracciate anche le curve approssimanti che troveremo nel seguito.

Si può pensare di approssimare ciascuna serie con un polinomio di secondo grado (una parabola) passante per l'origine, in questo modo ciascun polinomio avrebbe un solo parametro, con un'equazione del tipo  $q = a X^2$ . Per determinare l'unico parametro è sufficiente imporre che il polinomio *passi* per un solo punto sperimentale.

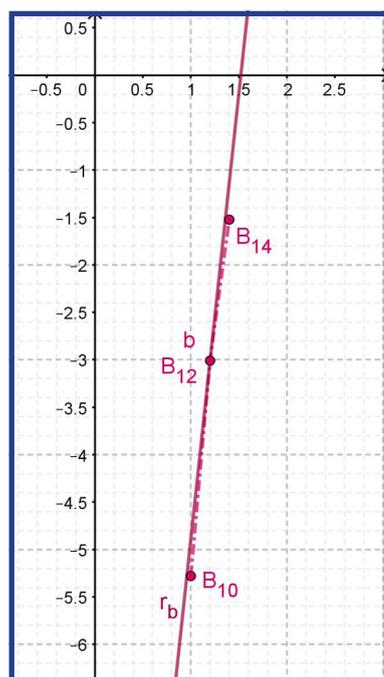
Con queste ipotesi abbiamo ottenuto (l'indice 10 è riferito, qui e nel seguito, alle misure riferite a una massa pari a 1.0 masse solari, l'indice 12 a una massa di 1.2 masse solari e, infine, l'indice 14 a una massa di 1.4 masse solari):

- »  $q_{10}(X) = -5.279 X^2$  per la prima serie, imponendo il passaggio per il primo punto;
- »  $q_{12}(X) = -3.009 X^2$  per la seconda serie, imponendo ancora il passaggio per il primo punto;
- »  $q_{14}(X) = -1.875 X^2$  per l'ultima serie, questa volta scegliendo l'ottavo punto.

Per avere un'idea della precisione, per ciascuna funzione abbiamo calcolato la somma degli scarti quadratici come misura dell'errore, ottenendo  $e_{10} = 0.020$ ,  $e_{12} = 0.037$ ,  $e_{14} = 0.025$  nei tre casi rispettivamente, chiaramente non risultati eccezionali ma, come detto, abbiamo privilegiato la semplicità.

#### RELAZIONE TRA MOMENTO DI QUADRUPOLO, MOMENTO ANGOLARE E MASSA DELLA STELLA

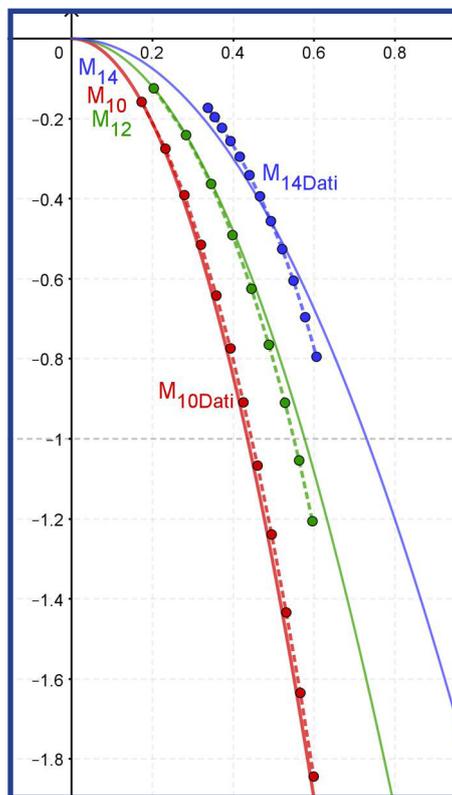
A questo punto dobbiamo determinare ... *una relazione universale tra  $q$  e  $X$*  ... che tenga conto anche del valore della massa. In altre parole, una funzione  $q = q(X, m)$ , dove con  $m$  intendiamo la massa della stella espressa in termini di massa solare:  $m = M/M_{\odot}$ .



L'idea, abbastanza semplice, è quella di pensare a una funzione simile, come struttura, ai polinomi che abbiamo appena usato ma in modo che il parametro tenga conto della massa della stella. Qualcosa del tipo  $q(X, m) = a(m) X^2$ . In pratica, non dobbiamo far altro che determinare una funzione  $a(m)$  che approssimi l'andamento dei tre parametri in funzione della massa della stella.

Se rappresentiamo, in un piano cartesiano, sulle ascisse la massa e sulle ordinate i valori del parametro  $a$  nei tre casi, ci accorgiamo che i tre punti corrispondenti sono praticamente allineati e quindi possiamo pensare a una funzione lineare che approssimi il valore del parametro in funzione della massa della stella. Con qualche calcolo otteniamo  $a(m) = 8.507 m - 13.218$ .

A questo punto possiamo scrivere l'espressione che descrive la relazione tra massa della stella, momento angolare e momento di quadrupolo:  $q(X, m) = (8.507 m - 13.218) X^2$ .



Il Toolbox:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf>  
 suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore, vedi il calcolo dell'errore a pagina 5.



Il Toolbox:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf>  
 suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati lineari, vedi 2. Approssimazione di dati lineari a pagina 7.

Calcolando la media degli scarti quadratici per tutto l'insieme dei dati (le tre serie fornite all'inizio) otteniamo un errore  $e = 0.012$ , non proprio un risultato eccellente ma, come abbiamo già detto, abbiamo privilegiato la semplicità.

## 2.2. SOLUZIONE 2: DUE PARAMETRI

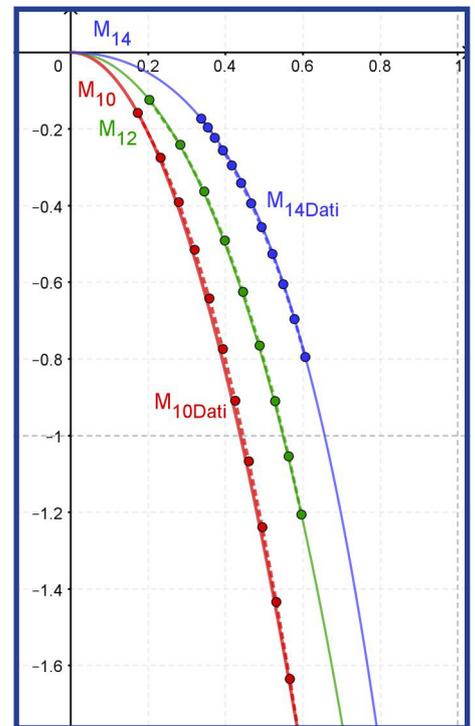
Con qualche lieve complicazione in più, si può ottenere un risultato il cui errore è di un ordine di grandezza migliore: è sufficiente approssimare le tre serie di dati con polinomi di quarto grado. Anche questa soluzione è stata sviluppata dal proponente.

L'idea è quella di *lavorare* su polinomi di quarto grado contenenti le sole potenze pari dell'incognita e per questo dipendenti da due soli parametri:  $q(m) = a X^2 + b X^4$ .

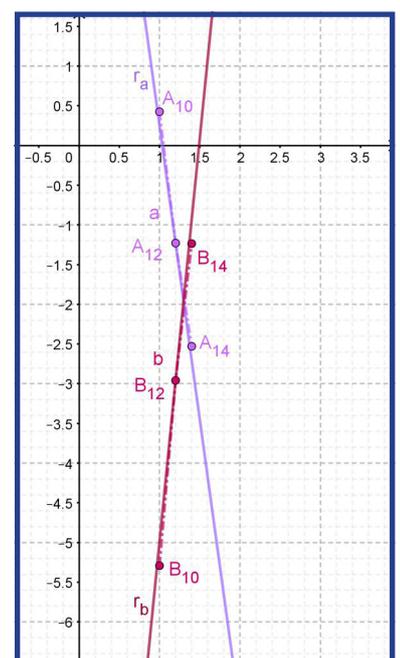
Con questa visione in mente abbiamo cercato il valore dei parametri  $a$  e  $b$  per ciascuna serie (come in precedenza, l'indice 10 è riferito, qui e nel seguito, alle misure riferite a una massa pari a 1.0 masse solari, l'indice 12 a una massa di 1.2 masse solari e, infine, l'indice 14 a una massa di 1.4 masse solari):

- »  $q_{10}(X) = 0.425 X^4 - 5.292 X^2$  per la prima serie, imponendo il passaggio per il primo e l'ultimo punto della serie con un errore (somma degli scarti quadratici) pari a circa  $e_{10} = 0.007$ ;
- »  $q_{12}(X) = -1.229 X^4 - 2.958 X^2$  per la seconda serie, imponendo il passaggio ancora per il primo e l'ultimo punto della serie con un errore pari a circa  $e_{12} = 4.6 \cdot 10^{-4}$ ;
- »  $q_{14}(X) = -2.529 X^4 - 1.236 X^2$  per la l'ultima serie, usando sempre il primo e l'ultimo punto, con un errore di  $e_{14} = 2.2 \cdot 10^{-4}$ .

Nella figura in alto le curve ottenute tracciando il grafico dei tre polinomi di quarto grado.



A questo punto procediamo come in precedenza, cercando una relazione tra i valori dei parametri trovati. Nella figura in basso abbiamo rappresentato (sullo stesso piano cartesiano, per comodità) i valori del parametro  $a$  (in viola) e quelli del parametro  $b$  (in rosso), entrambi in funzione della massa della stella. In entrambi i casi i punti ottenuti sono praticamente allineati e quindi abbiamo determinato una funzione approssimante di tipo lineare:



- » per il parametro  $a$  abbiamo  $a(m) = 10.139 m - 15.126$ ;
- » per il parametro  $b$  abbiamo  $b(m) = -7.385 m + 7.633$ .

Da qui la relazione generale ottenuta sostituendo le espressioni di  $a$  e  $b$  in funzione della massa in un polinomio di quarto grado simile a quelli usati per l'approssimazione delle singole serie di dati. Il risultato è una funzione di due variabili, un polinomio di quarto grado rispetto a  $X$ , in cui i parametri dipendono da  $m$ :

$$q(X, m) = (10.139 m - 15.126) X^2 + (-7.385 m + 7.633) X^4.$$

L'errore, in questo caso (sempre stimato calcolando la media degli scarti quadratici), è circa  $e = 0.002$ , come preannunciato di un ordine di grandezza migliore della soluzione precedente.



Il Toolbox:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf>  
 suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati lineari, vedi 2. Approssimazione di dati lineari a pagina 7.

## 2.3. SOLUZIONE 3: LA MATEMATICA REGNA!

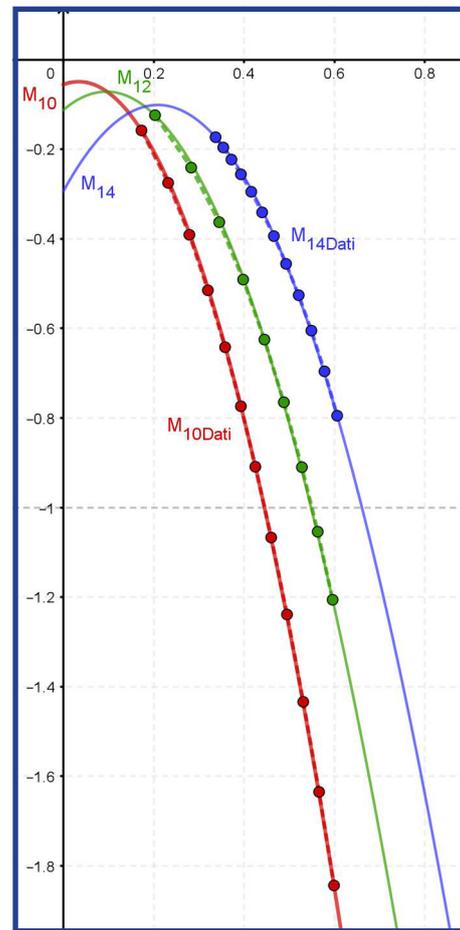
Concludiamo l'analisi del problema *Oblatezza di stelle di neutroni* proponendo il lavoro di una delle squadre che hanno partecipato a *MathByNight*.

### APPROSSIMAZIONE DEI DATI

Per approssimare le tre serie di dati sono stati scelti polinomi di secondo grado ma generici, con tre parametri, sostanzialmente delle parabole. I parametri sono stati determinati imponendo il passaggio per tre punti. Le equazioni trovate sono queste:

- »  $q_{10}(X) = -5.618 X^2 + 0.380 X - 0.0555$  per la prima serie, imponendo il passaggio per il primo, settimo e ultimo punto, la funzione approssima i dati con un errore di circa  $e_{10} = 1.6 \cdot 10^{-4}$ ;
- »  $q_{12}(X) = -4.523 X^2 + 0.860 X - 0.112$  per la seconda serie, imponendo il passaggio per il primo, quinto e ultimo punto, l'errore in questo caso è  $e_{12} = 3.6 \cdot 10^{-4}$ ;
- »  $q_{14}(X) = -4.409 X^2 + 1.845 X - 0.294$  per l'ultima serie, questa volta scegliendo il primo, l'ottavo e l'ultimo punto, errore  $e_{14} = 1.9 \cdot 10^{-4}$ .

Dal punto di vista dell'errore, un leggero miglioramento rispetto alla soluzione con polinomi di quarto grado (e due parametri), forse non abbastanza per giustificare il parametro in più.



### RELAZIONE GENERALE

L'aspetto più interessante di questa soluzione, in realtà, è nella costruzione della relazione generale tra momento di quadrupolo, momento angolare e massa della stella. Il *team* ha costruito tre parametri dipendenti dal valore della massa denominati  $m_{10}$ ,  $m_{12}$  e  $m_{14}$ . Ognuno di essi è tale da assumere valore uno se calcolato nella massa corrispondente ma da annullarsi se computato per gli altri due valori. In altre parole, se  $m_{10}(m)$  è il parametro corrispondente alla massa  $m = 1.0$  allora  $m_{10}(1.0) = 1.0$  ma  $m_{10}(1.2) = 0.0$  e  $m_{10}(1.4) = 0.0$ ! I tre parametri sono definiti come segue:

$$m_{10}(m) = \frac{(m-1.2) \cdot (m-1.4)}{(1.0-1.2) \cdot (1.0-1.4)}, \quad m_{12}(m) = \frac{(m-1.0) \cdot (m-1.4)}{(1.2-1.0) \cdot (1.2-1.4)},$$

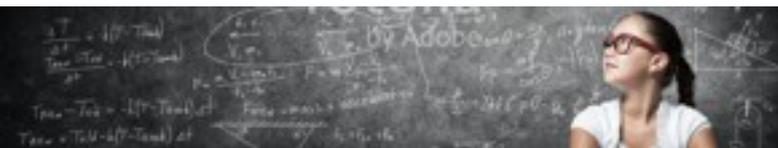
$$m_{14}(m) = \frac{(m-1.0) \cdot (m-1.2)}{(1.4-1.0) \cdot (1.4-1.2)}$$

A questo punto la funzione  $q(X, m)$  è costruita come combinazione dei polinomi che approssimano le tre serie di dati, dove i coefficienti di questa combinazione sono proprio i tre parametri appena definiti:  $q(X, m) = m_{10}(m) q_{10}(X) + m_{12}(m) q_{12}(X) + m_{14}(m) q_{14}(X)$ , che una volta sviluppata diventa  $q = -12.3m^2X^2 + 32.5mX^2 - 25.8X^2 + 6.3m^2X - 11.4mX + 5.5X - 1.6m^2 + 3.2m - 1.6$ .

Funzione che fornisce un'ottima approssimazione perchè  $q(X, 1.0) = q_{10}(X)$ ,  $q(X, 1.2) = q_{12}(X)$  e  $q(X, 1.4) = q_{14}(X)$  e quindi l'errore è dato sostanzialmente dagli errori di ogni polinomio sulla corrispondente serie di dati. Se calcoliamo la media degli scarti quadratici si ha  $e = 2.2 \cdot 10^{-5}$ , decisamente il risultato migliore!



Il fascicolo  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/05/09-Onde-gravitazionali-2.pdf>  
 in 4. Matematica vs Fisica discute proprio una soluzione per costruire una funzione a due variabili partendo da funzioni a una sola variabile simile a quella presentata qui.



### 3. Luce e fotoni

Questo laboratorio presenta uno dei problemi proposti nel corso di MathByNight 2019 ed è stato sviluppato in collaborazione con Fabio Chiarello (CNR-IFN), il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Isc G.B. Grassi di Latina).

La luce può essere pensata come composta da fotoni, *particelle* prive di massa con un'energia  $E$ , legata alla frequenza  $\nu$  della luce dalla relazione  $E = h \nu$  dove  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$  è la cosiddetta *costante di Planck*. Se la luce viene molto attenuata e si dispone di un rivelatore abbastanza sensibile è possibile distinguere l'arrivo di un singolo fotone alla volta. Per esempio, una luce rossa (con frequenza  $\nu = 450 \times 10^{12} \text{ Hz}$ ) emessa con una potenza  $P = 1 \text{ W}$  contiene in media

$$\langle n \rangle = \frac{P}{h \cdot \nu} \approx 2.4 \cdot 10^{18} \frac{\text{fotoni}}{\text{s}}$$

Mentre per avere un singolo fotone al secondo in media occorre una potenza

$$P = \frac{h \cdot \nu}{1\text{s}} \approx 2.98 \cdot 10^{-19} \text{ W}$$

L'arrivo dei fotoni avviene in momenti casuali e come per ogni processo casuale di questo genere, è possibile introdurre una funzione di distribuzione di probabilità  $P(n)$  che dà la probabilità di avere  $n$  fotoni in un dato intervallo di tempo (per esempio in 1 secondo). Così  $P(0)$  indica la probabilità di non avere nessun fotone in un secondo,  $P(1)$  la probabilità di avere un singolo fotone e così via. Diverse sorgenti di luce hanno diverse distribuzioni di probabilità. Per esempio, i fotoni emessi da un laser (luce coerente) seguono una distribuzione di probabilità di Poisson (detta *Poissoniana*):

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

dove il parametro  $\lambda$  indica il numero di fotoni che arrivano mediamente ogni secondo. Parametri importanti per caratterizzare una distribuzione di probabilità sono il valor medio  $\langle n \rangle$  e la deviazione standard  $\sigma$ , definiti come:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n \rangle)^2 \cdot P(n)$$

Nel caso della distribuzione Poissoniana abbiamo  $\langle n \rangle = \lambda$  e  $\sigma = \langle n \rangle$ .

La luce emessa da sorgenti non coerenti, come LED o lampadine, presenta distribuzioni di probabilità diverse caratterizzate tutte da una deviazione standard maggiore del valor medio, per questo vengono definite distribuzioni *super-Poissoniane*. Un esempio tipico è dato dalla seguente distribuzione:

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda)^{n+1}}$$

sempre con  $\langle n \rangle = \lambda$  e con  $\sigma = [\lambda(1+\lambda)]^{1/2}$ .

Si parla invece di distribuzioni *sub-Poissoniane* nei casi in cui la deviazione standard è inferiore al valor medio. Si tratta di casi molto esotici in cui vengono sfruttate le proprietà quantistiche della luce.

#### RIVELAZIONE DI SINGOLI FOTONI CON SNSPD

La rivelazione di singoli fotoni è molto difficile a causa delle basse energie dei singoli fotoni, ma è estremamente importante per diverse applicazioni, dalle tecnologie di comunicazione quantistica all'analisi di campioni biologici con sensibilità estreme. Vi sono diversi dispositivi in grado di



rivelare la presenza di singoli fotoni. Fra i più veloci ed efficaci troviamo gli *SNSPD* (*Superconducting Nanowire Single Photon Detector*). Si tratta di nanofili superconduttori (quindi con resistenza nulla) percorsi da una corrente costante ed operanti a temperature molto basse, intorno a quelle dell'elio liquido ( $4.2 K$ ). Se colpiti da un singolo fotone smettono di essere superconduttori per breve tempo, presentando un impulso di tensione che può essere rivelato e registrato indicando il momento di arrivo di un fotone.

#### STATISTICA DI DIVERSE SORGENTI

Conoscere la statistica dei fotoni è molto importante per studiare e comprendere il comportamento di diverse sorgenti luminose. È possibile studiare la statistica di una sorgente utilizzando un rivelatore di singoli fotoni che effettui dei conteggi e misuri il numero di fotoni che arrivano ogni secondo. Questo numero fluttua in modo casuale, così se ripetiamo  $N$  volte la stessa misura avremo una serie di conteggi diversi che indichiamo con  $n_k$ . Con questi conteggi è possibile stimare il valore medio e la deviazione standard:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k, \quad \sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (n_k - \langle n \rangle)^2$$

Queste stime permettono di distinguere una distribuzione di tipo Poissoniano da una super-Poissoniana o sub-Poissoniana.

È possibile conteggiare le frequenze  $f_k$  con cui lo stesso valore si ripete (quindi  $f_0$  indica quante volte si ripetono zero conteggi al secondo,  $f_1$  quante volte 1 singolo conteggio e così via), e riportare queste frequenze su un grafico cartesiano. Questo può essere confrontato con i grafici di distribuzioni di probabilità note per visualizzare in modo chiaro il comportamento della sorgente.

#### I DATI

Vengono forniti 4 file di dati, elenchi di valori numerici in formato *ASCII* risultati da diversi esperimenti.

I primi tre file di dati (*dati1.dat*, *dati2.dat*, *dati3.dat*) riportano sequenze di conteggi al secondo acquisite da tre diversi tipi di sorgente. Viene richiesto di utilizzare questi dati per:

- » Calcolare valor medio e deviazione standard nei tre casi.
- » Utilizzare questi per identificare il tipo di sorgente (Poissoniana, super-Poissoniana, sub-Poissoniana).
- » Valutare la potenza della luce nei tre casi.
- » Costruire gli istogrammi.
- » Confrontare questi istogrammi con distribuzioni di probabilità note.



Nel quarto file (*dati4.dat*) sono stati registrati i tempi in cui i fotoni sono stati rivelati da un SN-SPD (espressi in secondi):

- » Valutare una serie di conteggi per secondo partendo da questi dati;
- » Calcolare media, deviazione standard, potenza luminosa;
- » Determinare il tipo di sorgente (Poissoniana, super-Poissoniana, sub-Poissoniana);
- » Costruire un istogramma, da confrontare con distribuzioni note;
- » Determinare la serie dei tempi di attesa fra l'arrivo di due fotoni successivi e costruirne l'istogramma.



### 3.1. SOLUZIONI

Per analizzare i dati delle tre serie fornite (i file *dati1.dat*, *dati2.dat*, *dati3.dat*) abbiamo utilizzato un foglio elettronico. Per prima cosa abbiamo calcolato le frequenze  $f_k$  con cui uno stesso valore si ripeteva in diversi intervalli di tempo.

# fotoni	Dati1	
	frequenza	frequenza relativa
0	32	0.32
1	37	0.37
2	25	0.25
3	5	0.05
4	0	0.00
5	1	0.01
6	0	0.00

#### PRIMO INSIEME DI DATI

Per il primo file di dati abbiamo costruito una tabella con l'analisi delle frequenze:

- » nella prima colonna il numero di fotoni rilevato per secondo (al massimo abbiamo conteggiato 6 fotoni per secondo nei tre esperimenti);
- » nella seconda colonna il numero di casi in cui si è avuto il conteggio corrispondente (la frequenza della misura);
- » nella terza e ultima colonna la frequenza relativa (al totale degli intervalli di tempo esaminati).

I risultati sono mostrati nella tabella *Dati1* riportata qui sopra.

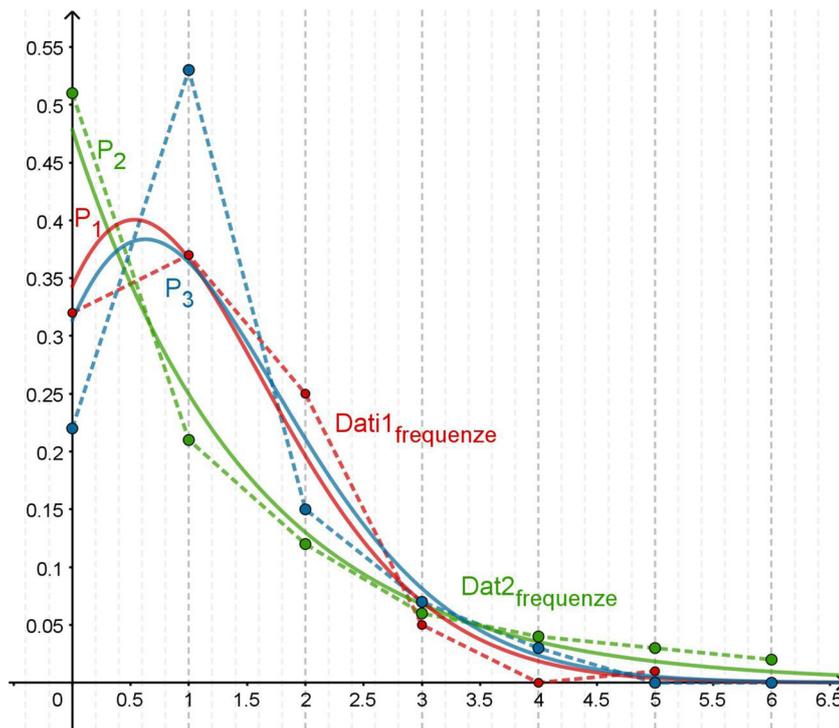
Una volta costruita la tabella abbiamo rappresentato su un piano cartesiano i risultati: sull'asse delle ascisse il conteggio del numero di fotoni per secondo, sull'asse delle ordinate la frequenza relativa con cui quel conteggio è stato rilevato. La spezzata ottenuta unendo i punti sperimentali è tratteggiata in colore rosso nella figura in basso.

Dato un numero di misure pari a  $n = 100$ , abbiamo calcolato il valor medio  $\langle n \rangle = 1.07$  e una deviazione standard di circa  $0.93$ , ne risulta un valor medio superiore alla deviazione standard per cui si tratta di una distribuzione poissoniana descritta dalla funzione:

$$P_1(n) = \frac{1}{n!} \cdot 1.07^n \cdot e^{-1.07}$$

La funzione corrispondente è tracciata in colore rosso nella figura qui accanto, la coerenza della distribuzione di probabilità con la funzione è abbastanza buona tenuto conto del limitato numero di misure.

Per concludere l'analisi della prima serie di dati, abbiamo calcolato la potenza della luce. Visto che la potenza per un singolo fotone è di circa  $4.0 \times 10^{-19} \text{ W}$ , possiamo calcolare la potenza media per il nostro esperimento, tenendo conto che abbiamo mediamente  $1.07$  fotoni al secondo è sufficiente moltiplicare la potenza media per un solo fotone al secondo per il numero medio di fotoni nel nostro caso:  $P_1 = 2.98 \cdot 10^{-19} \text{ W} \times 1.07 = 3.19 \times$



$10^{-19} W$ .

#### SECONDA SERIE DI DATI

Si tratta di ripetere, almeno inizialmente, la stessa procedura sul secondo file *Dati2*. I ottenuti risultati sono mostrati nella tabella qui accanto da cui si nota immediatamente che non rappresenta lo stesso andamento dell'esperimento precedente. La spezzata ottenuta unendo punti sperimentali successivi è tratteggiata nel piano cartesiano della pagina precedente in colore verde.

Dati2		
# fotoni	frequenza	frequenza relativa
0	51	0.51
1	21	0.21
2	12	0.12
3	7	0.07
4	4	0.04
5	3	0.03
6	2	0.02

Il valor medio (calcolato sempre su cento misure) è pari a  $\langle n \rangle = 1.09$ , un valore molto simile al precedente, ma la deviazione standard è di circa 2.26, per cui siamo nel caso in cui la deviazione standard è maggiore del valor medio: si tratta di una distribuzione superpoissoniana la cui equazione è:

$$P_2(n) = \frac{1.09^n}{(1 + 1.09)^n}$$

Anche in questo caso, però, il calcolo della potenza è piuttosto semplice, infatti ancora una volta è sufficiente moltiplicare per la potenza di un fotone  $P_2 = 2.98 \cdot 10^{-19} W \times 1.09 = 3.25 \times 10^{-19} W$ . Nella grafico che si trova nella pagina precedente la curva  $P_2(n)$  è tracciata in colore verde.

Dati3		
# fotoni	frequenza	frequenza relativa
0	22	0.22
1	53	0.53
2	15	0.15
3	7	0.07
4	3	0.03
5	0	0.00
6	0	0.00

#### TERZA SERIE DI DATI

Infine, i dati contenuti nel terzo file (*Dati3*). Costruiamo, come nei due casi precedenti, la tabella delle frequenze e calcoliamo il valor medio  $\langle n \rangle = 1.16$  e la deviazione standard  $\sigma = 0.90$ . I dati sono riportati in azzurro sul piano cartesiano mostrato nella pagina precedente.

Si tratta ancora di una distribuzione di tipo Poisson, visto che il valor medio è maggiore della deviazione standard. A questo punto è facile determinare la funzione che approssima le frequenze:

$$P_3(n) = \frac{1}{n!} \cdot 1.16^n \cdot e^{-1.16}$$

La potenza è  $P_3 = 2.98 \cdot 10^{-19} W \times 1.16$  e quindi  $P_3 = 3.46 \times 10^{-19} W$ . Nella grafico che si trova nella pagina precedente la curva  $P_3(n)$  è tracciata in azzurro.



#### QUARTA SERIE: UNA VARIAZIONE

Questa volta abbiamo a disposizione (nel file *Dati4*), non tanto il numero di fotoni che arrivano in ogni intervallo di tempo (un secondo) ma il tempo che passa tra la rilevazione di un fotone e la successiva. Quindi il problema richiede un lavoro preliminare: il calcolo dei fotoni arrivati in ciascun intervallo di tempo. Una volta eseguito questo conteggio, abbiamo, come in precedenza, calcolato le frequenze ottenendo la tabella che mostriamo nella pagina successiva. I dati sono stati rappresentati su un piano cartesiano, anche questo mostrato nella pagina successiva.

Avendo a disposizione la tabella, si ottiene un valor medio  $\langle n \rangle = 1.15$  e una deviazione standard



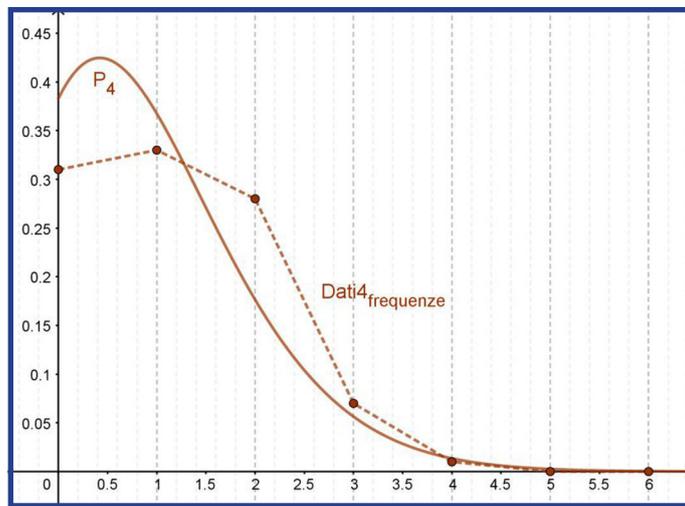
di circa  $\sigma = 0.96$ : ancora una volta si tratta di una distribuzione poissoniana visto che il valor medio è maggiore della deviazione standard. La funzione che rappresenta meglio questa distribuzione è:

$$P_4(n) = \frac{1}{n!} \cdot 0.96^n \cdot e^{-0.96}$$

Infine, la potenza della luce è  $P_4 = 3.43 \times 10^{-19} \text{ W}$  ottenuta, come di consueto, moltiplicando la potenza per un fotone per il numero medio di fotoni al secondo del nostro quarto esperimento.

#### ANALISI DEI TEMPI DI ATTESA

Per concludere, abbiamo analizzato i tempi di attesa (tra un fotone e l'altro) in questo ultimo esperimento. Il file di dati conteneva il tempo di arrivo di ciascun fotone, tempi di arrivo ordinati cronologicamente, per cui per determinare i tempi di attesa abbiamo calcolato la differenza tra l'istante di arrivo di un fotone e quello del fotone precedente.



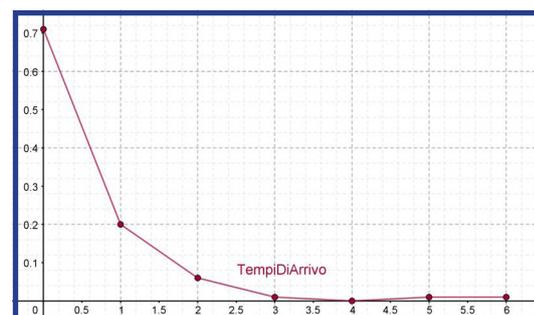
Il tempo di arrivo di ciascun fotone, tempi di arrivo ordinati cronologicamente, per cui per determinare i tempi di attesa abbiamo calcolato la differenza tra l'istante di arrivo di un fotone e quello del fotone precedente. Per analogia con le analisi precedenti, i tempi di attesa sono stati raggruppati in intervalli di ampiezza pari a un secondo. A questo punto abbiamo conteggiato le frequenze ottenendo la tabella che riportiamo in basso in questa stessa pagina dove nella prima riga sono computati i fotoni per i quali il tempo di attesa è inferiore al secondo (tempo di attesa del tipo  $0.xx$ ), nella seconda riga il

numero di fotoni il cui tempo di attesa è compreso tra uno e due secondi, ... Nella terza colonna, come negli altri esempi, sono riportate le frequenze relative.

Infine, i dati (le frequenze relative i tempi di attesa) sono stati rappresentati su un piano cartesiano (sulle ascisse i tempi di attesa in secondi, sulle ordinate le frequenze relative). Il risultato è mostrato qui di seguito.



Dati1		
# fotoni	frequenza	frequenza relativa
0	70	0.70
1	20	0.20
2	6	0.06
3	1	0.01
4	0	0.00
5	1	0.01
6	1	0.01





C'è un laboratorio sul rendimento di un'elica isolata:  
<http://researchinaction.it/rendimento-elica-libera/>  
 sviluppato sempre in collaborazione con Alessandro Moriconi. In particolare può essere utile leggere 5. Analisi dimensionale dove viene fornita una descrizione delle grandezze implicate.

## 4. Analisi di incertezza

Questo laboratorio presenta uno dei problemi proposti nel corso di MathByNight 2019 ed è stato sviluppato in collaborazione con Alessandro Moriconi (CNR-INM), il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Ies G.B. Grassi di Latina).

Da ormai qualche decennio tutto il mondo scientifico ha la consapevolezza che le misure devono essere corredate di accuratezza, ovvero dell'intervallo entro il quale con una certa probabilità si trova il valore esatto di ciò che stiamo misurando. È noto ad esempio l'annullamento di alcune multe per eccesso di velocità perché la violazione era stata contestata utilizzando sistemi di misura elettronici non corredate di certificato attestante l'incertezza di misura.

La materia è stata, ed è tutt'ora, oggetto di studi volti a migliorare la metodologia da utilizzare per il calcolo di tale intervallo, e già da un po' di tempo i primi capitoli dei libri di Fisica delle scuole superiori trattano questo argomento. Il metodo più semplice, anche se ormai di fatto superato da più moderne e meglio congeniate procedure, è quello proposto da Coleman e Steele alla fine degli anni '80 del Novecento, che risulta certamente il più intuitivo e il più semplice nella sua applicazione pratica, è quindi ottimo per un primo approccio a questa problematica.

Secondo tale tecnica gli errori che intervengono in una misura possono essere divisi in due classi: errori sistematici o di *bias* ed errori di precisione. I primi sono essenzialmente dovuti alle imprecisioni proprie degli strumenti di misura (come per esempio, l'imprecisione di una bilancia o di un metro, o quella di un convertitore  $F/V$ , o, più semplicemente, quella dovuta a una intera funzione di trasferimento di un qualsiasi trasduttore), e costituiscono quindi la componente sistematica dell'errore, quella che neanche un andamento particolarmente fortunato dell'esperimento può eliminare; i secondi invece formano la componente casuale dell'errore, ed in quanto tali sono imprevedibili e valutabili solo statisticamente dopo aver eseguito un adeguato numero di volte l'esperimento stesso.

Mentre la valutazione dell'errore sistematico, generalmente indicato con  $B$ , avviene mediante considerazioni e procedure di varia natura, (ad esempio l'utilizzo di pesi campione per le celle dinamometriche), per stimare l'errore di precisione  $P$  (di  $N$  misurazioni  $X_i$  la cui media è  $X_{media}$ ), è necessario calcolare il limite di precisione  $P = t \times S$  dove  $S$  è l'indice di precisione:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (X_i - X_{media})^2}$$

e  $t$  è l'indice di distribuzione (o *t di Student*), che è funzione dei gradi di libertà dell'esperimento in questione  $v = N-1$ . Normalmente si sceglie per la  $t$  il valore corrispondente a un intervallo di confidenza del 95%. La seguente tabella ne riassume, al variare di  $N$ , alcuni valori arrotondati.



N	4	5	6	7	8	9	10	11
t	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

La

$$U = \sqrt{U^2 + P^2}$$

definisce l'incertezza totale della grandezza misurata, nel senso che l'esatta misura si trova con il 95% delle probabilità all'interno dell'intervallo:  $[X_{media} - U; X_{media} + U]$ .

Quanto sopra esposto può essere applicato direttamente solo quando ci interessa analizzare una grandezza cosiddetta *primaria*, cioè una grandezza che può essere direttamente misurata in un esperimento (come ad esempio la misura della spinta  $T$  in un esperimento di elica isolata); molto più frequentemente invece è necessario fare l'analisi sulle grandezze cosiddette *derivate*, cioè tutte quelle che non sono ricavabili direttamente da una misurazione ma sono il frutto dell'elaborazione matematica di più grandezze primarie (come, per lo stesso esperimento, la misura del coefficiente di spinta  $KT$ ).



In base alla definizione, possiamo pensare a una grandezza derivata come a una funzione  $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  dove le  $X_i$  sono le  $N$  grandezze primarie da cui essa è derivata; nella valutazione del suo intervallo d'incertezza si deve necessariamente tenere conto della propagazione degli errori commessi nel misurare le singole  $X_i$ . Dopo aver definito i *coefficienti di sensibilità* secondo la

$$x_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

che offrono una stima dell'influenza che l'errore commesso sulla  $i$ -esima grandezza primaria  $X_i$  ha sulla determinazione della grandezza secondaria, si calcolano le componenti di precisione e sistematiche totali, facendo la radice quadrata delle somme dei quadrati dei coefficienti di sensibilità pesati tramite i limiti di precisione e di bias corrispondenti alle singole grandezze primarie:

$$P_f = \sqrt{\sum_{i=1}^j (x_i \cdot P_{X_i})^2}, B_f = \sqrt{\sum_{i=1}^j (x_i \cdot B_{X_i})^2}$$

L'incertezza totale, come per le grandezze primarie, sarà determinata dalla:

$$U_f = \sqrt{P_f^2 + B_f^2}$$

Con l'obiettivo principale di completare le informazioni fornite in questa semplice introduzione, sottolineiamo che prima di procedere con l'analisi delle singole grandezze, sarebbe necessario escludere quei punti sperimentali che, a causa di perturbazioni anomale imprevedibili e incontrollate, sono al di fuori di un certo *range* di misura che già il buon senso, di fronte ad un notevole numero di campioni, saprebbe definire. Tali punti sperimentali sono definiti *anomali*.

Il più noto test per riconoscere questo tipo di punti è il *test di Thompson* o del  $\tau$ , che definisce *anomali* tutti quei rilievi sperimentali  $R_i$  che verificano la

$$|R_i - R_{media}| > \tau \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (R_i - R_{media})^2}{N}}$$

dove  $R_{media}$  è la media su tutti i rilievi e  $\tau$  è un parametro funzione di  $N$ . La seguente tabella ne riporta alcuni valori arrotondati corrispondenti al 5% del *livello di significatività*, ovvero, se la disuguaglianza precedente è verificata, esiste solo il 5% di possibilità che il punto sia corretto.

N	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tau$	1.393	1.572	1.656	1.711	1.749	1.777	1.798	1.815

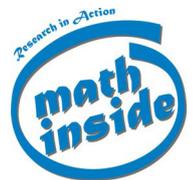
Nel nostro caso, tenendo conto della definizione dell'indice di precisione  $S$  (cfr. pagina 17) possiamo anche scrivere:

$$|R_i - R_{media}| > \tau S \cdot \sqrt{N-1}$$

Normalmente il test di Thompson si esegue una sola volta.

## 4.1. IL PROBLEMA

Si consideri l'esperimento di Elica isolata realmente eseguito diversi anni fa, in cui ogni punto sperimentale la misura venne ripetuta dieci volte al fine di valutare l'accuratezza di misura. L'elica aveva un diametro di  $0,194 \text{ m}$  e la densità dell'acqua era  $102.01 \text{ kg} \times \text{s}^2/\text{m}^4$ . Sottolineiamo che le unità di misura utilizzate non erano quelle del sistema internazionale, bensì quelle che fino a qualche anno fa venivano comunemente usate nel mondo navale.



Il simbolo  $\partial/\partial x$  indica la derivata fatta rispetto alla variabile  $x$  quindi  $\partial f/\partial x$  è la derivata della funzione  $f$  fatta rispetto alla variabile  $x$ , derivata calcolata considerando costanti tutte le altre variabili eventualmente presenti. In termini diversi, però,  $\partial f/\partial x$  indica anche la rapidità di variazione della  $f$  causata dalla variazione della  $x$ . Concludiamo chiarendo che non è indispensabile calcolare manualmente i coefficienti  $x$ , ma si può ricorrere a un qualsiasi software specifico o a un qualche artificio matematico che misuri la rapidità di variazione di cui sopra come rapporto di incrementi.



La funzione diff di xMaxima permette di calcolare la derivata di una funzione  $f$  rispetto alla variabile desiderata. xMaxima si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/).



Ricordando che:

$$J = \frac{V}{nD}, K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4}, K_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5}, \eta = \frac{J \cdot K_T}{2\pi \cdot K_Q}$$

dalla formula che definisce le componenti di precisione e sistematiche totali (vedi sopra), per esempio, l'indice di precisione di  $J$  risulta:

$$P_J = \sqrt{\left(\frac{P_V}{nD}\right)^2 + \left(-\frac{VP_n}{n^2 D}\right)^2}$$

Supponendo che gli errori sistematici commessi su alcune grandezze primarie fossero quelli riportati nella tabella qui sotto:

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Errore
Densità dell'acqua	$\rho$	$kg \times s^2/m^4$	$\pm 0.001$
Numeri di giri	$n$	$giri/s$	$\pm 0.03$
Diametro	$D$	$m$	$\pm 0.0005$
Velocità	$V$	$m/s$	$\pm 0.001$
Spinta	$T$	$kg$	$\pm 0.0475$
Coppia	$Q$	$kg \times m$	$\pm 0.00075$

si risolvano gli esercizi seguenti.

#### PUNTO 1

Si completino, senza eliminare i punti anomali, le caselle vuote della tabella appresso riportata. Si tenga presente che, se se ne avrà il tempo, nell'esercizio 2 si dovranno ripetere gli stessi calcoli con altri dati, quindi è opportuno predisporre un foglio di calcolo con le formule automatizzate in modo da poter, nel secondo esercizio, eseguire i calcoli molto velocemente. Se invece non si è pratici di alcun software di calcolo si può procedere direttamente a mano.



#	$V_m$ $m/s$	$N_m$ $giri/s$	$T_m$ $kg$	$Q_m$ $kg \times m$	$J$	$K_T$	$10 K_Q$	$\eta$
1	1.9770	18.681	10.936	0.325	0.546	0.218	0.334	0.567
2	1.9902	18.662	10.801	0.322	0.550	0.216	0.332	0.568
3	1.9902	18.682	10.832	0.322	0.550	0.216	0.331	0.571
4	1.9952	18.684	10.813	0.321	0.551	0.215	0.330	0.572
5	1.9904	18.688	10.885	0.324	0.550	0.217	0.332	0.570
6	1.9900	18.666	10.826	0.321	0.550	0.216	0.331	0.571
7	1.9917	18.663	10.887	0.322	0.551	0.217	0.332	0.574
8	1.9894	18.660	10.870	0.322	0.550	0.217	0.332	0.573
9	1.9904	18.667	10.851	0.321	0.550	0.217	0.331	0.573
10	1.9870	18.663	10.861	0.322	0.550	0.217	0.332	0.572
Media	1.9892	18.672	10.856	0.322	0.550			
S	0.0015	0.003	0.0129	0.00036	0.0004			
P	0.0034	0.008	0.0291	0.00083	0.0010			
P (%)	0.17%	0.04%	0.27%	0.26%	0.18%			
B	0.0010	0.030	0.0475	0.00075				
B (%)	0.05%	0.16%	0.44%	0.23%				
U	0.004	0.03	0.056	0.0011				
U (%)	0.18%	0.17%	0.51%	0.35%				

## PUNTO 2

Si ripeta tutto il calcolo con i seguenti altri dati sperimentali, facendo attenzione che in queste altre condizioni di velocità e di giri dell'elica (quindi di velocità di avanzo) gli errori sistematici su  $T$  e  $Q$  sono diversi, ovvero:

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Errore
Spinta	$T$	kg	$\pm 0.0438$
Coppia	$Q$	$\text{kg} \times \text{m}$	$\pm 0.00054$

#	$V_m$ m/s	$N_m$ giri/s	$T_m$ kg	$Q_m$ $\text{kg} \times \text{m}$	J	KT	10 KQ	$\eta$
1	2.7118	18.690	6.553	0.215	0.749	0.130	0.221	0.704
2	2.7140	18.675	6.506	0.216	0.750	0.130	0.223	0.696
3	2.7090	18.690	6.574	0.216	0.748	0.131	0.222	0.703
4	2.7161	18.684	6.532	0.214	0.750	0.130	0.220	0.706
5	2.7139	18.668	6.561	0.216	0.750	0.131	0.222	0.704
6	2.7142	18.665	6.522	0.214	0.751	0.130	0.220	0.705
7	2.7135	18.655	6.594	0.215	0.751	0.132	0.222	0.709
8	2.7150	18.637	6.526	0.213	0.752	0.131	0.220	0.709
9	2.7142	18.659	6.558	0.214	0.751	0.131	0.220	0.711
10	2.7148	18.641	6.527	0.213	0.752	0.131	0.220	0.711
Media	2.7137	18.666	6.546	0.215				
SX	0.0006	0.006	0.0086	0.00036				
P	0.0014	0.013	0.0194	0.00082				
P(%)	0.05%	0.07%	0.30%	0.38%				
B	0.0010	0.030	0.0438	0.00054				
B(%)	0.04%	0.16%	0.67%	0.25%				
U	0.002	0.03	0.048	0.0010				
U(%)	0.06%	0.18%	0.73%	0.46%				

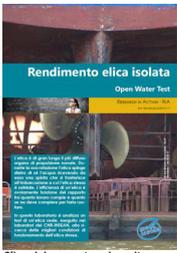
## PUNTO 3

Si individuino i punti sperimentali anomali secondo il test di Thompson tra le misure analizzate al punto 1 di questo problema (cfr. **Punto 1 a pagina 19**), eseguendo il test una sola volta (ovviamente solo sulle grandezze primarie).

## PUNTO 4

Si rielabori tutta la tabella dell'esercizio 1, dopo aver eliminato i punti anomali, facendo attenzione al fatto che  $N$  potrebbe essere cambiato.





## 4.2. SOLUZIONI

### PUNTO 1

La prima riga da completare (la media) è piuttosto semplice, si tratta di calcolare per ogni colonna la media dei valori contenuti nelle righe da uno a dieci della colonna corrispondente (nella tabella riportata nella pagina seguente, i valori calcolati sono riportati in colore rosso).

Per la seconda riga ricordiamo che a pagina 16 abbiamo definito l'indice di precisione  $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (X_i - X_{media})^2}$$

quindi, in pratica, per ogni misura calcoliamo una sorta di deviazione standard divisa per la radice quadrata del numero dei campioni diminuito di uno. Tutti i dati necessari sono già presenti nella tabella (cfr. Punto 1 a pagina 18).

Passiamo ora alla terza riga, l'errore di precisione  $P$ . Ricordiamo che l'errore di precisione per una certa grandezza  $f$  è dato da (cfr. pagina 18):

$$P_f = \sqrt{\sum_{i=1}^j (x_i \cdot P_{x_i})^2}$$

dove la somma è estesa a tutte le variabili da cui dipende la grandezza e gli  $x_i$  (i coefficienti di sensibilità) sono la variazione, la derivata, della grandezza fatta rispetto a una delle variabili da cui dipende.

Spieghiamo meglio con un esempio, la velocità di avanzo  $J = V/nD$  dipende dalla velocità  $V$  e dal numero di giri  $n$ , in totale da due variabili (il diametro  $D$  dell'elica è una costante), quindi avremo due coefficienti di sensibilità, uno relativo alla velocità  $V$  e l'altro relativo al numero di giri  $n$ :

$$x_1 = x_v = \frac{\partial J}{\partial V} = \frac{1}{nD}, \quad x_2 = x_n = \frac{\partial J}{\partial n} = \frac{V}{D} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{V}{n^2 D}$$

È bene ricordare che calcolare la derivata di  $J$  rispetto, per esempio, alla velocità  $V$ , vuol dire considerare tutte le altre variabili come costanti!

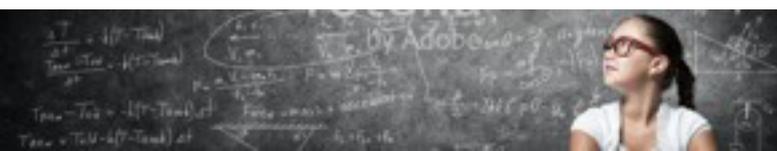
Possiamo ora calcolare l'errore di precisione per la velocità di avanzo, che risulta:

$$P_J = \sqrt{\left(\frac{P_V}{nD}\right)^2 + \left(-\frac{VP_n}{n^2 D}\right)^2}$$



La figura qui di seguito chierisce, per questo esempio, *dove trovare* i dati che servono nella tabella su cui stiamo lavorando.

#	Vm m/s	Nm airi/s	Tm kg	Qm kg × m	J	KT	10 KQ	η
Media	1.9892	18.672	10.856	0.322	0.550	0.217	0.332	0.571
S	0.0015	0.005	0.0129	0.00036	0.0004	0.0003	0.0004	0.0007
P	0.0034	0.008	0.0291	0.00083	0.0010	0.0006	0.0009	0.0023
P (%)	0.17%	0.04%	0.27%	0.26%	0.18%	0.28%	0.27%	0.41%
B	0.0010	0.030	0.0475	0.00075	0.0009	0.0025	0.0045	0.0030
B (%)	0.05%	0.16%	0.44%	0.23%	0.16%	1.17%	1.35%	0.52%
U	0.004	0.03	0.056	0.0011	0.00111	0.001	0.003	0.00
U (%)	0.18%	0.17%	0.51%	0.35%	0.24%	1.20%	1.38%	0.66%



In verde la casella in cui riportiamo l'errore di precisione  $P_J$  per la velocità di avanzo  $J$ . In rosso la casella con il valore della velocità  $V$  che appare nel secondo termine della formula qui sopra mentre in rosso più scuro l'errore di precisione  $P_V$  (sempre sulla velocità) che appare nel primo termine. Infine in azzurro il valore del numero di giri  $n$  e in blu più scuro l'errore di precisione  $P_n$  sul numero di giri. Il valore del diametro  $D$  è dato (cfr. la tabella che si trova a pagina 18).

Per chiarezza (visto che questo passaggio è probabilmente il più complesso di tutto il problema) proponiamo un secondo esempio, l'errore di precisione del coefficiente di spinta  $K_T$  che dipende dalla spinta  $T$  e dal numero di giri  $n$  (la densità dell'acqua e il diametro dell'elica sono costanti), per cui:

$$x_1 = x_T = \frac{\partial K_T}{\partial T} = \frac{1}{\rho n^2 D^4}, x_2 = x_n = \frac{\partial K_T}{\partial n} = \frac{T}{\rho D^4} \cdot \left(-\frac{2}{n^3}\right) = -\frac{2T}{\rho n^3 D^4}$$

e quindi l'errore di precisione sarà:

$$P_{K_T} = \sqrt{\left(\frac{P_T}{\rho n^2 D^4}\right)^2 + \left(\frac{-2TP_n}{\rho n^3 D^4}\right)^2}$$

A questo punto possiamo completare la terza riga della tabella. ma anche la quarta, visto che si tratta semplicemente di determinare l'errore di precisione (appena calcolato) rispetto al valore corrispondente (la media) che, nella tabella, riportiamo come valore percentuale ( $P\%$ ).

Passiamo ora alla valutazione dell'errore sistematico o di *bias*. Si tratta, sostanzialmente, di procedere allo stesso modo semplicemente moltiplicando i coefficienti di sensibilità  $x_i$  per i limiti di bias  $B_i$  (anzichè per i limiti di precisione  $P_i$ ). Anche in questo caso la riga successiva richiede semplicemente di calcolare l'errore (di *bias* in questo caso) relativo al valore della grandezza corrispondente (la media), contenuto nella prima riga della tabella.

Completiamo ora le ultime due righe, le più facili. L'incertezza totale, per ciascuna grandezza, è la radice della somma dei quadrati dell'errore di precisione e di quello di bias (cfr. pagina 17), errori che, nella tabella, sono riportati nella terza e quinta riga.

#	Vm m/s	Nm giri/s	Tm kg	Qm kg × m	J	KT	10 KQ	η
Media	1.9892	18.672	10.856	0.322	0.550	0.217	0.332	0.571
S	0.0015	0.003	0.0129	0.00036	0.0004	0.0003	0.0004	0.0007
P	0.0034	0.008	0.0291	0.00083	0.0010	0.0006	0.0009	0.0023
P (%)	0.17%	0.04%	0.27%	0.26%	0.18%	0.28%	0.27%	0.41%
B	0.0010	0.030	0.0475	0.00075	0.0009	0.0025	0.0045	0.0030
B (%)	0.05%	0.16%	0.44%	0.23%	0.16%	1.17%	1.35%	0.52%
U	0.004	0.03	0.056	0.0011	0.00111	0.001	0.003	0.00
U (%)	0.18%	0.17%	0.51%	0.35%	0.24%	1.20%	1.38%	0.66%

Le informazioni che contano, quelle che misurano la propagazione dell'errore dalle grandezze primarie (velocità  $V$ , numero di giri  $n$ , spinta  $T$  e coppia  $Q$ ) a quelle secondarie (velocità di avanzo  $J$ , coefficiente di spinta  $K_T$ , coefficiente di coppia  $K_Q$  e rendimento  $\eta$ ) si trovano nelle ultime due righe della tabella.



La funzione diff di xMaxima permette di calcolare la derivata di una funzione f rispetto alla variabile desiderata. xMaxima si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/).



## PUNTO 2

Si tratta di ripetere le stesse operazioni con il nuovo insieme di dati per cui, se si è seguito il suggerimento del proponente di preparare un foglio di calcolo con le formule opportune, sarà sufficiente riempire la tabella con i nuovi dati per ottenere immediatamente l'analisi richiesta.

I risultati sono riportati nella tabella che è riportata qui di seguito (in nero i dati forniti e in rosso quelli calcolati).

#	V <sub>m</sub> m/s	N <sub>m</sub> giri/s	T <sub>m</sub> kg	Q <sub>m</sub> kg × m	J	KT	10 KQ	η
Media	2.7137	18.666	6.546	0.215	0.7503	0.1306	0.2210	0.7059
SX	0.0006	0.006	0.0086	0.00036	0.0004	0.0002	0.0003	0.0014
P	0.0014	0.013	0.0194	0.00082	0.0007	0.0004	0.0009	0.0035
P (%)	0.05%	0.07%	0.30%	0.38%	0.09%	0.33%	0.41%	0.49%
B	0.0010	0.030	0.0438	0.00054	0.0009	0.0017	0.0030	0.0052
B (%)	0.04%	0.16%	0.67%	0.25%	0.12%	1.27%	1.35%	0.73%
U	0.002	0.03	0.048	0.0010	0.001	0.002	0.003	0.006
U (%)	0.06%	0.18%	0.73%	0.46%	0.15%	1.31%	1.41%	0.88%

## PUNTO 3

Una misura (primaria, non derivata) risulta *anomala*, e quindi va esclusa dall'analisi, se la differenza tra la misura e la media corrispondente risulta superiore al prodotto tra  $\tau$  (che nel nostro caso, dieci misure, è pari a 1.798) il limite di precisione S e la radice del numero delle misure:

$$|R_i - R_{media}| > \tau S \cdot \sqrt{N-1}$$

Per comodità, costruiamo quindi una terza tabella: nelle prime dieci righe riportiamo il valore assoluto della differenza tra misura e media corrispondente mentre nell'ultima riga calcoliamo il valore con cui confrontarlo (quello che appare a secondo membro della disequazione).

#	V <sub>m</sub> m/s	N <sub>m</sub> giri/s	T <sub>m</sub> kg	Q <sub>m</sub> kg × m
1	0,0121	0,0094	0,0804	0,0027
2	0,0011	0,0096	0,0553	0,0002
3	0,0011	0,0104	0,0243	0,0007
4	0,0061	0,0124	0,0432	0,0011
5	0,0012	0,0164	0,0287	0,0013
6	0,0009	0,0056	0,0303	0,0008
7	0,0026	0,0086	0,0308	0,0000
8	0,0003	0,0116	0,0137	0,0002
9	0,0012	0,0046	0,0053	0,0008
10	0,0021	0,0086	0,0047	0,0005
	0,0081	0,0184	0,0694	0,0020



Si vede immediatamente che nella prima riga i valori di velocità, spinta e coppia non superano il test di Thompson (sono evidenziati in colore rosso) e quindi dobbiamo escludere la prima riga dall'analisi.

È bene precisare che i valori più sospetti sono quelli per cui la differenza, l'errore  $|R_i - R_{media}|$ , è più grande (per esempio, nel caso della velocità, il campione numero uno). Per cui, dal punto di vista operativo, sarebbe stato sufficiente eseguire il test di Thompson su questi valori: per la velocità il campione n. 1 (ma anche per spinta e coppia) e il campione n. 5 per quanto riguarda il numero di giri.



## PUNTO 4

Per concludere il lavoro dobbiamo ripetere quanto fatto al punto 1 considerando solo le righe da due a dieci.

#	Vm m/s	Nm giri/s	Tm kg	Qm kg × m	J	KT	10 KQ	η
2	1.9902	18.662	10.801	0.322	0.550	0.216	0.332	0.568
3	1.9902	18.682	10.832	0.322	0.550	0.216	0.331	0.571
4	1.9952	18.684	10.813	0.321	0.551	0.215	0.330	0.572
5	1.9904	18.688	10.885	0.324	0.550	0.217	0.332	0.570
6	1.9900	18.666	10.826	0.321	0.550	0.216	0.331	0.571
7	1.9917	18.663	10.887	0.322	0.551	0.217	0.332	0.574
8	1.9894	18.660	10.870	0.322	0.550	0.217	0.332	0.573
9	1.9904	18.667	10.851	0.321	0.550	0.217	0.331	0.573
10	1.9870	18.663	10.861	0.322	0.550	0.217	0.332	0.572
Media	1.9905	18.671	10.8471	0.322006	0.5503	0.2164	0.3315	0.5716
S	0.0007	0.004	0.0104	0.000238	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005
P	0.0017	0.008	0.0239	0.000549	0.0005	0.0005	0.0006	0.0017
P (%)	0.08%	0.04%	0.22%	0.17%	0.09%	0.24%	0.19%	0.29%
B	0.0010	0.030	0.0475	0.000746	0.0009	0.0025	0.0045	0.0030
B (%)	0.05%	0.16%	0.44%	0.23%	0.16%	1.17%	1.35%	0.52%
U	0.002	0.03	0.053	0.00093	0.001	0.003	0.005	0.003
U (%)	0.10%	0.17%	0.49%	0.29%	0.19%	1.19%	1.36%	0.60%

E con questo il problema è risolto!

### 4.3. UNA PRECISAZIONE

In fondo a questa pagina abbiamo riportato un'ultima tabella costruita con le differenze, gli errori,  $|R_i - R_{media}|$  dei campioni rimanenti e, nell'ultima riga, il valore con cui confrontare questi errori per eseguire il test di Thompson (i valori anomali sono evidenziati in rosso).

Si vede chiaramente che ci sono ancora due campioni *anomali*: il n. 4 a causa della velocità e il n. 5 per la coppia  $Q$ . Dal punto di vista teorico, questi campioni anomali andrebbero a loro volta esclusi e, di nuovo, ripetuto il test sui campioni rimanenti, ma il proponente indicava chiaramente (cfr. pagina 17) che ... *normalmente il test di Thompson si esegue una sola volta* ... per cui, per quanto riguardava il contest, era sufficiente eliminare il primo campione risultato anomalo.



#	Vm m/s	Nm giri/s	Tm kg	Qm kg × m
2	0.0003	0.0086	0.0463	0.0005
3	0.0003	0.0114	0.0153	0.0004
4	0.0047	0.0134	0.0342	0.0008
5	0.0001	0.0174	0.0377	0.0016
6	0.0005	0.0046	0.0213	0.0005
7	0.0012	0.0076	0.0397	0.0003
8	0.0011	0.0106	0.0226	0.0001
9	0.0001	0.0036	0.0037	0.0005
10	0.0035	0.0076	0.0136	0.0002
	0.0036	0.0182	0.0520	0.0012



LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA



Istituto per le Applicazioni del Calcolo



Istituto di Fotonica e Nanotecnologie



**ISMAR**

Istituto di Scienze Marine

LSS G.B. GRASSI

LICEO SCIENTIFICO STATALE G.B. GRASSI DI LATINA

[WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG](http://WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG)

CNR - IAC

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO MAURO PICONE

[WWW.IAC.CNR.ORG](http://WWW.IAC.CNR.ORG)

CNR - IFN ROMA

ISTITUTO DI FOTONICA E NANOTECNOLOGIE

[WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG](http://WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG)

CNR - INM

ISTITUTO DI INGEGNERIA DEL MARE

[WWW.INSEAN.CNR.ORG](http://WWW.INSEAN.CNR.ORG)

CNR - ISMAR

ISTITUTO DI SCIENZE MARINE

[WWW.ISMAR.CNR.ORG](http://WWW.ISMAR.CNR.ORG)