Un problema di consegne

Come recapitare la posta senza sprechi

Research in Action - RIA

researchinaction.it

16 Un problema di consegne - 07.20
Revisione 1 del 17.02.22

Il Problema del postino cinese fu proposto dal matematico Meigu Guan nato a Shangai (da cui l'aggettivo cinese) nel 1962. In termini formali il problema chiede di individuare in un grafo un cammino ciclico (un circuito) di lunghezza minima che attraversi tutti gli archi del grafo.

In pratica, dato un grafo si tratta di percorrere tutti gli archi in modo da tornare al termine della passeggiata al punto di partenza ma questo cammino deve essere il più breve possibile, quello di lunghezza minima.

Proprio il percorso migliore per recapitare la posta!

RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Un problema di consegne - Come recapitare la posta senza sprechi

Sommario dei contenuti

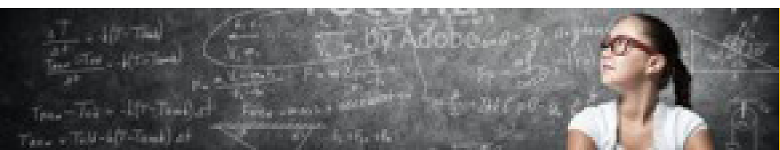
Materiale disponibile per questo laboratorio:

- il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/materials/16-Un-problema-di-consegne.pdf**;
- il laboratorio *Quattro passi in centro*, da cui inizia il percorso sulla topologia: **http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf**;
- il laboratorio *Un grafo connesso* che può essere utile prima di affrontare questo laboratorio: **http://researchinaction.it/materials/07-Un-grafo-connesso.pdf**.

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**. In particolare, sul canale YouTube, sono presenti brevi videocorso introduttivi all'uso di xMaxima e di Blockly.

Il percorso da affrontare è piuttosto lungo e complesso. Può essere di aiuto la mappa che riportiamo qui accanto (che va letta a partire dall'alto in senso orario).
I primi tre *step* (Il ponti di Konigsberg, il teorema di Eulero e i grafi connessi) sono affrontati nei laboratori *Quattro passi in centro* e *Un grafo connesso*.



Un problema di consegne

Come recapitare la posta senza sprechi

1. Il problema del postino cinese

Questo laboratorio prende spunto dal libro *Alla ricerca della via più breve* di Peter Gritzmann e Rene Brandenberg edito da Springer.

Il *Problema del postino cinese* fu proposto nel 1962 dal matematico Meigu Guan (o Mei-Ku Kwan) nato a Shangai da cui l'aggettivo *cinese*. In realtà il nome - *Chinese Postman Problem* - fu coniato da Alan Goldman, influenzato dal romanzo di Ellery Queen *The Chinese Orange Mystery*.

In termini formali il problema chiede di individuare in un grafo, che deve essere connesso, ...

... un cammino ciclico di lunghezza minima che attraversi tutti gli archi del grafo.

In pratica, dato un grafo (che supporremo per comodità non orientato) si tratta di percorrere tutti gli archi in modo da tornare al termine della *passeggiata* al punto di partenza ma questo cammino deve essere il più breve possibile, quello di lunghezza minima.

Chiaramente la questione proposta deriva dal problema che si presenta a un postino: all'inizio del suo lavoro, ogni giorno, deve percorrere tutte le strade di sua competenza (per consegnare la posta, ovviamente) cercando di ridurre al minimo il tempo di percorrenza o la lunghezza del suo giro. È anche la preoccupazione, per fare un altro esempio, di chi organizza la raccolta dei rifiuti: passare per ogni strada assegnata riducendo al minimo la lunghezza del percorso.

Abbiamo affrontato un problema collegato a questo nel laboratorio *Quattro passi in centro* in cui si è cercato di risolvere il famoso problema dei *Ponti di Königsberg*. Il problema dei ponti, generalizzando, chiede di decidere se in un grafo è possibile costruire un cammino che attraversi tutti gli archi una e una sola volta, un cammino del genere è detto *euleriano*. Qui, invece, ci viene chiesto di determinare un *circuito* euleriano (un cammino che torni anche al punto di partenza) di lunghezza minima.

Il problema non è banale e richiede di riutilizzare diverse competenze apprese in questa serie di laboratori (quelli dedicati alla topologia), integrandole in un percorso piuttosto articolato.

Nella pagina precedente è presentata la strada che ci accingiamo a percorrere (la mappa va letta in senso orario partendo dalle *ore 12*, dall'elemento i Ponti di Königsberg). Si tratta di affrontare, come detto, il problema dei ponti di Königsberg e il teorema di Eulero che lo risolve (discusso nel laboratorio *Quattro passi in centro*) per passare poi all'analisi di un grafo concentrando l'attenzione sulla sua connessione (anche questo è un problema che ha un laboratorio tutto per sè: *Un grafo connesso*).

Una volta chiariti questi punti, in questo laboratorio affronteremo:

» il problema di determinare il cammino più breve in un grafo *pesato*;
» la questione se in un grafo esiste o meno un circuito euleriano;
» la costruzione di un circuito euleriano (il più economico possibile) in un grafo dove un tale circuito non c'è.

E a questo punto, come per magia, tutti i pezzi si incastreranno l'uno all'altro e avremo la soluzione del problema del postino a portata di mano!

Un corso introduttivo, rigoroso e formale, sulla teoria dei grafi, può essere consultato online qui: http://web.math.unifi.it/users/casolo/dispense/Teoria_Grafi.pdf opera di Carlo Casolo e Francesco Fumagalli, dipartimento di matematica Ulisse Dini, Università degli studi di Firenze.

Il laboratorio Quattro passi incentro è disponibile sul blog del progetto: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf

1.1. Prerequisiti

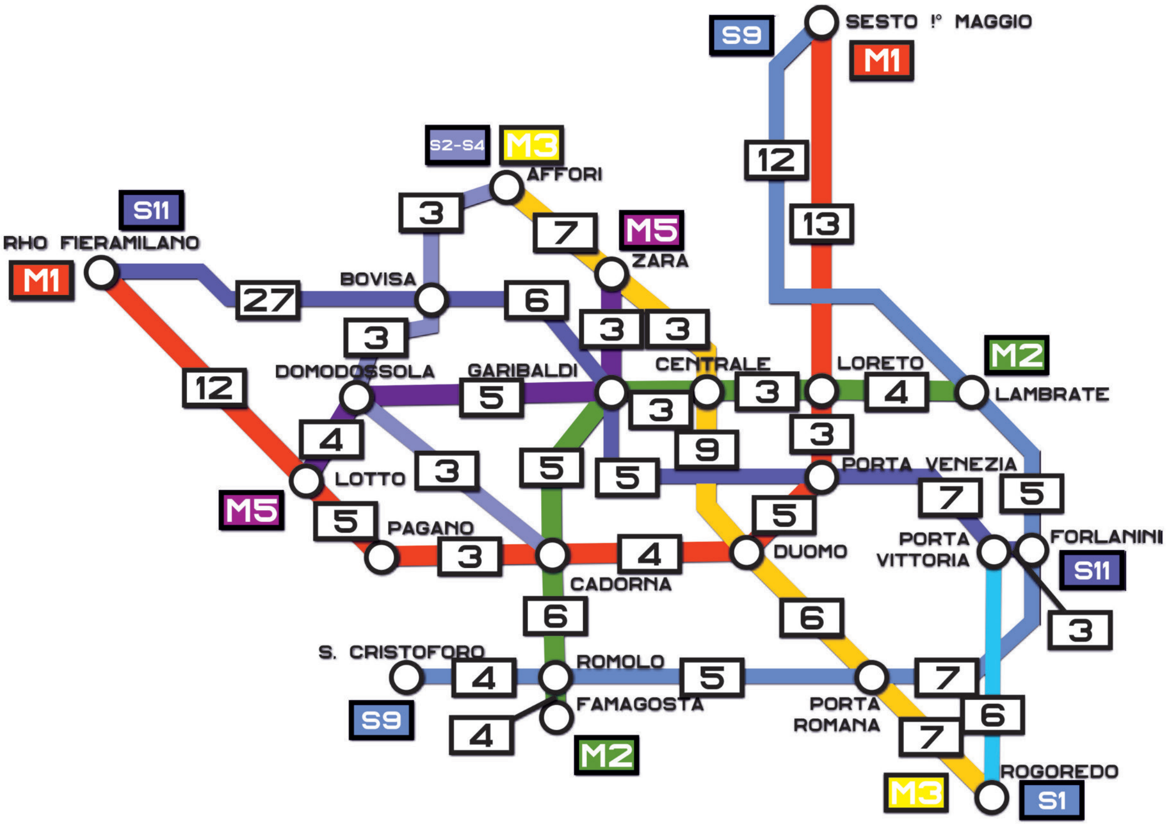
È bene aver affrontato i laboratori:

» Quattro passi in centro
» Un grafo connesso (non è strettamente necessario, ma utile sì)

1.2. Obiettivi

Lo scopo di questo laboratorio è quello di progettare un metodo per costruire in un grafo un circuito di lunghezza minima che attraversi tutti gli archi del grafo (non necessariamente una volta sola). Per farlo dovremo:

» apprendere un algoritmo per determinare il cammino più breve tra due nodi di un grafo;
» imparare a costruire un circuito euleriano in un grafo (se possibile);
» pensare a un metodo per costruire un circuito euleriano in un grafo non euleriano (in un grafo dove questo circuito proprio non c'è).



Qui accanto una rappresentazione semplificata della metropolitana di Londra. I valori racchiusi in rettangoli e associati a ogni tratto indicano il tempo di percorrenza medio in minuti per quel tratto. Questi valori potrebbero essere i pesi associati agli archi in un grafo pesato.

2. Il cammino più breve

Iniziamo allora con il primo problema (che è anche il più complesso): quello di determinare il cammino più breve tra due vertici specificati su un grafo *pesato*. È bene notare che il problema è ovviamente risolubile solo su grafi connessi (per i grafi non connessi potrebbe non esistere un cammino tra due nodi specifici).

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. 5. Introduzione alla topologia a pagina 20).

Un grafo si dice *pesato* quando a ogni arco è associato un valore (che per i nostri scopi supporremo sempre positivo o nullo) detto *peso* che indica, in qualche modo, la lunghezza dell'arco.

Per esempio, su un grafo che riporta le linee delle metropolitana di una grande città ogni arco rappresenta il percorso tra due stazioni e il *peso*, in questo caso, potrebbe rispecchiare il tempo di percorrenza. Ancora, su una carta stradale il peso di un collegamento, un arco, tra due città indicherebbe la distanza tra i due centri abitati, la lunghezza della strada che li collega.

2.1. Algoritmo di Dijkstra

L'agoritmo che useremo ricerca in un grafo connesso e non orientato il *cammino minimo* tra due nodi ed è opera del matematico e informatico olandese Edsger Dijkstra e, in poche parole, funziona più o meno così:

» Si prendono in esame tutti gli archi che partono dal nodo iniziale (che chiamiamo S per *Start*), la lunghezza del cammino dal nodo iniziale a ogni nodo raggiunto in questo modo è pari alla lunghezza dei rispettivi archi.

» Ora si sceglie il nodo, tra quelli appena raggiunti, che ha la distanza minima (sia N questo nodo) e si considerano tutti gli archi che si dipartono da N (a eccezione di quelli già presi in esame) e si calcola la distanza da S di ciascuno dei nodi (siano X_i) raggiunti in questo modo (che sarà la somma del cammino da S fino a N più il peso, la lunghezza, dell'arco da N a ciascuno degli X_i.

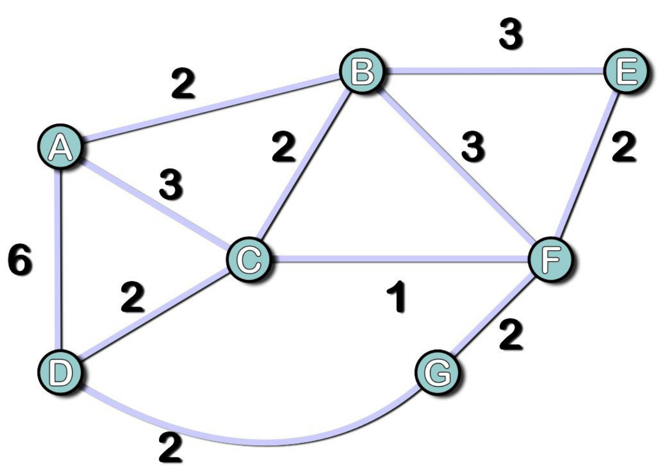
» Se a questo punto si scopre un cammino, da S a uno degli X_i che era già stato raggiunto, di lunghezza minore, il precedente cammino è eliminato (ne abbiamo trovato uno migliore).

» Si continuano a eseguire i due passi precedenti fino a quando il nodo a distanza minore è quello di arrivo: il cammino che lo congiunge a quello iniziale è il cammino minimo!

Il laboratorio Un grafo connesso è disponibile sul blog del progetto: http://researchinaction.it/materials/07-Un-grafo-connesso.pdf

2.2. Un primo esempio

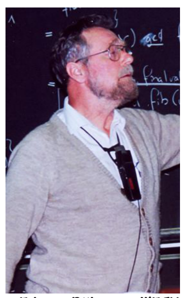
Qui di seguito è mostrato un grafo pesato. I nodi sono i circoletti azzurri (la lettera all'interno del cerchio è l'etichetta, il nome del nodo) e i collegamenti, come al solito, sono rappresentati dagli archi: il numero (in colore nero) vicino a ogni arco rappresenta il *peso* di quell'arco! Così si deduce immediatamente che, per esempio, il collegamento diretto dal nodo A al nodo D ha un *peso* pari a sei.



Cerca il cammino più breve (il cammino la cui somma dei pesi degli archi è minore) tra i nodi *A* e *G*.

Ci sei riuscito? È un piccolo grafo e quindi dovrebbe essere possibile individuare la soluzione in modo, per così dire, empirico.

Noi però siamo interessati a una solu-



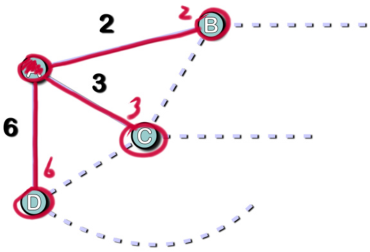
Edsger Dijkstra all'ETH di Zurigo nel 1994. Foto di Andreas F. Borchert.

La via breve

...

zione generale, a un metodo, che possa funzionare su grafi di qualsiasi dimensione. Procediamo quindi in questo modo ...

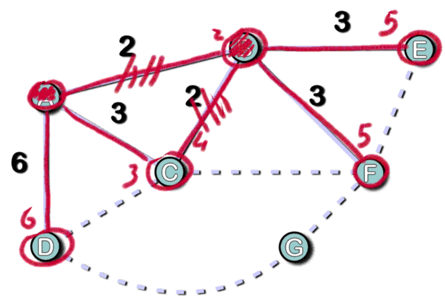
Colora il nodo di partenza *(A)*, per esempio di colore rosso e ripassa tutti gli archi che partono da *A*. Accanto a ciascuno di questi archi, vicino il nodo di arrivo, scrivi la lunghezza del percorso misurata a partire da *A*. Traccia un cerchio intorno a questi nodi.



I nodi colorati sono quelli già esaminati, quelli cerchiati i nodi attualmente in esame. In questo modo abbiamo, per ora, determinato il percorso più breve da *A* fino a *B*, *C* e *D*.

Ora concentriamo l'attenzione sul nodo tra quelli attualmente in esame che ha la distanza minore da *A*: il nodo *B*. Attenzione: se il nodo a distanza minore non ha archi ancora non analizzati va colorato di rosso (ormai è stato esaminato) e si sceglie un nuovo nodo a distanza minore.

Colora di rosso il nodo *B*. Colora in rosso anche tutti gli archi che partono da *B* e segna vicino al nodo di arrivo la lunghezza del percorso da *A* a questo nodo passando per *B*. Se c'è già un percorso che porta a uno di questi nodi, elimina (cancella, scarabocchia) il percorso più lungo dei due.



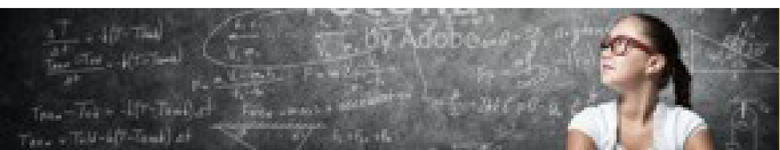
Dovresti aver notato che ci sono due percorsi (ora colorati in rosso) che collegano *A* e *C*: uno diretto, seguendo l'arco *AC*, di lunghezza 3 e l'altro passando per *B*, di lunghezza totale 4 (la lunghezza dell'arco *AB* pari a 2 più quella dell'arco dell'arco *BC* per un totale di 4). Appare chiaro che il primo è, allo stato attuale, è il percorso più breve e quindi l'arco *BC* e la corrispondente lunghezza sono cancellati: questo tratto di percorso non ci interessa perchè per collegare i due nodi ne abbiamo già uno migliore.

Di nuovo, esaminiamo il nodo, tra quelli cerchiati di rosso, che si trova a distanza minore dal nodo *A*.

Ripeti le stesse operazioni: colora di rosso il nodo scelto (segno che ormai è stato analizzato), marca in rosso gli archi che partono da questo nodo e calcola le loro distanze dal nodo di partenza. Se ci sono due o più percorsi duplicati (che portano allo stesso nodo iniziando sempre da quello di partenza) elimina archi e lunghezza di quello più lungo.

Se tutto sta andando come deve, dovresti aver trovato un nuovo percorso per il nodo *D* più breve dell'originale (che quindi va eliminato) e un altro percorso per il nodo *F* di lunghezza pari a un percorso già analizzato, quello nuovo va eliminato perchè non è migliore del precedente.

Ancora una volta: scegli il nodo più vicino al nodo di partenza, coloralo di rosso e mar-



ca in rosso anche gli archi che partono da questo e non sono ancora stati considerati. Calcola le distanze dal nodo iniziale per i nodi raggiunti da questi archi. Controlla la presenza di eventuali cammini doppi ed elimina archi e distanze di quelli più lunghi.

A questo punto ci dovrebbero essere tre soli vertici ancora in ballo, uno dei quali è proprio il punto di arrivo del nostro percorso. Attenzione: l'algoritmo termina quando il nodo a distanza minima è proprio quello di arrivo!

Ripeti ancora una volta le operazioni già viste, analizzando il nodo a distanza minore da quello di partenza.

Ricorda due cose importanti:

» se il nodo con distanza minore non ha altri archi, va segnato come analizzato e si sceglie il nodo successivo (quello la cui distanza da *A* è, a questo punto, la più corta);
» se a un certo punto il nodo a distanza minore coincide con il nodo di arrivo allora l'algoritmo è terminato!

Ora è il momento di ricavare il cammino minimo tra *A* e *G*.

Partendo dal nogo di arrivo *(G)*, segui gli archi rimanenti, nodo dopo nodo, fino ad arrivare al nodo di partenza *(A)* scrivendo da destra verso sinistra i nodi attraversati (compresi il primo e l'ultimo).

La sequenza di nodi che hai ricavato è il cammino minimo cercato!

Ma c'è di più, in realtà hai costruito il cammino minimo dal nodo *A* a qualsiasi altro nodo del grafo. Per ricavare questi cammini procedi allo stesso modo: scegli un nodo e percorri gli archi uno a uno fino ad arrivare al vertice *A* scrivendo i nodi incontrati lungo il percorso in senso inverso (dall'ultimo al primo).

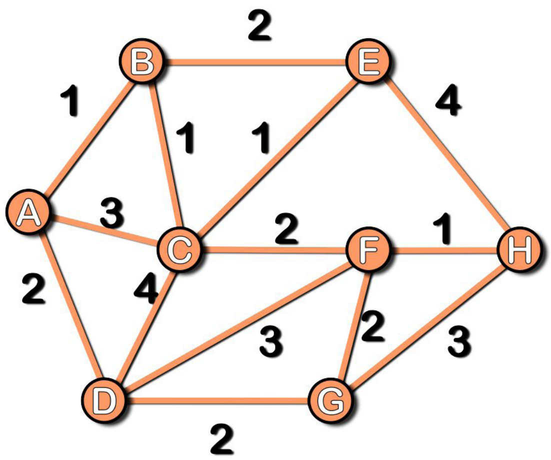
Quest'ultimo risultato è casuale, ma vedremo che, con poca fatica, si può estendere la procedura perchè, a partire dal nodo desiderato, si trovi il cammino minimo a ogni altro nodo del grafo in un colpo solo!

2.3. Un secondo esempio

Osservate il grafo pesato riportato in questa pagina. In prima battuta vogliamo trovare il cammino minimo che porti dal nodo *B* al nodo *H*, successivamente vogliamo anche i cammini minimi dallo stesso nodo *B* a ogni altro nodo del grafo. Applichiamo a questo scopo l'algoritmo di Dijkstra.

L'esplorazione del grafo inizia sempre dal nodo di partenza.

Contrassegna come analizzato (colora di rosso) il nodo B e marca gli archi che si dipartono da questo nodo. Cerchia i nodi così raggiunti e calcola la loro distanza da B.



Dal nodo B si diramano tre archi, che raggiungono i nodi A, C ed E. Il calcolo della distanza, in questo primo passo, è semplice: è pari alla lunghezza del corrispondente arco.

Quelli cerchiati sono i prossimi nodi da esaminare. Si analizza sempre quello che ha la distanza più breve dal nodo di partenza.

In caso di uguale lunghezza del percorso non ha importanza quale scegliere, diciamo che in questo nostro esempio seguiamo un criterio *alfabetico*: se dobbiamo scegliere tra due o più nodi con la stessa distanza, prendiamo in esame quello che precede gli altri in ordine alfabetico.

Scegli il nodo con la distanza minore (in caso di parità, considera quello, dei due, precedente in ordine alfabetico). Contrassegna questo nodo come già esaminato, marca gli archi che partono da qui, cerchia i nodi che raggiunti da questo arco e calcola le loro distanze dal nodo iniziale.

Ricorda che se ci sono due percorsi che collegano lo stesso vertice il più lungo dei due deve essere eliminato. Questo passo dell'algoritmo garantisce che ogni percorso rimasto sia il cammino più breve possibile tra il nodo di partenza e ogni altro vertice già esaminato.

Ripeti queste operazioni, con attenzione, fino a che il nodo in esame con la distanza minima è proprio quello di arrivo.

A questo punto si può ricostruire il cammino minimo percorrendo a ritroso gli archi rimasti fino al nodo di partenza. La lunghezza di questo cammino minimo dovrebbe essere riportata proprio accanto al punto di arrivo.

Concludiamo l'analisi del grafo per calcolare i cammini minimi da *B* a ogni altro nodo del grafo.

Continua ad applicare l'algoritmo fino a quando tutti i nodi risultano già analizzati.

Accanto a ogni nodo dovrebbe esserci ora la lunghezza del cammino più breve che lo collega al vertice B e il cammino minimo corrispondente si può ricavare percorrendo gli archi rimasti sul grafo.

Ottimo lavoro! Siamo a metà della nostra strada verso la soluzione del *Problema del postino cinese*.

Riprendiamo la mappa (che ricordiamo va letta in senso orario a partire dall'alto). Abbiamo completato un altro *step*: *Cammino più breve*!

3. Cammino euleriano

Un cammino euleriano, in termini semplici, è un percorso in un grafo che attraversa tutti gli archi del grafo una e una sola volta. Se definiamo come *grado* di un nodo in un grafo il numero di archi che si diramano dal nodo stesso, il *Teorema di Eulero* garantisce l'esistenza di un cammino euleriano nel caso in cui ci siano esattamente zero o due nodi di grado dispari.

Il laboratorio Quattro passi in centro affronta il problema di determinare un cammino euleriano in un grafo: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf

Se il cammino euleriano inizia e finisce nello stesso nodo allora abbiamo un *circuito euleriano*, un percorso chiuso che attraversa tutti gli archi del grafo una e una sola volta. Se è possibile costruire un circuito euleriano, il grafo è detto esso stesso *euleriano*. È importante notare che in un grafo euleriano il Problema del postino cinese diventa quasi banale!

Attenzione, se non lo avete già fatto a questo punto serebbe molto utile affrontare il laboratorio *Quattro passi in centro* che discute proprio questo teorema e affronta il problema dell'esistenza di un cammino euleriano.

3.1. Costruire un cammino euleriano

Per nostra fortuna, costruire un cammino euleriano, in un grafo ove questo è possibile, è un'operazione piuttosto semplice. In pratica:

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. 5. Introduzione alla topologia a pagina 20). In particolare i cammini euleriani sono discussi in 5.3 Cammini e circuiti a pagina 22.

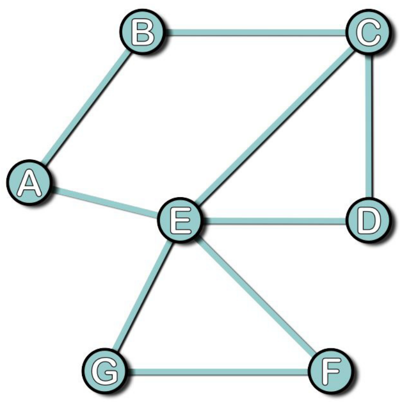
- » Si sceglie un nodo di grado dispari come nodo iniziale. Se il grafo è euleriano non ci sono vertici di grado dispari ma in questo caso si può partire da un nodo qualunque!
- » Si sceglie casualmente un arco (che non sia già stato attraversato) e ci si sposta sul nodo successivo fino a quando non si può andare più avanti (perchè si arriva in un nodo da cui non partono archi o da cui si diramano solo archi già attraversati).
- » Se a questo punto sono rimasti fuori degli archi , si ripete il procedimento iniziando da uno dei nodi già attraversati (chiamiamo *n* questo nodo) da cui parte un arco libero, non ancora incluso nel nostro cammino.
- » Si procede in questo modo fino a quando non abbiamo incluso nel cammino tutti gli archi del grafo.
- » Per concludere: si uniscono i diversi cammini costruiti percorrendo il primo fino al nodo *n*, poi il secondo fino a tornare a *n* e poi proseguendo per il primo cammino.

3.2. Proviamo!

Proviamo a costruire un cammino euleriano nel grafo presentato in questa pagina. Per prima cosa dobbiamo controllare che questa operazione sia possibile, per fortuna abbiamo a disposizione il teorema di Eulero.

Analizza il grado di ciascun nodo del grafo e decidi se è possibile costruire un cammino (o un circuito) euleriano.

Ricorda che il grado di un nodo è il numero degli archi che hanno per estremo quel nodo e che se ci sono esattamente due nodi di grado dispari allora c'è un circuito euleriano mentre se non ci sono nodi di grado dispari è possibile costruire un circuito euleriano (ma anche anche un cammino euleriano).



Scegli un nodo di grado dispari (se presente, altrimenti un nodo qualsiasi).

Questo sarà il nodo di partenza del cammino euleriano.

La via breve

...

Ora scegli un arco a caso a partire dal nodo selezionato e spostati sul nodo successivo. Procedi in questo modo, sempre scegliendo un arco a caso che non sia già stato attraversato, fino a quando non è più possibile procedere.

Sarà bene munirsi di un pennarello e marcare in qulche modo gli archi già attraversati (per esempio ripassando con il pennarello l'arco e magari indicando con una freccia il verso di percorrenza).

Ci sono ancora archi che non sono stati attraversati? Se sì, scegli un nodo collegato a uno di questi archi e ripeti le stesse operazioni (scegli a caso un arco non ancora esaminato che ha per estremo un nodo già attraversato, spostati sul nodo successivo, ...).

In questo modo hai costruito un secondo cammino che percorre alcuni o tutti gli archi ancora da aggiungere. Potrebbe essere utile usare pennarelli di colore differente per ogni cammino che viene costruito in questo modo.

Di nuovo, ci sono ancora archi non attraversati? Se sì, ripeti il punto precedente.

Dopo un numero finito di passi avrai costruito uno o più cammini che *coprono* l'intero grafo. Se il cammino è uno solo il lavoro è terminato: questo è il cammino euleriano cercato!

Se hai costruito più di un cammino devi unirli in uno solo.

Percorri il grafo partendo dal nodo che avevi scelto come iniziale. Ogni volta che ti trovi in un nodo da cui parte un cammino diverso, segui questo nuovo cammino fino a che non ti riporta nello stesso nodo (quello da cui hai iniziato la diramazione), poi prosegui nel cammino originale. Annota via via gli archi attraversati.

Se hai usato pennarelli di colore diverso per ogni cammino questa operazione sarà più semplice. Al termine avrai il tuo cammino euleriano!

Ancora un passo avanti lungo la nostra strada verso la soluzione del *Problema del postino cinese*: ora sappiamo anche costruire un circuito euleriano!

4. E se non c'è un cammino euleriano?

Un cammino meglio, un circuito euleriano, risolve praticamente da solo il Problema del postino cinese. Ma non tutti i grafici sono euleriani e in questi casi (che sono la maggior parte) come si fa?

Se il grafo non è euleriano il motivo è uno solo: ci sono (troppi) nodi di grado dispari! Per risolvere il nostro problema dobbiamo trasformare i collegamenti in modo che tutti i nodi siano di grado pari allora se il grafo non è euleriano lo trasformiano, lo *forziamo*, in grafo euleriano aggiungendo cammini *a vuoto*. Un cammino *a vuoto* è un cammino che collega due nodi di grado dispari ripercorrendo archi già attraversati, il problema è aggiungere cammini a vuoto che nel complesso siano minimi tra tutti quelli possibili, più brevi, maggiormente economici.

La procedura può inizialmente sembrare complessa ma è davvero geniale:

» Si crea un nuovo grafo pesato (in un certo senso, un *metagrafo*) che ha per nodi i soli nodi di grado dispari del grafo originale e archi di peso pari ai cammini minimi tra ogni coppia di nodi di grado dispari.
» Si cerca di accoppiare i nodi in questo nuovo grafo in modo da avere un cammino totale minimo (problema di *accoppiamento* o di *trasporto ottimo*).
» Nel grafo originale si aggiungono cammini a vuoto corrispondenti ai cammini minimi trovati, questi sono i cammini e vuoto di cui parlavamo.

Se colleghiamo tra di loro coppie di nodi di grado dispari, questi diventano di grado pari e ora il grafo è euleriano! Grande!

In pratica, ritornando al problema reale della consegna della posta, il nostro postino non potrà percorrere tutte le strade una sola volta: in alcune dovrà tornare indietro, ripercorrendole in senso inverso (è questo il significato dei cammini a vuoto) ma questa strada *in più* sarà sempre la meno onoerosa possibile.

Esula un poco dgli scopi di questo laboratorio (però potrebbe essere uno spunto per un approfondimento) ma è abbastanza facile dimostrare che in un grafo connesso i nodi di grado dispari sono sempre in numero pari (2, 4, ...). E quindi l'accoppiamento di cui si parla nel testo è sempre possibile.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf descrive e definisce le nozioni principali della teoria dei grafi. In particolare, le definizioni relative ai grafi pesati si trovano a pagina 23: (cfr. 5.4 Grafi pesati a pagina 23).

4.1. Aiutiamo il postino

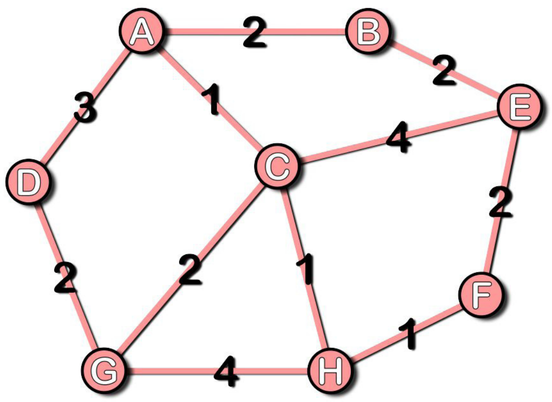
Proviamo a risolvere un problema di consegne specifico. Il grafo che modellizza la situazione è mostrato in questa stessa pagina: ogni nodo rappresenta un incrocio e ogni arco una strada. Il valore presente sugli archi, il *peso* del collegamento, misura la lunghezza della via (o il tempo di percorrenza). Vogliamo costruire un circuito, un percorso chiuso, che permetta di attraversare tutti gli archi una sola volta, ma se questo non è possibile, vogliamo che, perlomeno, il circuito, anche ripassando due volte sulle stesse strade, sia il più breve (economico) possibile.

13

Analizza il grafo, usa il teorema di Eulero e decidi se è euleriano, cioè se è possibile costruire un circuito che attraversa gli archi una sola volta. Se è così usa la procedura per costruire un circuito euleriano.

Nel primo caso abbiamo già il percorso per il postino: un circuito euleriano percorre tutte le strade e ha, ovviamente, un costo minimo, perchè ognuna di queste è attraversata una sola volta.

Se il grafo non è euleriano, contrassegna in qualche modo i nodi di grado dispari.



La via breve

...

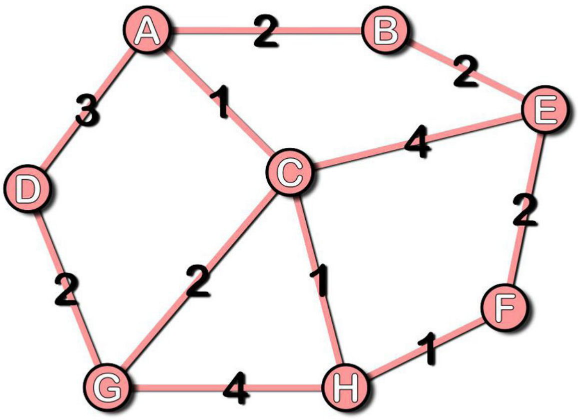
Ricorda che è proprio la presenza di questi nodi (quelli di gradi dispari) a impedire una facile soluzione. Puoi usare ancora il pennarello rosso che ci è stato di aiuto più volte, cerchia i nodi problematici.

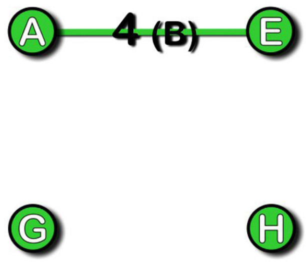
Ora determina per ogni coppia di nodi di grado dispari un cammino minimo che li congiunga e calcola la lunghezza di ognuno di questi cammini minimi.

Puoi usare la procedura appresa in precedenza **(cfr. 2. Il cammino più breve a pagina 7)** o magari, visto che il grafo non è troppo complesso, anche un procedimento più empirico e veloce. Una volta conclusa questa operazione, abbiamo tutte le informazioni che ci servono per risolvere il problema.

Costruisci un nuovo grafo, diverso e separato dal primo. Questo grafo avrà per nodi i soli nodi di grado dispari del grafo originale. Collega a due a due i nodi del nuovo grafo e assegna a ogni arco la lunghezza del cammino minimo tra i due vertici considerati.

Può essere utile annotare accanto a ogni arco, oltre alla lunghezza, anche il o i nodi che attraversa per essere in grado di associare a ogni arco nel nuovo grafo il corrispondente cammino nel grafo originale. Di seguito, in questa stessa pagina, abbiamo riportato il grafo originale (sulla sinistra, in colore rosa) e l'abbozzo del secondo grafo in cui abbiamo già inserito i nodi di grado dispari (con le loro etichette) e un primo arco, quello che collega il vertice A con E. Il numero riportato sull'arco sta a indicare la lunghezza del cammino minimo tra questi due nodi mentre la lettera ricorda per quali nodi si sviluppa il cammino minimo (in questo caso il cammino mminimo a cui facciamo riferimento è ABE la cui lunghezza è pari a 4).





Il nuovo grafo ci servirà per *scegliere* la soluzione. Dobbiamo trovare nuovi cammini che colleghino coppie di nodi di grado dispari (che, se collegati a due a due, diverranno di grado pari) in modo che questi cammini aggiunti abbiano un costo più basso possibile.

Analizza ora il secondo grafo. Cerca di accoppiare i nodi in modo che la somma dei due archi utilizzati (un arco per la prima coppia e un altro arco per la seconda coppia) abbia la lunghezza minima possibile.

Chiariamo meglio questo punto. Il secondo grafo riporta tutti i cammini minimi tra i quattro nodi di grado dispari. Vogliamo collegare, nel grafo originale, a due a due questi nodi aggiungendo dei nuovi archi in modo che la lunghezza totale degli archi appena inseriti sia minimo. Per farlo, nel *metagrafo*, cerca di accoppiare i nodi in modo che la somma dei pesi degli archi che li congiungono sia la più piccola possibile!

In questo modo hai calcolato due cammini a vuoto la cui lunghezza è, complessivamente, la più breve. Aggungendo al grafo originale questi cammini come archi in più avremo un grafo euleriano al minor costo possibile.

Inserisci nel grafo originale alcuni archi (e le relative lunghezze) in modo da aggiungere i cammini minimi selezionati. Questo anche se, ovviamente, tali cammini già esistono.

In altre parole, devi *raddoppiare* alcuni archi del grafo, quelli che corrispondono ai cammini minimi che abbiamo scelto, mantenendo la stessa lunghezza degli archi originali. Il nuovo arco indica che il nostro amico postino dovrà percorrere quel tratto di strada due volte!

Il processo non è proprio semplice, ma se tutto è andato come deve ora hai un grafo in cui tutti i nodi hanno grado pari. In pratica hai trasformato il grafo originale in un grafo euleriano.

Ora sei in grado di costruire il percorso più economico per la consegna della posta!

Verifica che il grafo è euleriano (usando sempre il teorema di Eulero). Scegli un nodo come inizio del percorso e costruisci un circuito euleriano che inizi e finisca nel nodo selezionato.

Il nodo che hai scelto corrisponde all'ufficio postale. Il postino, per consegnare la posta senza percorrere nemmeno un metro di troppo, deve partire dall'ufficio postale e seguire, arco per arco, strada per strada, il percorso che gli hai suggerito fino a tornare al punto di partenza. Il problema è risolto!

È affascinante, di questa strategia, il fatto che per risolvere un problema su un grafo (un percorso minimo che attraversi tutti gli archi) si utilizzi come strumento un altro grafo (ecco perchè abbiamo chiamato *metagrafo* il grafo associato, quello con i soli nodi di grado dispari)!

Ora la strada è completa: abbiamo una strategia per risolvere il famoso *Problema del postino cinese*. L'ultimo tassello che mancava era la costruzione di un circuito euleriano in un grafo dove un circuito del genere non c'è!

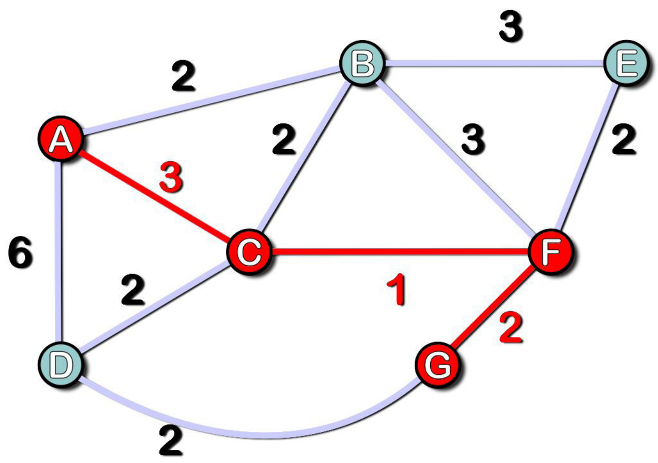
5. Il cammino più breve

5.1. Un primo esempio

Cerca il cammino più breve (il cammino la cui somma dei pesi degli archi è minore) tra i nodi *A* e *G*.

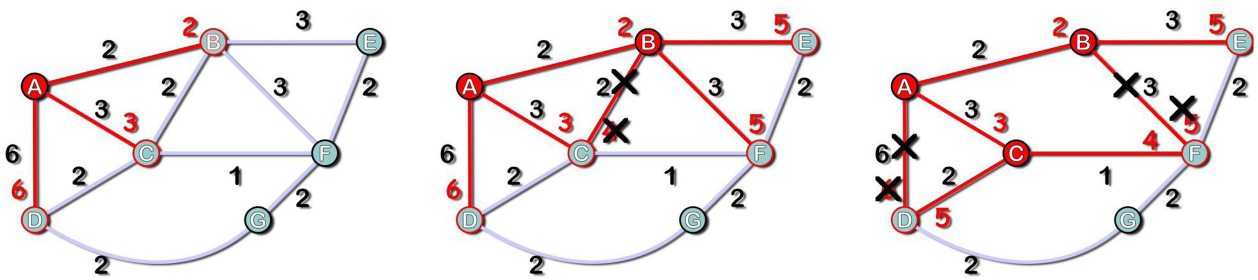
Il grafo non è troppo complesso, quindi con un po' di pazienza la soluzione si può trovare per tentativi. Dopo qualche minuto ci si accorge che il cammino più breve è quello che, partendo da *A*, passa per i nodi *C* ed *F* fino ad arrivare a *G*. La lunghezza è pari a sei (la somma delle lunghezze dei tre archi del cammino minimo).

La soluzione è mostrata nella figura qui accanto in cui i nodi e gli archi del cammino minimo sono stati colorati in rosso.



Colora il nodo di partenza *(A)*, per esempio di colore rosso e ripassa tutti gli archi che partono da *A*. Accanto a ciascuno di questi archi, vicino il nodo di arrivo, scrivi la lunghezza del percorso misurata a partire da *A*. Traccia un cerchio intorno a questi nodi.

La prima figura a sinistra qui sotto mostra la situazione: il nodo A è stato esaminato (colorato di rosso) e ora ci accingiamo ad analizzare i nodi B, *C* e *D* (sono evidenziati da un cerchio rosso). Il nodo tra questi più vicino al nodo di partenza è *B* (la sua distanza è 2, per gli altri è 3 o 6).



Colora di rosso il nodo *B*. Colora in rosso anche tutti gli archi che partono da *B* e segna vicino al nodo di arrivo la lunghezza del percorso da *A* a questo nodo passando per *B*. Se c'è già un percorso che porta a uno di questi nodi, elimina (cancella, scarabocchia) il percorso più lungo dei due.

La seconda figura da sinistra qui sopra mostra quanto fatto. Il nodo *B* è stato analizzato e quindi colorato in rosso. Vicino a ogni nuovo nodo raggiunto a passando per *B* è mostrata, in rosso, la lunghezza del percorso a partire da A; per esempio, per calcolare la distanza tra A ed E si somma la lunghezza del cammino fino a B (2) con la lunghezza dell'arco, appena aggiunto al cammino, che va da B a E (3).

In questo modo abbiamo costruito un secondo cammino che va da A a C, questa volta passando per B. Questo cammino è più lungo di quello diretto quindi l'arco BC (quello appena aggiunto) e la corrispondente lunghezza sono cancellati (fai caso, infatti, che quest'arco non è presente nella figura successiva, quella più a destra).

A questo punto abbiamo quattro nodi da esaminare: C, D, E ed F (i quattro vertici cerchiati di rosso). Il più vicino al nodo di partenza è C (la sua distanza è pari a 3) ed è questo su cui dobbiamo focalizzare la nostra attenzione.

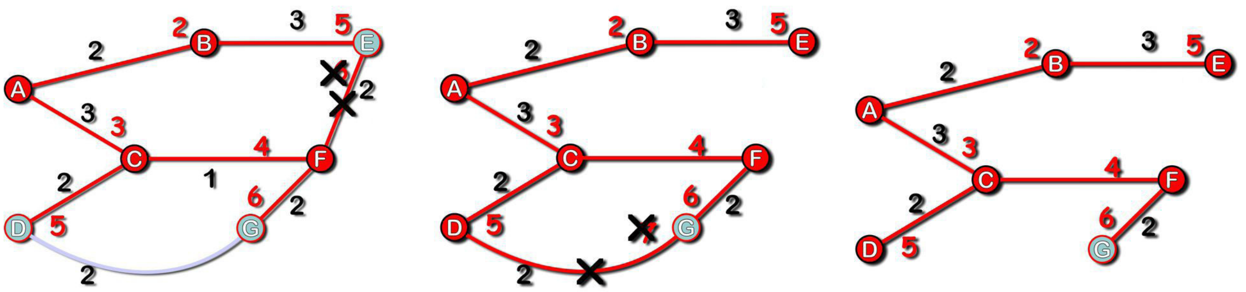
Ripeti le stesse operazioni: colora di rosso il nodo scelto (segno che ormai è stato analizzato), marca in rosso gli archi che partono da questo nodo e calcola le loro distanze dal nodo di partenza. Se ci sono due o più percorsi doppi (che portano allo stesso nodo iniziando sempre da quello di partenza) elimina archi e lunghezza di quello più lungo.

Come detto analizziamo il nodo C: lo coloriamo di rosso e coloriamo anche i due archi rimasti che partono proprio da C (e conducono a F e D), calcoliamo la lunghezza del cammino da A ad F sommando alla lunghezza AC la misura dell'arco CF. Si ottiene un cammino di lunghezza 4 che è più breve di quello costruito in precedenza (che passava per B e che era lungo 5) per cui quest'ultimo percorso è eliminato (o meglio, è eliminato l'ultimo arco aggiunto al cammino: BF). La situazione è mostrata nell'ultima figura, quella più a destra nella pagina precedente.

Anche per D abbiamo un nuovo cammino che che passa per C. In questo caso il precedente percorso (diretto) da A a C è più lungo e quindi eliminato (cancelliamo l'ultimo arco del cammino: AD).

Ancora una volta: scegli il nodo più vicino al nodo di partenza, coloralo di rosso e marca in rosso anche gli archi che partono da questo e non sono ancora stati considerati. Calcola le distanze dal nodo iniziale per i nodi raggiunti da questi archi. Controlla la presenza di eventuali cammini doppi ed elimina archi e distanze di quelli più lunghi.

Ci sono tre nodi da esaminare: D, E ed F. Quello con distanza minore da A è F, quindi lo coloriamo di rosso e tracciamo nello stesso colore i due archi che (da F) portano a E e G. Il nuovo cammino che va da A a E è più lungo del precedente (passante per B) e quindi eliminiamo l'arco FE. La prima figura a sinistra qui di seguito mostra lo stato del processo in questo momento.



Ripeti ancora una volta le operazioni già viste, analizzando il nodo a distanza minore da quello di partenza.

Ormai ci siamo, abbiamo tre nodi sotto esame, due dei quali hanno lunghezza più breve (5), analizziamo E dal quale, però, non partono più archi per cui lo contrassegniamo come già esaminato (e lo coloriamo di rosso). Passiamo a D, troviamo un cammino che porta a G più lungo (7) rispetto al precedente (6) e quindi cancelliamo l'arco DG (vedi la figura centrale qui sopra).

Rimane da esaminare solo il nodo *G*, ma non ci sono altri archi da considerare per cui lo coloriamo di rosso e l'algoritmo è terminato (vedi la figura più a destra nella pagina precedente). L'unico percorso rimasto che collega il nodo di partenza *(A)* con il nodo di arrivo *(G)* è il cammino minimo cercato!

Partendo dal nodo di arrivo *(G)*, segui gli archi che sono rimasti nel grafo, nodo dopo nodo, fino ad arrivare al nodo di partenza *(A)* scrivendo da destra verso sinistra i nodi attraversati (compresi il primo e l'ultimo).

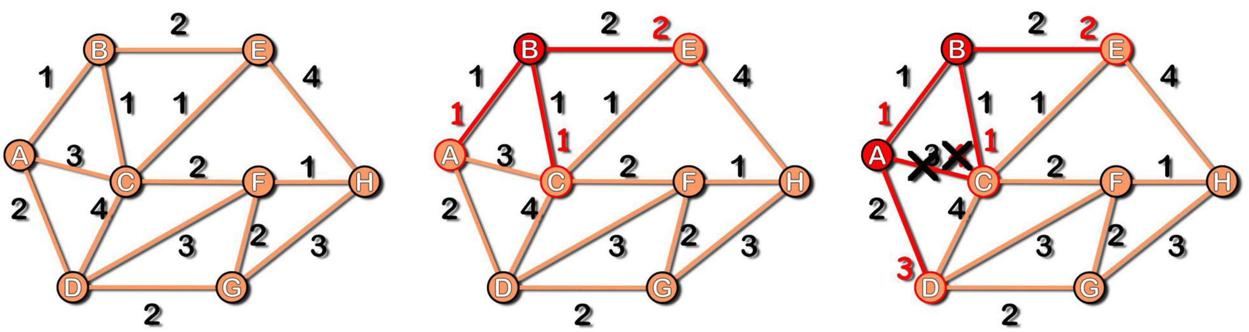
Come detto, nel grafo è rimasto un solo cammino che porta dal nodo di partenza *(A)* a quello di arrivo *(G)* e passa per i vertici *C* ed *F*. Il cammino più breve è *ACFG* di lunghezza 6!

Osservando l'ultima figura della pagina precedente, quella più a destra, si vede subito che gli archi rimasti costruiscono cammini minimi dal noda *A* a qualsiasi altro nodo del grafico. Ottimo!

5.2. Un secondo esempio

Contrassegna come analizzato (colora di rosso) il nodo B e marca gli archi che si dipartono da questo nodo. Cerchia i nodi così raggiunti e calcola la loro distanza da B.

Dal nodo *B* (l'inizio del nostro percorso) si diramano tre archi, che raggiungono i nodi *A*, *C* ed *E*. Il calcolo della distanza, in questo primo passo, è semplice: è pari alla lunghezza del corrispondente arco. Nella figura qui sotto, a sinistra il grafo originale, al centro la situazione dopo il primo passo della procedura.



Scegli il nodo con la distanza minore (in caso di parità un criterio vale l'altro, diciamo che seguiamo l'ordine alfabetico). Contrassegna questo nodo come già esaminato, marca gli archi che partono da qui, cerchia i nodi raggiunti dagli archi appena contrassegnati e calcola le loro distanze (dei vertici) dal nodo iniziale.

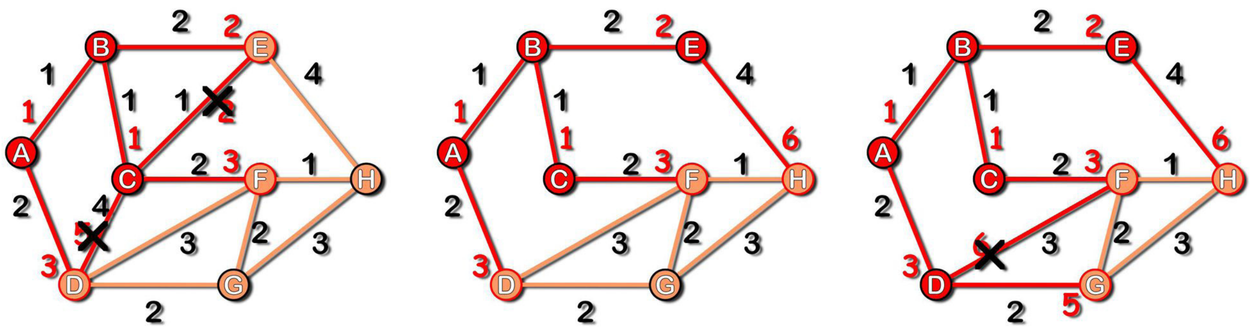
La figura più a destra qui sopra mostra la situazione dopo aver esaminato il nodo *A*. Notare che il nuovo percorso *BAC* è più lungo di quello già esistente *(BC)* e quindi l'arco appena considerato *(AC)* è eliminato.

Ripeti queste operazioni, con attenzione, fino a che il nodo in esame con la distanza minima è proprio quello di arrivo.

Proseguiamo analizzando il nodo *C* (figura più a sinistra, in alto nella pagina successiva). I due nuovi percorsi, verso i vertici *D* ed *E*, non sono più brevi di quelli già esistenti e quindi gli archi *CD* e *CE* sono cancellati dal grafo. Ricordate che, per ogni nodo raggiunto dalla procedura, la distanza del cammino che lo collega al vertice iniziale è indicata dal numero in colore rosso!

Adesso è il nodo *E* che, tra quelli in esame, ha la distanza più breve (figura centrale in alto nella pagina successiva). C'è un solo arco, che conduce al nodo *H* e che ci permette di costruire un cammino (a partire dal nodo iniziale) di lunghezza 6.

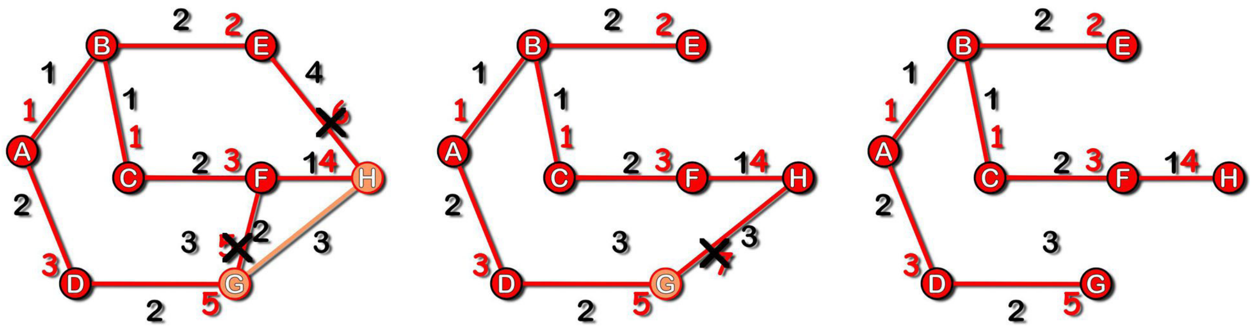
In pratica, l'algoritmo di Dijkstra a ogni passo della procedura costruisce nuovi cammini a partire dal nodo più vicino alla partenza e li confronta con quelli già esistenti. Quando viene scartato un percorso è perchè c'è una strada più breve che porta allo stesso punto e quindi siamo sicuri che quello che viene scartato non ci servirà più. In questo modo non sono analizzati tutti i possibili percorsi dal vertice iniziale a ogni altro nodo, ma solo quelli *ragionevoli*!



Abbiamo ora due nodi con la stessa distanza minima (3), scegliamo, sempre seguendo un criterio alfabetico, il nodo *D* (figura più a destra qui sopra). Il nuovo cammino che conduce a F è più lungo di quello già esistente per cui cancelliamo l'arco *DF*.

A questo punto è il nodo *F*, tra quelli da esaminare, che ha la distanza minore con *B* (figura più a sinistra di seguito). Ne viene un cammino fino ad *H* più breve (4) di quello passante per il nodo *E* (6), quindi cancelliamo il lato *EH*.

Rimangono due nodi: *G* e *H*, ma quest'ultimo ha la distanza minore e quindi, essendo il vertice di arrivo, abbiamo concluso la procedura, il cammino più breve è *BCFH* di lunghezza 4 (figura centrale qui sotto)!



20

Continua ad applicare l'algortimo fino a quando tutti i nodi risultano già analizzati.

Malgrado il risultato ottenuto, decidiamo di proseguire analizzando il nodo *H* ma il nuovo percorso che conduce al nodo *G* è più lungo di quello già costruito, per cui cancelliamo l'arco *HG*. L'ultimo nodo rimasto è *G* ma non ci sono altri archi da analizzare e quindi l'algoritmo termina qui.

Quello che rimane è la mappa di tutti i cammini minimi da *B* a ogni altro nodo del grafo (figura più a destra qui sopra). Ben fatto!

6. Cammino euleriano

6.1. Proviamo!

Analizza il grado di ciascun nodo del grafo e decidi se è possibile costruire un cammino (o un circuito) euleriano.

Usiamo il teorema di Eulero: in un grafo si può costruire un *cammino* euleriano se il numero di nodi di grado dispari è pari a due, un *circuito* euleriano se tutti i nodi hanno grado pari. Nel nostro grafo (mostrato nella figura più a sinistra qui di seguito) il nodo *C* ha grado 3, il nodo *E* grado 5, tutti gli altri nodi hanno grado 2 quindi sì, è possibile costruire un cammino che attraversi tutti gli archi una sola volta ma questo cammino non sarà un circuito: dovrà iniziare da uno dei nodi dispari e finire nell'altro (dispari).

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf descrive e definisce le nozioni principali della teoria dei grafi. In particolare, le definizioni relative cammini e circuiti si trovano a pagina 22: (cfr. 5.3 Cammini e circuiti a pagina 22).

Scegli un nodo di grado dispari (se presente, altrimenti un nodo qualsiasi).

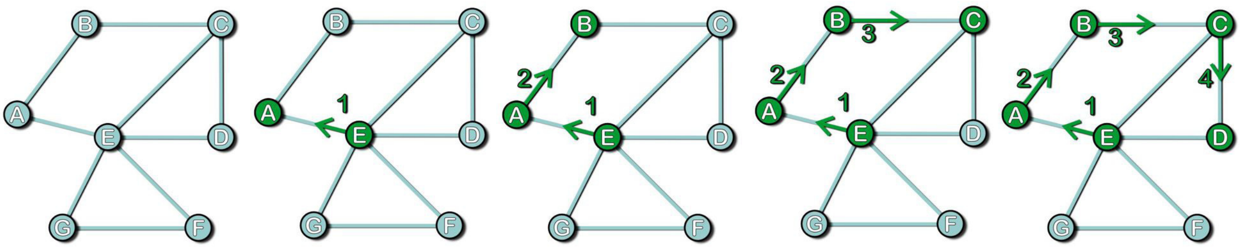
Come detto, ci sono due nodi di grado dispari, scegliamo il nodo *E* (ma potevamo scegliere anche *C*, il vertice dal quale iniziare è assolutamente indifferente).

Ora scegli un arco a caso a partire dal nodo selezionato e spostati sul nodo successivo. Procedi in questo modo, sempre scegliendo un arco a caso che non sia già stato attraversato, fino a quando non è più possibile procedere.

Il laboratorio Quattro passi incentro (http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf) affronta il problema dell'esistenza di un cammino euleriano in un grafo.

Per spostarci da *E* abbiamo cinque possibilità, scegliamo di andare verso il nodo *A*. Una volta su *A* la strada è obbligata fino al vertice *C*, dove abbiamo due sole possibilità: verso *D* o tornare su *E* (l'arco *BC* non si considera perchè già utilizzato). Scegliamo di andare verso *D*. Questa prima parte del cammino è mostrata nelle figure qui sotto (la prima a sinistra mostra il grafo originale, le altre i vari spostamenti, indicati da frecce di colore verde, con lo stesso colore sono evidenziati i nodi via via attraversati).

Arrivati sul vertice *D* non possiamo far altro che tornare in *E* (vedi la prima figura a sinistra in alto nella pagina successiva) e poi spostarci sul vertice *C*. A questo punto non possiamo procedere oltre: tutti gli archi che partono dal ... o arrivano al nodo *C* sono stati già usati (vedi la seconda figura da sinistra nella pagina successiva).



Ci sono ancora archi che non sono stati attraversati? Se sì, scegli un nodo collegato a uno di questi archi e ripeti le stesse operazioni (scegli a caso un arco non ancora esaminato che ha per estremo un nodo già attraversato, spostati sul nodo successivo, ...).

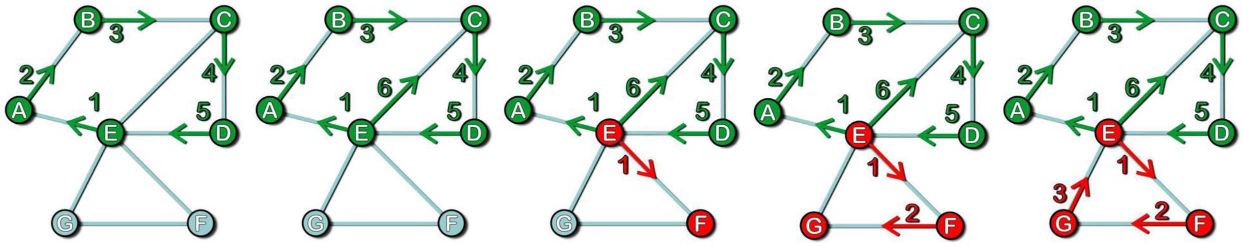
Ci accorgiamo, però, che ci sono ancora archi (tre per la precisione) che non sono stati attraversati, due dei quali hanno *E* come estremo.Quindi, ripartiamo da *E*, scegliamo di seguire l'arco *EF* (l'altra possibilità era attraversare l'arco *EG* ma avremmo ottenuto lo stesso cammino), poi *G* per tornare in *E*. Questo percorso è tracciato, nelle tre figure a destra della pagina qui accanto, in colore rosso, con lo stesso colore abbiamo evidenziato i nodi attraversati.

La via breve

...

Di nuovo, ci sono ancora archi non attraversati? Se sì, ripeti il punto precedente.

A questo punto ci accorgiamo che abbiamo attraversato tutto gli archi del grafo, quindi il processo è terminato. Non ci resta che formalizzare, esplicitare, il cammino.



Percorri il grafo partendo dal nodo che avevi scelto come iniziale. Ogni volta che ti trovi in un nodo da cui parte un cammino diverso, segui questo nuovo cammino fino a che non ti riporta nello stesso nodo (quello da cui hai iniziato la diramazione), poi prosegui nel cammino originale. Annota via via gli archi attraversati.

Partiamo da E e seguiamo per prima cosa le frecce di colore verde, il cammino è *EABCDE* (fate riferimento all'ultima figura a destra qui sopra). Qui ci fermiamo (non percorriamo l'arco EC) perchè in questo nodo inizia (e termina) un diverso cammino (quello che abbiamo evidenziato in rosso).

Seguiamo allora questa nuova strada (indicata, come detto, dalle frecce di colore rosso). Il cammino diventa *EABCDEFGE*. Poco dopo, tornati in E, riprendiamo il tracciato lasciato in sospeso (quello in colore verde) e quindi *EABCDEFGEC* (il colore delle lettere dovrebbe aiutare a seguire la traccia nella figura in alto a destra).

Si verifica facilmente che questo cammino attraversa tutti gli archi, e ciascuno una sola volta. È proprio il cammino euleriano cercato!

In pratica, dal punto di vista di un postino o di un corriere, un grafo euleriano è un *buon grafo* perchè è relativamente facile percorrere tutti gli archi una e una sola volta. Tutt'al più si tratta, una volta terminato l'itinerario, di tornare al punto di partenza (con ogni probabilità l'ufficio postale o il deposito del corriere). Nell'esempio appena visto il postino inizierebbe il suo giro dal nofo *F* ritrovandosi, alla fine del giro, nel nodo *C*. Quindi sarebbe sufficiente percorrere l'arco *CF* per tornare al punto di partenza.

A un'attento osservatore non possono sfuggire due problemi:

» Dal punto di vista economico (di lunghezza dell'itinerario o di tempo di percorrenza), la scelta di come percorrere il grafo non è indifferente. Per esempio, si potrebbe cercare di ridurre al minimo lo spostamento necessario per tornare *alla base* una volta completato il giro.
» Ma il problema vero è come fare, quale strategia scegliere, se il grafo non è euleriano. In questo caso non è possibile costruire un percorso che attraversi tutti gli archi una e una sola volta, sarà necessario ripercorrere alcuni tratti, alcune strade, senza vera utilità visto che la posta, in quella via, è stata consegnata al primo passaggio.

La risposta a questi problemi è nel prossimo paragrafo!

7. E se non c'è un cammino euleriano?

7.1. Aiutiamo il postino

Analizza il grafo, usa il teorema di Eulero, e decidi se è euleriano, cioè se è possibile costruire un circuito che attraversa gli archi una sola volta. Se è così usa la procedura per costruire un circuito euleriano.

Il grafo ha quattro nodi di grado 3 (quindi di grado dispari), sono A, E, G e H. Quindi è impossibile costruire un cammino che attraversi tutti gli archi una sola volta, tantomeno un circuito. Per *consegnare la posta*, dovremo obbligatoriamente ripassare due volte su alcune strade (archi) ma cercheremo di ridurre al minimo questo sperpero di risorse!

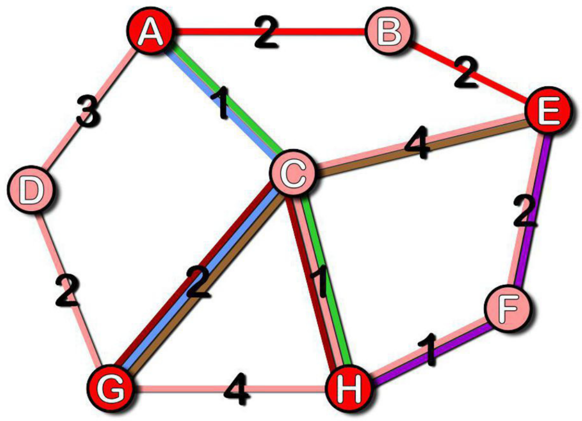
Il laboratorio Quattro passi in centro (http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf) affronta il problema dell'esistenza di un cammino euleriano in un grafo.

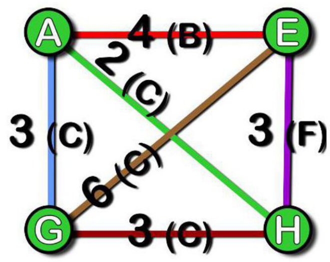
Se il grafo non è euleriano, contrassegna in qualche modo i nodi di grado dispari.

Vedi la figura qui sotto a sinistra. Come detto i nodi incriminati sono A, E, G e H.

Ora determina per ogni coppia di nodi di grado dispari un cammino minimo che li congiunge e calcola la lunghezza di ognuno di questi cammini minimi.

Abbiamo sei possibili coppie di nodi e quindi dobbiamo trovare altrettanti cammini minimi. Il grafo è piuttosto semplice e possiamo procedere in modo empirico. Nella figura a sinistra qui di seguito abbiamo tracciato in colori differenti i sei cammini minimi tra i nodi di grado dispari (per esempio, il cammino minimo tra il vertice G e il nodo H è in colore rosso scuro e passa per il vertice C mentre quello tra E ed H è in colore viola e attraversa il nodo F).





Costruisci un nuovo grafo, diverso e separato dal primo. Questo grafo avrà per nodi i soli nodi di grado dispari del grafo originale. Collega a due a due i nodi del nuovo grafo e assegna a ogni arco la lunghezza del cammino minimo tra i due vertici considerati.

Il (meta)grafo è mostrato qui sopra, a destra. Abbiamo riportato i quattro nodi (del grafo originale, a sinistra) di grado dispari (la disposizione non è importante) e li abbiamo collegati a due a due con un arco. Su ciascuno di questi archi abbiamo riportato la lunghezza totale del relativo cammino minimo e, per comodità, anche un eventuale altro nodo attraversato da questo cammino minimo. Per facilitare la lettura gli archi nel grafo di destra hanno lo stesso colore dei cammini minimi del grafo di sinistra.

Rifacendoci all'esempio di poco fa, nel (meta)grafo l'arco GH è rosso scuro perchè il cammino minimo da G ad H è di questo colore. L'etichetta di questo arco è 3 *(C)* a indicare che il corrispondente cammino minimo è di lughezza 3 e passa per il nodo C.

La via breve

...

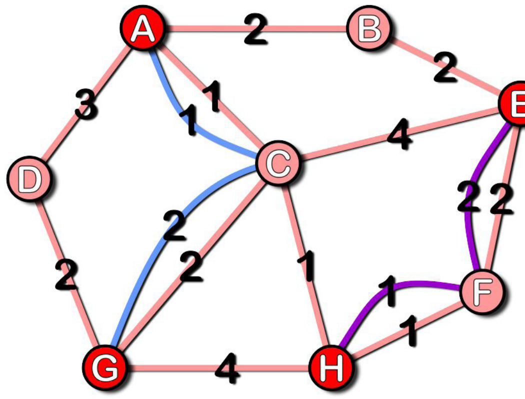
Analizza ora il secondo grafo. Cerca di collegare a due a due i nodi in modo che la somma dei due archi utilizzati (un arco per la prima coppia e un altro arco per la seconda coppia) abbia la lunghezza minima possibile.

Il problema di minimizzare la somma dei cammini tra coppie di nodi (un cosiddetto problema di *accoppiamento* o di *trasporto ottimo*) è stato volutamente semplificato in questo esempio. Se il grafo originale avesse avuto, per esempio, 8 nodi di grado dispari, i possibili accoppiamenti sarebbero diventati $C_{8,2}/2 = 8*7/4 = 14$ e il lavoro parecchio più lungo. In questo laboratorio ci accontentiamo di esplorare una possibile procedura di risoluzione del problema del postino, rimandando a futuri fascicoli i metodi per risolvere problemi di trasporto ottimo.

Possiamo accoppiare i nodi in tre modi differenti: *AE* e *GH*, *AG* e *EH*, *AH* e *EG*. Calcoliamo la somma dei due cammini minimi per ciascun accoppiamento:

» per *AE*, *GH* abbiamo un totale di 7 (4 per il cammino minimo *AE* e 3 per collegare *GH*);
» per *AG*, *EH* la somma è 6 (3 per ciascun cammino minimo);
» per *AH*, *EG* si ottiene 8 (2 per il cammino minimo tra *A* e *H* ma ben 6 per quello tra *E* e *G*).

È chiaro che, dovendo aggiungere archi ai nodi di grado dispari, conviene collegare tra loro i vertici *A* e *G* (passando per il nodo *C*, è il cammino di colore azzurro) e i nodi *E* e *H* attraversando *F* (il percorso viola nei due grafi presentati nella pagina precedente). In questo modo faremo diventare pari il grado di tutti i quattro nodi al costo più basso possibile.



Inserisci nel grafo originale alcuni archi (e le relative lunghezze) in modo da aggiungere i cammini minimi selezionati. Questo anche se, ovviamente, tali cammini già esistono.

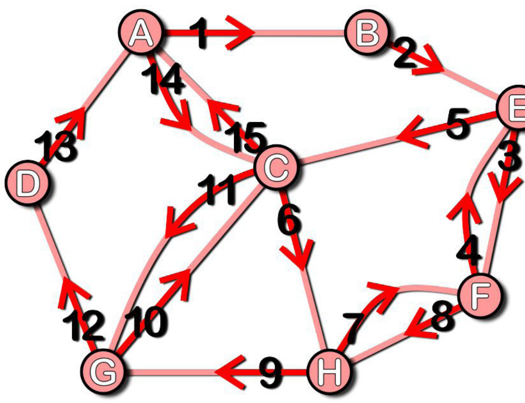
Nella figura qui accanto il grafo originale a cui sono stati aggiunti i due cammini scelti (abbiamo mantenuto per questi cammini i colori usati nella figura della pagina precedente).

Verifica che il grafo è euleriano. Scegli un nodo come inizio del percorso e costruisci un circuito euleriano che inizi e finisca nel nodo selezionato.

Il grafo ha tutti nodi di grado pari: ai quattro nodi di grado dispari (in colore rosso nella figura qui sopra) è stato aggiunto un arco ciascuno, ai nodi attraversati dai cammini minimi (che erano di grado pari) sono stati aggiunti due archi (e quindi sono rimasti di grado pari). Il grafo è euleriano e si può costruire un cammino che attraversi tutti gli archi una e una sola volta: un cammino euleriano! Anzi, visto che non ci sono più nodi di grado dispari possiamo costruire un *circuito* euleriano. È vero che, in realtà, alcune delle *strade* saranno percorse due volte, prima in un senso e poi in quello inverso, ma è il costo da pagare (comunque minimo) per recapitare la posta.

Per costruire il circuito euleriano possiamo usare il metodo visto in precedenza (cfr. **3. Cammino euleriano** a pagina 18 e 6. Cammino euleriano a pagina 22).

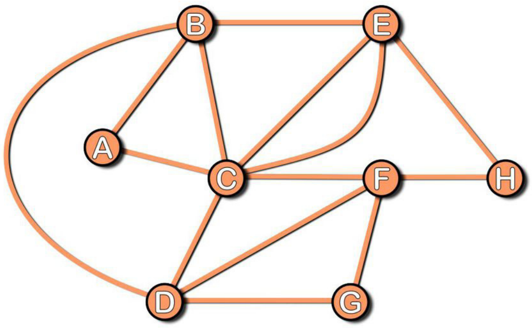
Nella figura qui a destra abbiamo tracciato un possibile circuito euleriano, il verso di percorrenza di ciascun arco è indicato dalle frecce di colore rosso mentre i valori associati alle frecce indicano l'ordine con cui gli archi sono attraversati. In altre parole, siamo partiti da *A* e il primo arco attraversato ci ha portato sul nodo *B* (freccia con il numero 1), poi ci siamo spostati sul vertice *E* (freccia 2) e così via ...



Notare che i collegamenti raddoppiati per la presenza dei cammini a vuoto sono percorsi prima in un verso e poi in quello opposto.

8. Esercizi

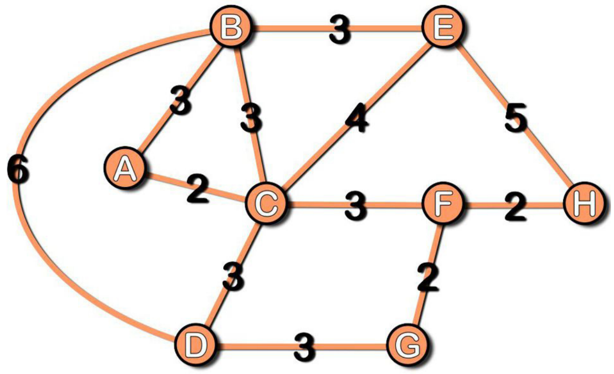
8.1. Circuito euleriano



Osservate il grafo qui accanto e cercate di costruire un circuito euleriano (che attraversi tutti i nodi una e una sola volta ritornando, infine, al nodo iniziale) partendo dal nodo *A*.

Ricordate che il teorema di Eulero permette di decidere immediatamente, con una rapida analisi, se in un grafo può esistere un cammino e/o un circuito euleriano. Nel caso la risposta sia affermativa il problema è in gran parte risolto **(cfr. 6. Cammino euleriano a pagina 21)**.

8.2. Il problema del postino



Considerate il grafo pesato qui accanto dove, come di consueto, i valori (in colore nero) riportati su ogni arco indicano il peso dell'arco stesso.

Distanze minime

Calcolate la distanza minima dal nodo *A* a ogni altro vertice del grafo.

Ricordate che l'algoritmmo per calcolare la distanza minima tra due nodi può essere esteso in modo da trovare il cammino più breve a ogni altro nodo **(cfr. 5. Il cammino più breve a pagina 17)**. Il grafo è piuttosto semplice, per cui si può rispondere alla richiesta anche in modo empirico, cercate però di usare la procedura per familiarizzare con il metodo più generale (eventualmente potete usare la ricerca empirica della distanza minima come verifica del lavoro fatto).

Un circuito euleriano

Se dopo tutto questo lavoro avete raggiunto un po' di confidenza con grafi, teorema di Eulero, metodi e algoritmi per la via più breve, vi dovreste essere già resi conto che il grafo non è euleriano. In altre parole non è possibile costruire un cammino che attraversi tutti gli archi una e una sola volta, tantomeno è possibile determinare un circuito euleriano.

Quindi, cercate di risolvere il problema del postino cinese su questo grafo supponendo di partire dal nodo *A*. L'unica strategia possibile è quella di aggiungere cammini a vuoto, nel modo più economico, come visto in **7. E se non c'è un cammino euleriano? a pagina 23**. In questo caso, vista la relativa semplicità del grafo, per determinare i cammini minimi tra coppie di nodi di grado dispri, è conveniente (e funzionale) utilizzare il metodo empirico.

8.3. La rete metropolitana di Milano

Nella figura in basso in questa stessa pagina è riportata la mappa della rete di trasporto metropolitano della città di Milano. In varie tonalità di azzurro le linee ferroviarie suburbane e in vari colori (rosso, verde, giallo, viola) le linee della metro. Per comodità definiremo, riguardo alla linea metropolitana in esame, come *nodi* le stazioni in cui arrivano più linee e useremo la parola *stazioni* per le stazioni in cui è presente una sola linea (per esempio, *Pagano*, sulla M1 rossa è una stazione mentre *Lotto*, che è anche sulla M5 viola, è un nodo).

Nodi e stazioni sono indicati con circoletti bianchi (si individua subito, per esempio, in alto nella mappa la stazione *Sesto 1° Maggio*) mentre il tempo medio di percorrenza tra due nodi/stazioni è indicato in minuti sul tratto corrispondente racchiuso in un rettangolo bianco (per esempio, da *Rho FieraMilano* a *Bovisa* sulla linea S11 suburbana si impiegano 27 minuti mentre, per fare un altro esempio, per andare da *Loreto* a *Lambrate* sulla M2 verde ci vogliono 4 minuti).

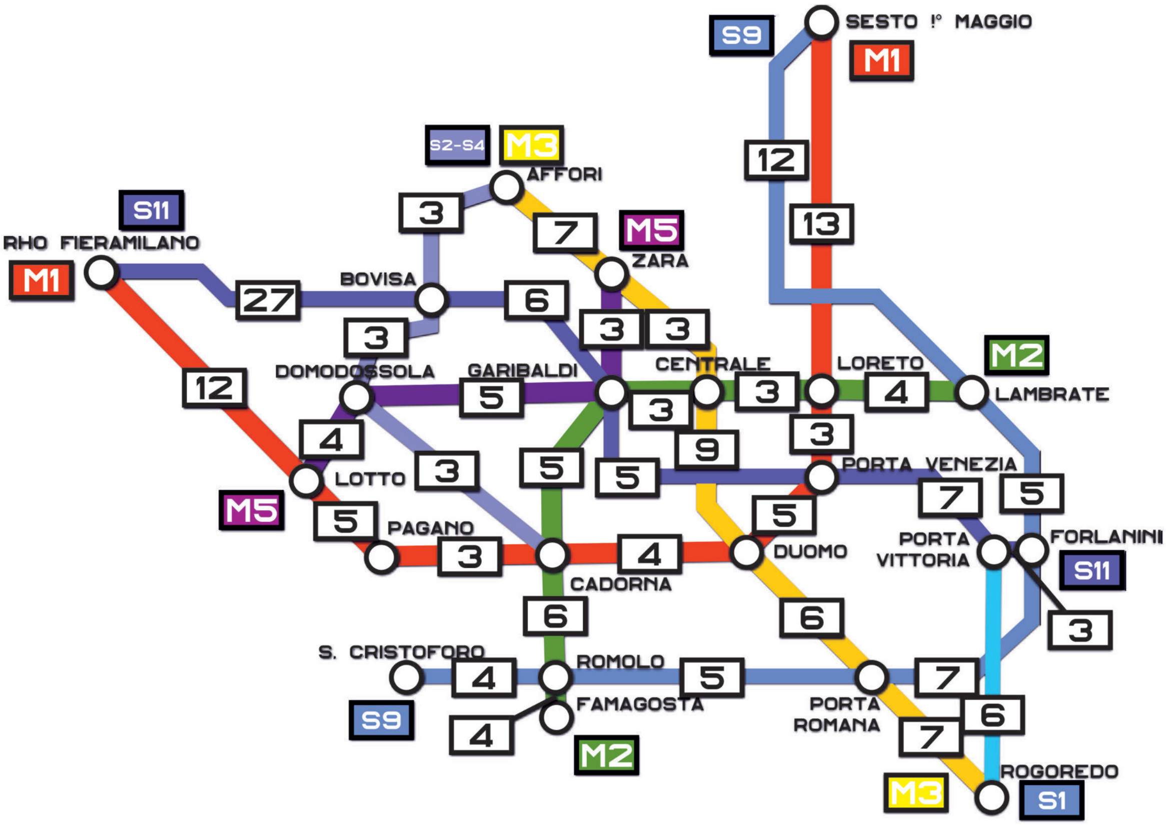
Le linee metropolitane e suburbane sono indicate con rettangoli posti, se possibile, ai due capolinea e dello stesso colore del percorso (per esempio, il nodo di *Sesto 1° Maggio* è capolinea per la linea metro M1 rossa e per la linea suburbana S9.

Se due linee si sovrappongono sulla mappa ma nel punto di intersezione non c'è una stazione o un nodo vuol dire che non è possibile, in quel punto, passare da una linea all'altra (per esempio la linea metro M1 rossa e la ferrovia suburbana S9, partendo da *Sesto 1° Maggio* si intersecano - apparentemente - un poco più in basso del capolinea ma quello non è un nodo!).

La rete è stata semplificata:

» non sono riportate le stazioni intermedie tra due nodi (per esempio, tra *Pagano* e *Cadorna*, sulla linea M1 rossa, non è indicata la stazione *Conciliazione*);
» non sono riportate tutte le linee ferroviarie suburbane ma solo quelle interessanti per il nostro problema.

26



» sono stati eliminati tutti i tratti che non hanno nodi (per esempio, la M1 rossa da *Pagano* si dirama verso *Bisceglie* ma su quest'ultima stazione e su tutte quelle intermedie tra questa e *Pagano* non ci sono nodi) perchè poco interessanti per i nostri scopi.

8.4. Il problema

Si vuole organizzare un itinerario per Milano usando solo le linee metro e la ferrovia suburbana in modo da percorrere ogni tratto di queste linee, tornando, alla fine, allo stesso punto di partenza ma impiegando il minor tempo possibile. In pratica, vogliamo costruire un circuito euleriano sulla rete ferroviaria mostrata nella figura precedente.

Le mappe delle linee metropilitane in genere rappresentano in modo estremamente semplificato la realtà: l'utilizzatore non è interessato alla reale disposizione delle stazioni ma vuole solo sapere quale linea va da un certo punto a un'altro (fu l'inglese Harry Beck, nel 1931, a creare la prima mappa semplificata per la rete metropolitana doi Londra).

Per i nostri scopi, la mappa presentata nella pagina precedente, pur semplificata più volte, potrebbe essere un po' difficile da utilizzare per cui rappresentate la rete metropolitana di Milano con un grafo cercando di evidenziare meglio nodi (del grafo questa volta, non della rete ferroviaria) e archi.

Analisi preliminare

Innanzitutto, si vede subito che il grafo è connesso (condizione essenziale per il nostro problema). Successivamente, contate i nodi di grado dispari (ricordate che in un grafo i nodi di grado dispari devono sempre essere in numero pari). Il numero di questi nodi permette di decidere se un grafo è euleriano oppure no.

Cammini minimi

Costruite cammini minimi tra ogni coppia di nodi di grado dispari. Tenente conto che se tali nodi, per esempio, sono otto, avete bisogno di determinare 28 cammini, infatti le possibili coppie che si possono formare partendo da un insieme di otto elementi è pari alle combinazioni di otto elementi di classe due (o *a due a due*), per cui:

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

Metagrafo

Costruite il grafo associato riportando solo i nodi di grado dispari collegati tra loro da archi il cui peso è la lunghezza del cammino minimo corrispondente. Ora dovete cercare di accoppiare i nodi in modo che la somma dei pesi degli archi che li collegano sia la piùpiccola possibile.

Soluzione

Aggiungete al grafo semplificato che avete creato all'inizio *cammini a vuoto* corrispondenti ai cammini minimi individuati al passo precedente: ora il grafo dovrebbe essere euleriano, con tutti i nodi di grado pari. Costruite un circuito euleriano scegliendo a piacere un punto di partenza e ... il gioco è fatto. Avete il vostro itinerario per visitare Milano!

La via breve

...

LSS G.B. Grassi

liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina

www.liceograssilatina.org

CNR - IAC

Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone

www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma

Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INSEAN

Istituto Nazionale Studi Esperienze e Architettura Navale

www.insean.cnr.org