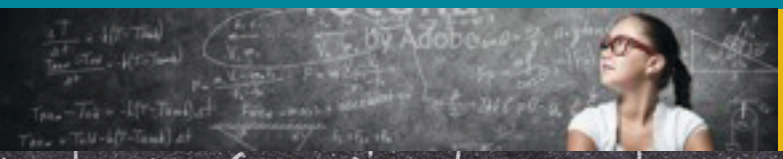
Derivata aritmetica

La nuova frontiera dei numeri?



Research in Action - RiA

researchinaction.it

Se in un test venisse richiesto di derivare 5, 44.324.115, radice di due o π, i nostri lettori più ferrati nel calcolo differenziale, senza farsi prendere dal panico, risponderebbero con tranquillità ... *zero*! Del resto, tutti noi sappiamo che la derivata di una costante additiva è sempre nulla.

Preparatevi a veder crollare le vostre certezze poiché coloro che sono stati presi dal panico ne avevano ben donde: vi porteremo nel mondo della derivata aritmetica dove l'unica regola rassicurante del calcolo differenziale perde di valore!

21 Derivata aritmetica - 05-19
Revisione 0 del 02.05.23

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Derivata aritmetica: La nuova frontiera dei numeri?

Sommario dei contenuti

1. Introduzione 5

1.1. Prerequisiti 6
1.2. Obiettivi 6

2. La derivata aritmetica 7

2.1. La derivata di un numero intero 7
2.2. Formule di derivazione 10
2.3. La derivata dei numeri razionali 12
2.4. Interpretazione geometrica 13
2.5. Un nuovo approccio 15

3. Soluzioni 17

3.1. Qualche esercizio 17
3.2. Formule di derivazione 18
3.3. La derivata dei numeri razionali 20
3.4. Interpretazione geometrica 20

4. Ulteriori approfondimenti 23

4.1. Il polinomio caratteristico 23
4.2. Derivata di un numero trascendente 23
4.3. Operazione inversa della derivata aritmetica 23

Blockly è un generatore di codice open source sostenuto da Google: https://developers.google.com/blockly/.

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): http://researchinaction.it/materials/21-Derivata-aritmetica.pdf;

» la libreria, sviluppata con Blockly, si può provare sul campo: **http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html** ed è descritta nel dettaglio qui: **http://researchinaction.it/2019/04/11/trascendenti-la-libreria/**.

Tra i laboratori proposti è possibile leggere anche due fascicoli di argomento simile o correlato:

» **Iperreali. Qual è il numero più piccolo? E il più grande?**

» **Numeri trascendenti**, questo laboratorio è presentato qui: **http://researchinaction.it/laboratori/numeri-trascendenti/**

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**.

RiA Toolbox Blockly GeoGebra xMaxima G.B. GRassi

Derivata aritmetica

La nuova frontiera dei numeri?

1. Introduzione

Questo laboratorio è stato sviluppato da Silvia De Nardis, Andrea Gardella, Chiara Gatto, Martina Torre in collaborazione con il professor Donato Bini (Istituto delle Applicazione del Calcolo Mauro Picone di Roma), il progetto è stato coordinato dal professor Grassucci (Iss G.B. Grassi di Latina).

Se in un test venisse richiesto di derivare *5*, *44.324.115*, radice di due o π, i nostri lettori più ferrati nel calcolo differenziale, senza farsi prendere dal panico, risponderebbero con tranquillità ... *zero*! Del resto, tutti noi sappiamo che la derivata di una costante additiva è sempre nulla.

O forse no?

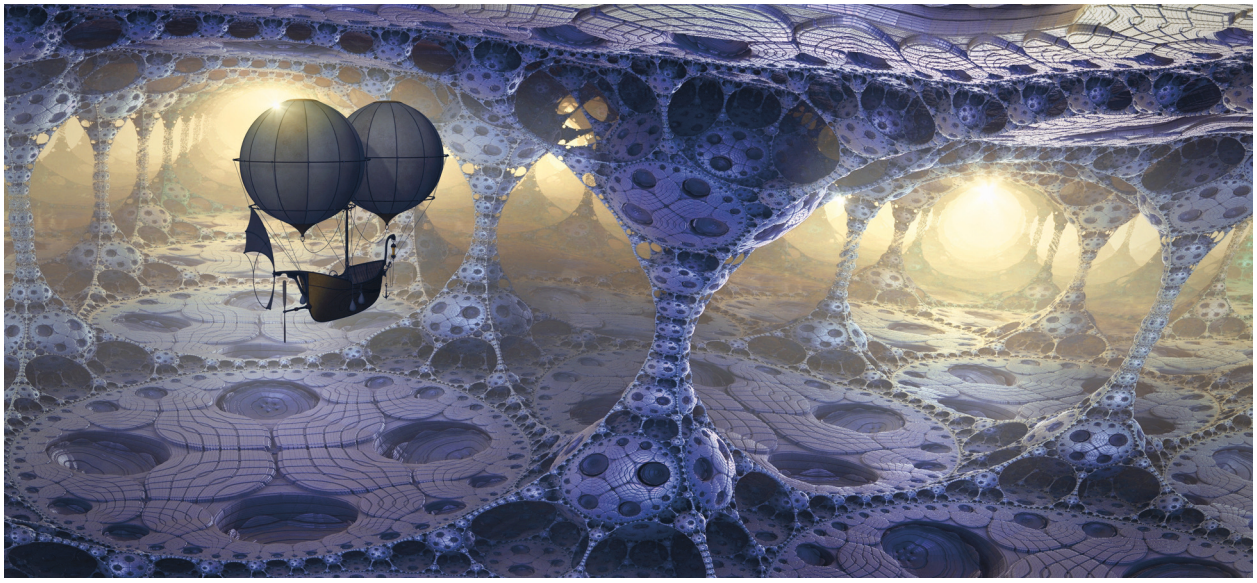
Preparatevi a mettere in discussione le vostre certezze poiché coloro che sono stati presi dal panico ne avevano ben donde: vi porteremo nel mondo della derivata aritmetica dove l'unica regola rassicurante del calcolo differenziale perde di valore e derivare un numero diventa un processo tanto insidioso quanto entusiasmante.

Per approfondire la derivata aritmetica consigliamo Balzarotti, G. & Lava, P.P. - *La derivata aritmetica* - 2013, Hoepli.

Con questo laboratorio intendiamo fornire una breve introduzione ad una branca nuova e non del tutto esplorata della teoria dei numeri: quella che si occupa della derivata aritmetica.

Si tratta di un'operazione che, nonostante la denominazione simile, ha poco a che vedere con la derivata analitica che siamo soliti trovare nei libri di testo. Con la derivata aritmetica deriviamo un numero (non una funzione) ottenendo come risultato un altro numero (non il tasso di variazione istantaneo della funzione in un dato punto).

La derivata aritmetica è uno strumento giovane il cui studio sembra aprire nuovi percorsi di ricerca nell'ambito della teoria dei numeri e sollevare, al contempo, curiosi interrogativi: sono proprio questi nuovi sentieri matematici e gli ostacoli che ne bloccano l'esplorazione, l'oggetto di questo fascicolo.



1.1. Prerequisiti

Per questo laboratorio è necessario:

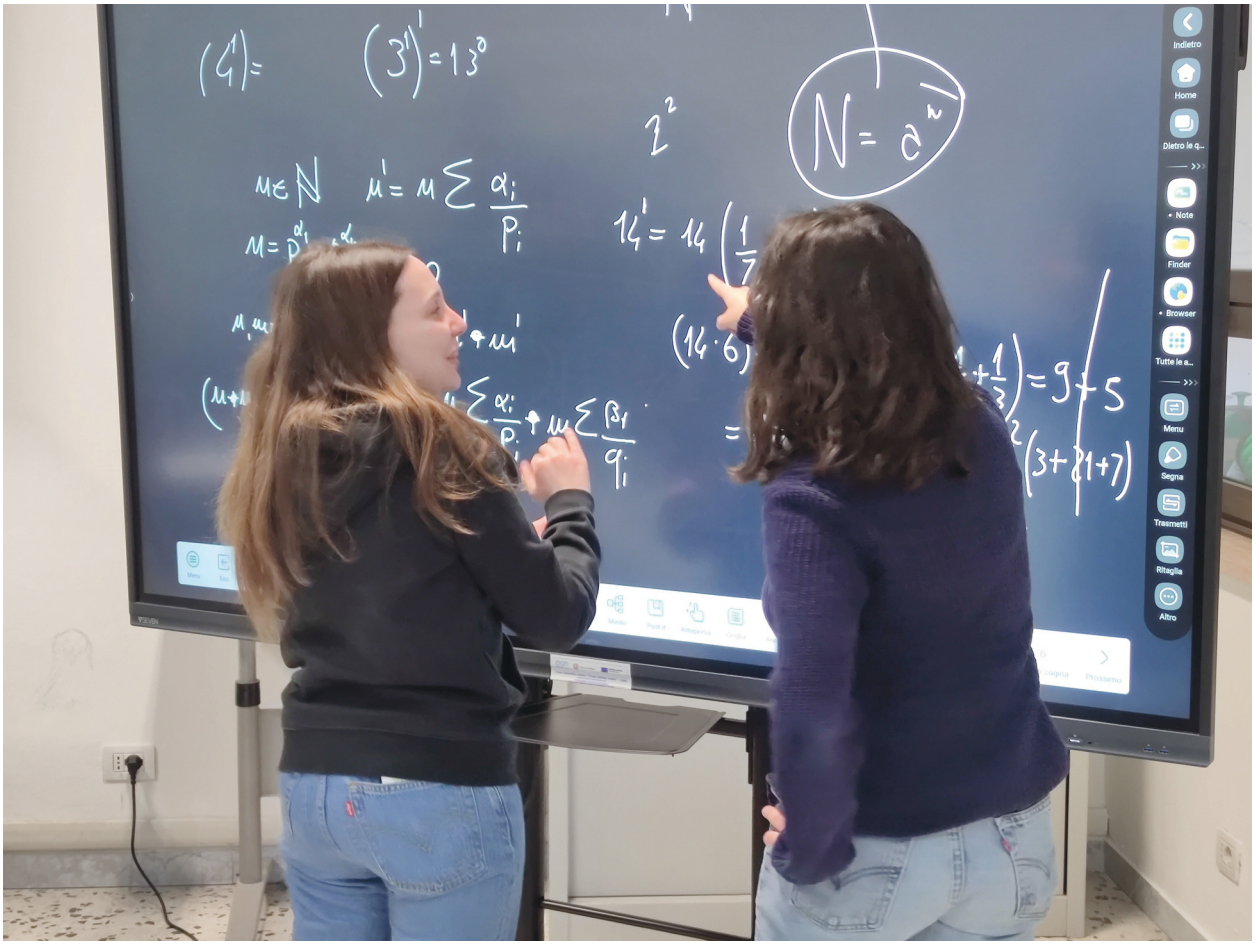
» Conoscere la scomposizione in fattori primi.
» Conoscere e comprendere il concetto di sommatoria e produttoria.
» Conoscere il concetto di derivata analitica e relative formule.
» Comprendere il significato (in termini generali) di integrale.

1.2. Obiettivi

Gli obiettivi principali sono:

» Definire il concetto di derivata aritmetica.
» Imparare a dimostrare semplici formule a partire da una definizione.
» Familiarizzare con la derivata (aritmetica) di numeri interi e scoprirne le caratteristiche attraverso una serie di esercizi.
» Legare il concetto di derivata aritmetica alla sua interpretazione geometrica.
» Definire la derivata aritmetica di una frazione.
» Definire la derivata aritmetica di un numero trascendente.
» Dare un'infarinatura generale sulla derivata aritmetica.

Sul blog Research in Action è possibile utilizzare la libreria sviluppata con Blockly nel corso del laboratorio: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html
Blockly è un generatore di codice open source sostenuto da Google: https://developers.google.com/blockly/.



2. La derivata aritmetica

2.1. La derivata di un numero intero

La derivata aritmetica è uno strumento che permette di derivare un qualsiasi numero ottenendo come risultato un altro numero. È un operatore matematico ancora relativamente giovane: venne nominata per la prima volta in un convegno nei primi del '900 da José Mingot Shelly ma, più o meno contemporaneamente, altri matematici giunsero alle stesse conclusioni. Esistono infatti diverse strade per calcolare la derivata aritmetica, alcune preferibili ad altre in base al contesto: in questo fascicolo ci occuperemo delle principali.

Innanzitutto è necessaria una rigorosa definizione di derivata aritmetica:

Dato un numero intero n e la sua relativa scomposizione in numeri primi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

definiamo la derivata aritmetica n' di n come:

$$n' = n \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right)$$

Questa formula può essere anche scritta in questo modo:

$$n' = n \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf introduce i principali concetti e metodi per un approccio informale al coding e alla formalizzazione delle procedure e degli algoritmi (cfr. 6. Algoritmi a pagina 23).

Per spiegare come applicare correttamente la formula e iniziare a prendere la mano con le operazioni di derivazione, seguiteci in questo esempio.

Proviamo a derivare il numero 42

Il primo passo sarà scomporre 42 in numeri primi $42 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Ricordiamo che in questo caso l'esponente di ogni fattore è 1, $\alpha_k = 1$ per ogni fattore.

Adesso possiamo applicare la formula

$$42' = 42 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) = 42 \cdot \left(\frac{21 + 14 + 6}{42}\right) = 41$$

La derivata aritmetica di *42* è *41!*

Qualche esercizio

Ora dovreste essere in grado di derivare qualsiasi numero intero in piena autonomia. Vi invitiamo a svolgere alcune altre prove per esercitarvi ma, soprattutto, per cercare di scoprire insieme a noi le particolarità nascoste della derivata aritmetica.

Proviamo a derivare i primi 12 numeri interi. Completa la tabella che segue scomponendo i primi dodici numeri naturali (alcune somposizioni sono mostrate come esempio) e applicando il procedimento che abbiamo appena visto.

Per i più furbi: sul nostro sito potete trovare la nostra libreria realizzata con Blockly, la funzione scomporre in fattori potrebbe risultare utile: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html. Attenzione, però, non barate e fate le derivate a mano! Anche se forse non ne capite il senso, è importante che vi esercitiate almeno in questi primi passi per acquisire familiariatà con l'argomento. Le scorciatoie si possono prendere solo quando si conosce la strada maestra, altrimenti si rischia di perdersi!

n	Scomposizione in fattori primi	Procedimento	n'
1	1	...	0
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Per darvi una mano, abbiamo già inserito nella tabella la derivata di *1* perché quest'ultima poteva risultare ingannevole; uno infatti è un numero particolare poiché non essendo considerato un primo ed essendo il suo stesso unico divisore, non ha fattori primi: pertanto, la sua derivata è *0*. Per essere più precisi, per definizione $0' = 0$ e $1' = 0$.

La derivata di un numero primo

Esaminando la tabella, quello che appare subito lampante è che vi sono ben 5 numeri diversi con la derivata aritmetica pari a *1*. Questi numeri sono *2, 3, 5, 7* e *11*. Per cercare una strada per procedere, provate a chiedervi cos'è che questi numeri hanno in comune.

Vi potete aiutare consultando la tabella di derivazione che abbiamo inserito alla fine del fascicolo (non barate, non leggete troppo presto le soluzioni!) oppure, meglio ancora, derivando un'altra manciata di numeri così da fare anche pratica.

Trovate altri numeri naturali la cui derivata è 1?

Come avete notato, effettivamente sono in molti ad avere la stessa derivata e sono tutti numeri primi! L'ipotesi che potremmo formulare è che tutti i numeri primi abbiamo derivata uguale a 1, ma per averne la certezza non dobbiamo certo iniziare a calcolarle tutte (anche perché la ricerca stessa di *tutti i numeri primi* è un problema non da poco). Ma allora come fare ad avere una conferma, qualcosa che ci dimostri in maniera incontrovertibile che l'ipotesi è valida (o meno)?

Una dimostrazione

Un consiglio che vi possiamo dare è di cercare di ragionare il più generalmente possibile: probaUn consiglio che vi possiamo dare è di cercare di ragionare il più generalmente possibile: probabilmente fare la derivata di *31* o di *47* (numeri primi *specifici*) non vi porterà molto avanti ma sarà meglio dimostrare che la derivata di *un qualsiasi* numero primo è sempre uguale a *1*.

Vi viene in mente un modo per scrivere un numero primo senza usare (quasi) numeri?

Forse avrete già in mente una strada da intraprendere ma se così non fosse non vi preoccupate perchè siamo qui per aiutarvi.

Quando abbiamo introdotto la definizione di derivata aritmetica vi abbiamo riportato una formula con una scrittura universale estremamente potente: al posto di n potevamo immaginare qualsiasi numero intero, questo vuol dire che quella semplice formula poteva essere applicata per infinite diverse combinazioni rimanendo sempre valida. Per farlo, abbiamo espresso il numero da derivare servendoci della sua scomposizione in numeri primi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Ecco, questa scrittura è persino troppo generale rispetto al nostro obiettivo: cerchiamo di personalizzarla per includere così solo i numeri primi.

Sebbene sia vero che i primi possano essere scomposti unicamente come prodotto di uno e loro stessi nel campo degli interi, nel XIV secolo Carl Friedrich Gauss riuscì a scomporre alcuni primi particolari, tra cui il 5, grazie all'utilizzo dei numeri complessi.

Un po' di teoria, perché una buona conoscenza del punto da cui dobbiamo partire è un ottimo modo per determinare la direzione da prendere: come sapete, per definizione, un numero primo è un numero divisibile unicamente per 1 e per se stesso.

Alla luce di ciò, sapreste scrivere un generico numero primo con la sua relativa scomposizione in fattori primi?

$n = n \cdot 1$: è addirittura più semplice della scrittura da cui eravamo partiti!

Adesso avete il vostro generico numero primo pronto per essere usato nella vostra *ancora-non-dimostrata* dimostrazione. In realtà, anche se forse non ve ne rendete conto, avete fatto qualcosa di incredibile: avete appena scritto, con a malapena 5 caratteri, un intero insieme numerico composto da talmente tanti elementi che non potrebbe bastare una vita, o addirittura le vite di tutti gli esseri umani mai vissuti, per scriverli tutti.

Ma torniamo al problema che ci eravamo posti inizialmente. Abbiamo quasi finito, manca un ultimo passo: dobbiamo dimostrare che la derivata di un primo è (o non è) sicuramente 1. Però dal momento che allo stato attuale delle cose non possiamo predirre il risultato, ciò che faremo sarà ancora più facile: calcoleremo la derivata aritmetica del nostro generico numero primo, e poi analizzeremo qualsiasi risultato otterremo.

Potete provare a derivare $n = n \cdot 1$?

Applicando la nostra fidata formula otterrete $n' = n \cdot (1/n) = 1$ e, semplificando n a numeratore e denominatore, $n' = 1$.

Ce l'avete fatta, avete dimostrato che $n' = 1$ per ogni n primo!

Questa è una proprietà particolarmente curiosa che approfondiremo in seguito. La derivata aritmetica riserva ancora tante sorprese per cui …

Ancora un qualche esercizio

Provate a derivare 14, 21, 22, 25 completando la seguente tabella.

n	Scomposizione in fattori primi	Procedimento	n'
14	$2 \cdot 7$		
21			
22			
25			

Blockly non ha un blocco predefinito per il fattoriale, per cui se avete intenzione di implementare gli algoritmi sviluppati in questo laboratorio con Blockly è necessario aggiungere anche una funzione per il calcolo del fattoriale. A questo proposito vedere la libreria sviluppata proprio con Blockly: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html

Adesso concentriamoci sulle colonne *scomposizione di numeri primi* e *risultato*, la derivata n': notate qualche correlazione?

Le derivate di questi numeri equivalgono alla somma dei 2 numeri primi che li compongono.

Prendete per esempio il numero *14*, che può essere scomposto come $7 \cdot 2$: la sua derivata aritmetica è *9 (7+2)*.

Frenate l'entusiasmo, si tratta di un caso particolare osservabile solo in alcune circostanze.

Ma per capire veramente di cosa si tratta, abbiamo bisogno di introdurre un nuovo concetto: ci rivediamo nel prossimo capitolo sull'anti-derivata.

Le cose da dire sull'anti-derivata sono più di quelle che potremmo scrivere in mille di questi fascicoli, per questo potete trovare tanto altro materiale sul nostro sito tra cui un interessante articolo proprio su questo argomento. Ma non possiamo dirvi di più: se abbiamo suscitato in voi un po' di curiosità andate a dare un'occhiata aal sito del progetto: http://researchinaction.it/.

2.2. Formule di derivazione

Siamo ancora all'inizio del nostro viaggio e, per poterlo condurre al meglio, vi potrebbero tornare utili alcune pratiche formule di derivazione. Ma ovviamente, come ogni matematico che si rispetti, voi non vi limiterete a raccogliere su una banale tabella le formule già pronte all'uso: insieme, creeremo le nostre formule partendo da un'idea e poi proveremo a dimostrarle.

Somma di due numeri naturali

Potremmo iniziare a domandarci, come prima cosa, se le formule che siamo soliti utilizzare quando trattiamo con le derivate analitiche siano valide anche per la derivata aritmetica. È noto che la derivata della somma di due funzioni *f(x)* e *g(x)* è la somma delle derivate delle singole funzioni, formalmente:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

Per i più furbi: sul nostro sito potete trovare la nostra libreria realizzata con Blockly, la funzione scomporre in fattori potrebbe risultare utile: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html. Attenzione, però, non barate e fate le derivate a mano! Anche se forse non ne capite il senso, è importante che vi esercitiate almeno in questi primi passi per diventare familiari con l'argomento. Le scorciatoie si possono prendere solo quando si conosce la strada maestra, altrimenti si rischia di perdersi!

Una proprietà simile vale per la derivata aritmetica? In altre parole, è vero che la derivata aritmetica della somma di due numeri naturali è uguale alla somma delle derivate aritmetiche dei due numeri naturali?

Tenete bene a mente che tantissimi casi particolari che sostengono la nostra ipotesi non possono sostituire una dimostrazione, ma che se anche uno solo dei nostri tentativi la smentisce allora dobbiamo accettare la natura accidentale dei risultati precedenti.

In altre parole, se riesci a trovare due numeri naturali per cui la somma delle derivate degli stessi è diversa dalla derivata della loro somma, allora non si tratta di una proprietà. L'identità potrebbe comunque verificarsi per determinati casi particolari ma ciò non è universalmente vero. Tenta con dei numeri casuali (per velocizzare i calcoli puoi sempre ricorrere alla nostra libreria Blockly).

Prodotto di due numeri naturali

Proviamo ancora. Il prodotto di due funzioni *f(x)* e *g(x)* si deriva con la formula

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Questa formula si può adattare alla derivata aritmetica? In altre parole, è vero che per ogni coppia di numeri naturali n e m la derivata del prodotto $n \cdot m$ è $n' \cdot m+n \cdot m'$?

Fai prima qualche tentativo con alcune coppie di numeri cercando anche di affrontare i casi particolari (prodotto di due primi, prodotto di due potenze, ...).

Se, provando più e più volte, non vi siete ancora imbattuti nel caso che ha fatto crollare la vostra tesi, è giunto il momento di scoprire se siete stati solo fortunati o se vi state avvicinando ad una nuova scoperta: dobbiamo tentare di dimostrare che la formula è vera per ogni coppia di numeri naturali, qualunque essi siano.

Dobbiamo dimostrare che, presi due numeri naturali scomponibili come

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \qquad\qquad m = q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_f^{\beta_f} = \prod_{i=1}^{f} q_i^{\beta_i}$$

allora

$$(n \cdot m)' = n' \cdot m + n \cdot m'$$

Prova a scrivere il primo e il secondo membro di questa eguaglianza usando la definizione di derivata aritmetica **(cfr. 2.1 La derivata di un numero intero a pagina 7)**, se con qualche semplice passaggio algebrico i due membri sono uguali tra loro - per due numeri naturali qualsiasi - allora possiamo finalmente dire di aver scoperto una formula di derivazione aritmetica!

Se trovate questo problema troppo difficile, non abbattetevi e passate al paragrafo successivo. Abbiamo ancora tanti altri problemi in cui cimentarci e grazie ai quali scoprire le nostre doti matematiche. Non dimenticate poi, una volta terminata la lettura di questo fascicolo, di dare un'occhiata alle soluzioni per scoprire le dimostrazioni sotto la nostra guida.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per il calcolo dell'errore (cfr. Calcolo dell'errore a pagina 5).

Derivata di una potenza (con esponente naturale)

Per le derivate di funzioni vale la formula $(f(x)^n)' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$. Potremmo adattare una formula simile alla derivata aritmetica della potenza di un numero naturale con esponente intero?

In altre parole, se n è un numero naturale qualsiasi e k un esponente naturale, è vero che la derivata di n^k è ottenibile come $k \cdot n^{k-1} \cdot n'$?

Come in precedenza: fate alcuni tentativi, includendo anche i casi particolari. Se uno solo degli esempi non funziona, la proprietà non è valida in generale. Attenzione agli errori di calcolo e alle sviste: se possibile, lavorate in gruppo aiutandovi controllando vicendevolmente il vostro lavoro.

Se tutti i tentativi hanno avuto successo potete provare a dimostrare la correttezza della formula per qualsiasi coppia di numeri naturali (base ed esponente). Procedete come avete fatto in precedenza: vogliamo dimostrare che dato n^k allora $(n^k)' = k \cdot n^{k-1} \cdot n'$.

Esplicitate i due membri, separatamente, usando la definizione di derivata aritmetica e provate a modificarli per controllare se diventano uguali con qualche passaggio algebrico. Come in precedenza, puoi sempre fidarti - comportamento poco matematico in verità - dei tentativi fatti e procedere oltre.

Come in precedenza, potete fidarvi dei tentativi fatti e procedere oltre oppure perseverare come dei veri matematici e cercare di trovare una risposta ai vostri interrogativi. Vi ricordiamo che lavorare in gruppo potrebbe essere una mossa veramente astuta: collaborare è sempre un'ottima idea per chi vuole fare ricerca.

Il reciproco di un numero naturale

Estendiamo la definizione, in modo abbastanza spontaneo, alla derivata del reciproco di un numero naturale. Sappiamo infatti che, dato un numero naturale n, il suo reciproco può essere espresso sia come $1/n$ che, grazie alle proprietà delle potenze, come n^{-1}.

Tenendo conto di questa definizione, si può estendere la formula della derivata della

potenza di un numero naturale a esponente intero trovata in precedenza? Ossia, dato un numero n, è possibile ricavare una formula per calcolare la derivata del suo reciproco n^{-1}?

Formulare una dimostrazione è forse il lavoro più difficile di ogni matematico: si parte da una buona idea, un'intuizione, ma questa poi deve essere accompagnata da una formalità nel ragionamento che non va assolutamente data per scontata.
Esistono dimostrazioni di ogni forma, differenti per il metodo con le quali si approccia al problema (diretto, per induzione, per assurdo e molti altri), per la loro lunghezza o anche per l'eleganza e la chiarezza con la quale sono esposte.
Riuscire a fare una dimostrazione, per quanto essa possa essere semplice, è un traguardo stupendo da superare.

L'unica differenza che possiamo evidenziare rispetto alla formula del paragrafo precedente è che, adesso, il nostro esponente è *-1*, ossia un numero negativo. Forse potremmo riuscire a trovare una formula ridotta applicabile a questo caso particolare.

Se siete ancora qui... gran bel lavoro! Sappiate però che non è finita qui, seguiteci nel prossimo capitolo: *La derivata dei numeri razionali.*

2.3. La derivata dei numeri razionali

Adesso che siete diventati esperti nel derivare i numeri interi e che abbiamo imparato nuove formule, proviamo a derivare qualcosa di un po' più complesso: sapreste fare la derivata di un numero razionale tipo *3/4*? O *19/30*? Anche se, apparentemente, questo esercizio vi potrebbe sembrare diverso da quelli precedenti, in realtà avete tutte le conoscenze necessarie per risolverlo.

Proviamo, come abbiamo già fatto, a osservare la questione da una diversa prospettiva. Sicuramente sapete che $3/4$, ma più generalmente una qualsiasi frazione a/b, può essere riscritta come un prodotto grazie alle proprietà delle potenze. Provate a seguire questa strada!

Per i più furbi: sul nostro sito potete trovare la nostra libreria realizzata con Blockly, la funzione scomporre in fattori potrebbe risultare utile: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html. Attenzione, però, non barate e fate le derivate a mano! Anche se forse non ne capite il senso, è importante che vi esercitiate almeno in questi primi passi per diventare familiari con l'argomento. Le scorciatoie si possono prendere solo quando si conosce la strada maestra, altrimenti si rischia di perdersi!

Ottime notizie! Adesso quello che abbiamo davanti è il prodotto di due numeri di cui uno ha esponente negativo. Nel paragrafo precedente abbiamo scoperto tutte le formule di derivazione necessarie per trattare questo caso.

Proviamo quindi ad applicare la formula della derivata di un prodotto.

Se ci siete riusciti, complimenti!

In matematica però, spesso esiste più di una strada per raggiungere uno stesso obiettivo. Il problema che vi abbiamo proposto ne è un esempio: esiste infatti una formula molto simile alla prima comparsa in questo fascicolo, che ci permette di derivare i numeri razionali.

Dato un numero razionale n esprimibile come il rapporto di due numeri naturali a e b, la derivata di tale numero è

$$n' = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)$$

Se volete potete divertirvi e dimostrare che questa formula poteva essere ricavata facendo affidamento unicamente sulle informazioni che avete imparato fino ad adesso.

Ormai siete diventati degli esperti di derivate aritmetiche, quindi è arrivato il momento di alzare il livello, sapreste calcolare la derivata aritmetica di ? Avete qualche idea?
Per riuscire dovremmo prima assicurarci di maneggiare bene l'argomento, quindi abbiamo preparato per voi un po' di teoria sui numeri trascendenti!
Sul nostro sito trovate un articolo di approfondimento in cui vi insegneremo come derivare pi greco qualunquea altro: http://researchinaction.it/

Ora proseguiamo con pochi semplici esercizi che non richiederanno altro se non l'utilizzo della formula (ovviamente siete comunque liberi di scegliere la procedura che preferite).

Con questo non vogliamo tediarvi inutilmente, bensì aiutarvi a comprendere - oltre che l'importanza delle capacità creative coinvolte nelle dimostrazioni - la necessità di acquisire alcune competenze di calcolo. Grazie a quest'ultime, maneggerete con crescente maestria l'argomento e questo vi aiuterà anche nelle applicazioni creative.

Provate a derivare le seguenti frazioni: $6/23$, $16/21$, $15/32$.

Andare a controllare i risultati ottenuti andando a leggere le soluzioni di questo esercizio non è

necessario, se avete dubbi potete sempre avvalervi della nostra libreria realizzata con Blockly.

2.4. Interpretazione geometrica

Ora proviamo a indagare meglio questi concetti, in particolare il legame tra la geometria analitica e la derivata aritmetica. Vedrete, sarete sorpresi dai risultati, stupiti, ma il percorso vi piacerà!

C'è un semplice metodo per associare a ogni numero naturale una corrispondente funzione polinomiale $\Lambda n(x)$. Per prima cosa prendiamo un numero n e lo scomponiamo come prodotto di k numeri primi non necessariamente distinti: $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_k$.

A questo punto definiamo

$$\Lambda n(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \cdot \ldots \cdot (p_n - x)$$

In questo caso $x = p_i$ $(i = 1 \dots k)$ sono gli zeri di Λn (ovvero i valori in cui $\Lambda n\ (x)$ interseca l'asse delle ascisse). Ora state per diventare dei veri ricercatori, dei matematici al lavoro ...

Considerate il numero $n = 15$. Scomponete il numero nei suoi fattori primi.

Dovreste aver ottenuto due fattori primi p_1 e p_2.

Calcolate la derivata aritmetica n' del numero n.

Fin qui nulla di strano. La derivata è anche facile perché n è il prodotto di due soli numeri primi.

Definite un polinomio $\Lambda_{15}(x)$ che ha per radici (soluzioni, zeri, …) proprio i due fattori primi che avete appena trovato.

È il polinomio, la funzione, associato al numero intero n. Si tratta di un polinomio di secondo grado, una parabola.

Tracciate il grafico di questa parabola e determinate il punto T in cui interseca l'asse delle ordinate.

Potete usare il piano cartesiano che trovate in questa nella pagina precedente pagina o, meglio, un software CAS per accelerare le operazioni.

Determinate l'equazione della retta tangente t alla funzione nel punto T.

Anche in questo caso, se potete, usate un software CAS. Non siamo interessati a fare esercizi di geometria analitica ma a scoprire relazioni, legami, teoremi. Forse dovremo ripetere la stessa operazione più volte …

Osservate i risultati di queste due operazioni: la derivata aritmetica di n e la tangente geometrica alla funzione associata ad n: $\Lambda_{15}(x)$. Riuscite a vedere una coincidenza? Una correlazione?

Se non vedete nessun legame forse sarà bene provare ancora.

Considerate il numero intero $n = 6$. Calcolate la sua derivata aritmetica.

Oramai è un'operazione facile!

Determinate ora il polinomio associato $\Lambda_{16}(x)$ e scrivete l'equazione della retta tangen-

FUN FACT: I numeri trascendenti hanno infinite cifre decimali che formano infinite combinazioni. Pertanto, all'interno di queste infinite combinazioni potete trovare per esempio la vostra data di nascita, il numero di telefono del vostro migliore amico e, più generalmente, qualsiasi combinazione numerica vi possa venire in mente!

te t alla curva nel punto in cui interseca l'asse delle ordinate.

Ok. Adesso abbiamo l'equazione della tangente. Anche in questo caso potete tracciare il polinomio (ancora una volta una parabola) nel piano cartesiano che trovate nella pagina precedente.

Osservate di nuovo i due risultati: retta tangente e derivata aritmetica. Ci sono correlazioni?

Sia che voi abbiate notato una relazione o che stiate ancora brancolando nel buio, provate ancora.

Cercate di allargare il campo: provate con numeri interi la cui scomposizione ha più di due fattori primi o i cui fattori primi non abbiano esponente uno. La regolarità, la correlazione, rimane sempre?

Adesso dovreste essere pronti a generalizzare ...

Potete formalizzare una congettura che lega la derivata aritmetica di un numero intero n alla tangente della funzione associata $\Lambda_n(x)$?

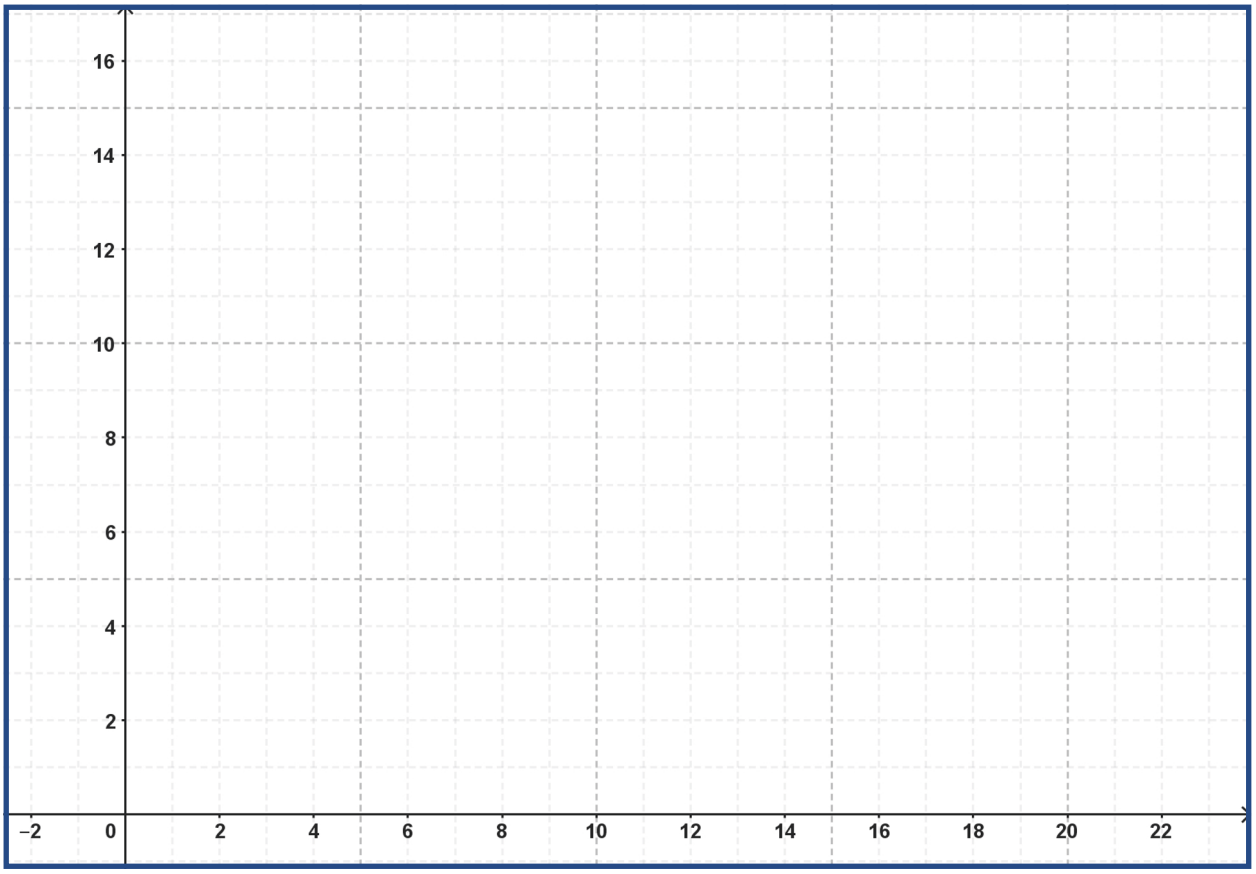
Per i più furbi: sul nostro sito potete trovare la nostra libreria realizzata con Blockly, la funzione scomporre in fattori potrebbe risultare utile: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html. Attenzione, però, non barate e fate le derivate a mano! Anche se forse non ne capite il senso, è importante che vi esercitiate almeno in questi primi passi per diventare familiari con l'argomento. Le scorciatoie si possono prendere solo quando si conosce la strada maestra, altrimenti si rischia di perdersi!

Ora dovrebbe essere tutto abbastanza chiaro:

» n è la quota della funzione $\Lambda_n(x)$;
» la derivata aritmetica di un numero n è il coefficiente angolare della retta tangente alla $\Lambda n(x)$ nel punto in cui questa interseca l'asse delle ordinate.

Sorge spontaneo a questo punto chiedersi: se i numeri sono infiniti, anche le funzioni sono infinite? Ovvero a ogni funzione corrisponde sempre un numero generatore?

Dei bravi matematici, a questo punto del fascicolo, risponderebbero senza problemi: *ovviamente.*



E allora la vera domanda diventa questa: sapreste trovare un metodo o una formula per poter trovare il numero generatore conoscendo solo ed esclusivamente la sua rispettiva funzione?

Se la risposta fosse positiva sarebbe ottimo, perché avreste risolto il problema di calcolare la derivata della funzione, prendendo la scorciatoia della derivata aritmetica. Al momento non ci sono dimostrazioni in merito, ma chissà se tra i nostri lettori c'è un matematico brillante che nel futuro amplierà l'orizzonte della Teoria dei numeri.

2.5. Un nuovo approccio

Adesso siete finalmente in grado di calcolare la derivata aritmetica di - quasi - qualsiasi numero; le strategie che potete attuare sono talmente tante che c'è l'imbarazzo della scelta!

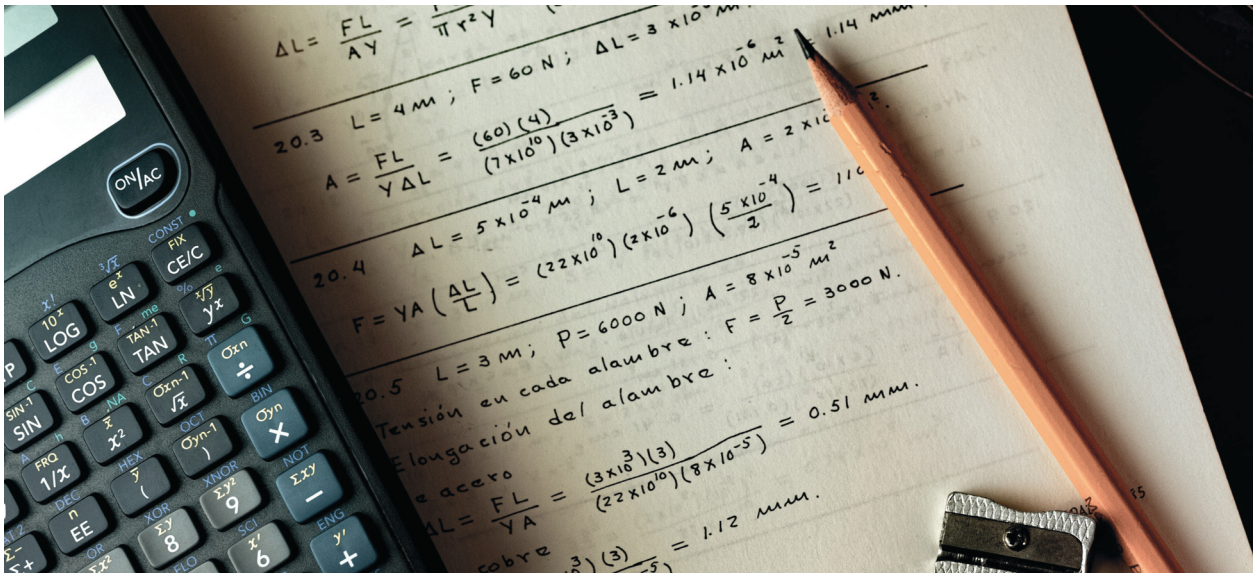
Sappiate però che avete fatto molto di più: in questo laboratorio vi siete messi in gioco andando oltre la semplice applicazione di formule già pronte e avete esplorato, pezzetto dopo pezzetto, un territorio della matematica che probabilmente non avevate mai visto - e che è stato poco indagato persino dagli esperti del settore.

Avete lavorato come dei veri matematici e forse avrete capito che non ha molto a che vedere con quanto vi è stato sempre detto.

Sentirete spesso dire, infatti, che la matematica è una disciplina poco creativa perché si devono seguire pedissequamente sentieri già tracciati, senza se e senza ma. Eppure, durante il nostro percorso, di se, di ma, di continui tentativi ed errori ce ne sono stati tanti. Le formule di cui ora disponiamo sono solide ma non ne siamo sempre stati certi: le abbiamo dovute prima dimostrare e così facendo - forse anche senza accorgercene - abbiamo aperto dei sentieri per chi verrà dopo di noi.

Anche al giorno d'oggi usiamo pezzetti di matematica che sono stati scoperti centinaia, persino migliaia di anni fa, e con questi pezzetti cerchiamo di scoprirne altri, addentrandoci sempre più all'interno di un territorio inesplorato. Una delle caratteristiche forse più belle di questo tipo di ricerca è che si prosegue senza sapere veramente cosa ci si può aspettare; le applicazioni delle nuove scoperte sono talmente tante che talvolta sfuggono ai loro stessi artefici.

Ad alcuni quindi potrebbe sembrare un lavoro inutile mentre altri troveranno la cosa affascinante; ciò che è oggettivo invece è che grazie al linguaggio matematico - flessibile, universale e in continuo miglioramento - l'umanità ha compiuto opere sorprendenti.



16

3. Soluzioni

3.1. Qualche esercizio

Ora dovreste essere in grado di derivare qualsiasi numero intero in piena autonomia. Vi invitiamo a svolgere alcune altre prove per esercitarvi ma, soprattutto, per cercare di scoprire insieme a noi le particolarità nascoste della derivata aritmetica.

Proviamo a derivare i primi 12 numeri interi. Completa la tabella che segue scomponendo i primi dodici numeri naturali (alcune somposizioni sono mostrate come esempio) e applicando il procedimento che abbiamo appena visto.

Per completare la tabella facciamo riferimento alla formula

$$n' = n \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right)$$

n	Scomposizione in fattori primi	Procedimento	n'
1	1	... per definizione ...	0
2	2·1	2 · (1/2)	1
3	3·1	3 ·(1/3)	1
4	$2 \cdot 2 = 2^2$	4 ·(2/2)	4
5	5 · 1	5·(1/5)	1
6	2·3	6·(1/2+1/3)	5
7	7	7 ·(1/7)	1
8	2^3	8·(3/2)	12
9	3^2	9 ·(2/3)	6
10	2 · 5	10 ·(1/2+1/5)	7
11	11	11 ·(1/11)	1
12	$2^2 \cdot 3$	12 ·(2/2+1/3)	16

La derivata di un numero primo

Esaminando la tabella, quello che appare subito lampante è che vi sono ben 5 numeri diversi con la derivata aritmetica pari a *1*. Questi numeri sono *2, 3, 5, 7* e *11*. Per cercare una strada per procedere, provate a chiedervi cos'è che questi numeri hanno in comune.

Esatto, sono tutti numeri primi!

Trovate altri numeri naturali la cui derivata è 1?

Altri numeri primi, come: 19, 67, 131, ...

Ancora un qualche esercizio

Provate a derivare 14, 21, 22, 25 completando la seguente tabella.

n	Scomposizione in fattori primi	Procedimento	n'
14	$2 \cdot 7$	$14 \cdot (1/2 + 1/7)$	9
21	$3 \cdot 7$	$21 \cdot (1/3+1/7)$	10
22	$2 \cdot 11$	$22 \cdot (1/2 + 1/11)$	13
25	$5 \cdot 5 = 5^2$	$25 \cdot (2/5)$	10

3.2. Formule di derivazione

Somma di due numeri naturali

Una proprietà simile vale per la derivata aritmetica? In altre parole, è vero che la derivata aritmetica della somma di due numeri naturali è uguale alla somma delle derivate aritmetiche dei due numeri naturali?

Purtroppo, la risposta a questa domanda è no, e per verificarlo basta veramente poco (è sufficiente un solo controesmpio). Consideriamo, per esempio *4* e *6*:

» la derivata della somma dei due è $(4 + 6)' = (10)' = 10 \cdot (1/2 + 1/5) = 7$
» ma la somma delle derivate, invece, risulta $4' + 6' = 4 \cdot (2/2) + 6 \cdot (1/2+1/3) = 4 + 5 = 9$

La derivata della somma di due numeri, in questo caso specifico, è diversa dalla somma delle derivate per cui, in generale, $(n + m)'$ non è uguale a $n' + m'$. Peccato!

Prodotto di due numeri naturali

Questa formula si può adattare alla derivata aritmetica? In altre parole, è vero che per ogni coppia di numeri naturali n e m la derivata del prodotto $n \cdot m$ è $n' \cdot m + n \cdot m'$?

Dopo alcuni tentativi vi sarete accorti che la formula apparentemente funziona. Questo non basta, dimostriamolo.

Se, provando più e più volte, non vi siete ancora imbattuti nel caso che ha fatto crollare la vostra tesi, è giunto il momento di scoprire se siete stati solo fortunati o se vi state avvicinando ad una nuova scoperta: dobbiamo tentare di dimostrare che la formula è vera per ogni coppia di numeri naturali, qualunque essi siano.

Dobbiamo dimostrare che, presi due numeri naturali scomponibili come

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \qquad m = q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_f^{\beta_f} = \prod_{i=1}^{f} q_i^{\beta_i}$$

allora

$$(n \cdot m)' = n' \cdot m + n \cdot m'$$

Iniziamo a trasformare il primo membro. Potremmo considerare $n \cdot m$ come un unico numero d i cui fattori non sono altro che i fattori di n e e di m:

$$d' = (n \cdot m)' = n \cdot m \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{f} p_i^{\beta_i} \right)$$

Ora passiamo al secondo membro, quello di destra:

$$n' \cdot m + n \cdot m' = n \cdot \sum_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} \cdot m + n \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{f} p_i^{\beta_i}$$

se ora raccogliamo $n \cdot m$ abbiamo

$$n' \cdot m + n \cdot m' = n \cdot m\left(\sum_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{f} p_i^{\beta_i}\right)$$

che è esattamente uguale al membro di sinistra dell'eguaglianza. Si tratta di un'identità: abbiamo appena dimostrato la nostra prima formula!

Derivata di una potenza (con esponente naturale)

In altre parole, se n è un numero naturale qualsiasi e k un esponente naturale, è vero che la derivata di n^k è ottenibile come $k \cdot n^{k-1} \cdot n'$?

La formula sembra funzionare. Per esempio se n $= 14^3 = 2744$ allora $14^{3\prime} = 2744'$ e visto che $2744 = 2^3 \cdot 7^3$ abbiamo $2744' = 2744 \cdot (3/2 + 3/7) = 5292$. D'altra parte, se pensiamo di usare la formula che vogliamo verificare $2744' = 14^{3\prime} = 3 \cdot 14^2 \cdot 14' = 3 \cdot 14^2 \cdot 9 = 5292$. Seguendo due strade diverse otteniamo lo stesso risultato!

Se tutti i tentativi hanno avuto successo potete provare a dimostrare la correttezza della formula per qualsiasi coppia di numeri naturali (base ed esponente). Procedete come avete fatto in precedenza: vogliamo dimostrare che dato n^k allora $(n^k)' = k \cdot n^{k-1} \cdot n'$.

Se n si può scomporre come visto nella pagina precedente, allora

$$n^k = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i \cdot k}$$

dove, per le proprietà delle potenze, ogni esponente è moltiplicato per k, e quindi

$$(n^k)' = n^k \cdot \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha_i \cdot k}{p_i}$$

a questo punto, raccogliendo k nella somma abbiamo

$$(n^k)' = n^k \cdot k \cdot \sum_{i=1}^{t} \frac{\alpha_i}{p_i} = n^k \cdot k \cdot \frac{n'}{n} = k \cdot n^{k-1} \cdot n'$$

Non è nemmeno necessario lavorare sul secondo membro dell'equazione, abbiamo ottenuto un'identità! La nostra formula è dimostrata e valida.

Il reciproco di un numero naturale

Tenendo conto di questa definizione, si può estendere la formula della derivata della potenza di un numero naturale a esponente intero trovata in precedenza? Ossia, dato un numero n, è possibile ricavare una formula per calcolare la derivata del suo reciproco n^{-1}?

Possiamo usare la formula precedente per la derivata di una potenza per un esponente uguale a -1:

$$(n^{-1})' = -1 \cdot n^{-1-1} \cdot n' = -1 \cdot \frac{n'}{n^2}$$

Grazie ad una manciata di semplici procedimenti algebrici abbiamo ottenuto una formula contratta ed estremamente pratica.

3.3. La derivata dei numeri razionali

Proviamo, come abbiamo già fatto, a osservare la questione da una diversa prospettiva. Sicuramente sapete che *3/4*, ma più generalmente una qualsiasi frazione *a/b*, può essere riscritta come un prodotto grazie alle proprietà delle potenze. Provate a seguire questa strada!

Una qualsiasi frazione a/b si può sempre scrivere come prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore a1/b = ab-1 quindi possiamo utilizzare la derivata di un prodotto

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = (a \cdot b^{-1})' = a' \cdot b^{-1} + a \cdot (b^{-1})'$$

Proviamo quindi ad applicare la formula della derivata di un prodotto.

a questo punto è sufficiente utilizzare la formula per la derivata del recprioco per ottenere

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = a' \cdot b^{-1} - a \cdot \frac{b'}{b^2}$$

che possiamo scrivere anche come

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

che somiglia molto alla formula per la derivata analitica di un quoziente di funzioni.

Provate a derivare le seguenti frazioni: *6/23*, *16/21*, *15/32*.

Deriviamo, per esempio, la prima frazione utilizzando l'ultima formula proposta. Abbiamo

$$\left(\frac{6}{23}\right)' = \frac{6' \cdot 23 - 6 \cdot 23'}{23^2}$$

Ricordando che *23' = 1* perchè numero primo e *6' = 6 · (1/2 + 1/3) = 5* si ottiene

$$\left(\frac{6}{23}\right)' = \frac{5 \cdot 23 - 6 \cdot 1}{529} = \frac{109}{529} \approx 0.2060$$

3.4. Interpretazione geometrica

Considerate il numero *n = 15*. Scomponete il numero nei suoi fattori primi.

Facile: *15 = 3 · 5*.

Calcolate la derivata aritmetica *n'* del numero *n*.

Ormai dovreste essere degli esperti: *15' = 15 · (1/3 + 1/5) =15 · 8/15 = 8*.

Definite un polinomio $\Lambda_{15}(x)$ che ha per radici (soluzioni, zeri, …) proprio i due fattori primi che avete appena trovato.

Il polinomio cercato è $\Lambda_{15}(x) = (5 - x)(3-x) = x^2 - 8x + 15$. È bene notare che non è l'unico polinomio possibile, ogni polinomio del tipo $a(5 - x)(3-x)$ ha come radici 3 e 5 per qualsiasi valore di a ma noi ci rifacciamo alla definizione che abbiamo dato in precedenza **(cfr. 2.4 Interpretazione geometrica a pagina 13)**.

Tracciate il grafico di questa parabola e determinate il punto T in cui interseca l'asse delle ordinate.

La parabola di equazione $y = \Lambda_{15}(x)$ è tracciata nel grafico che trovate in basso in questa stessa pagina. Notare che interseca l'asse delle ascisse nei punti A e B le cui ascisse sono, come precisto, 3 e 5. Le coordinate del punto T si trovano immediatamente calcolando $\Lambda_{15}(15) = 15$. Proprio il numero intero da cui siamo partiti!

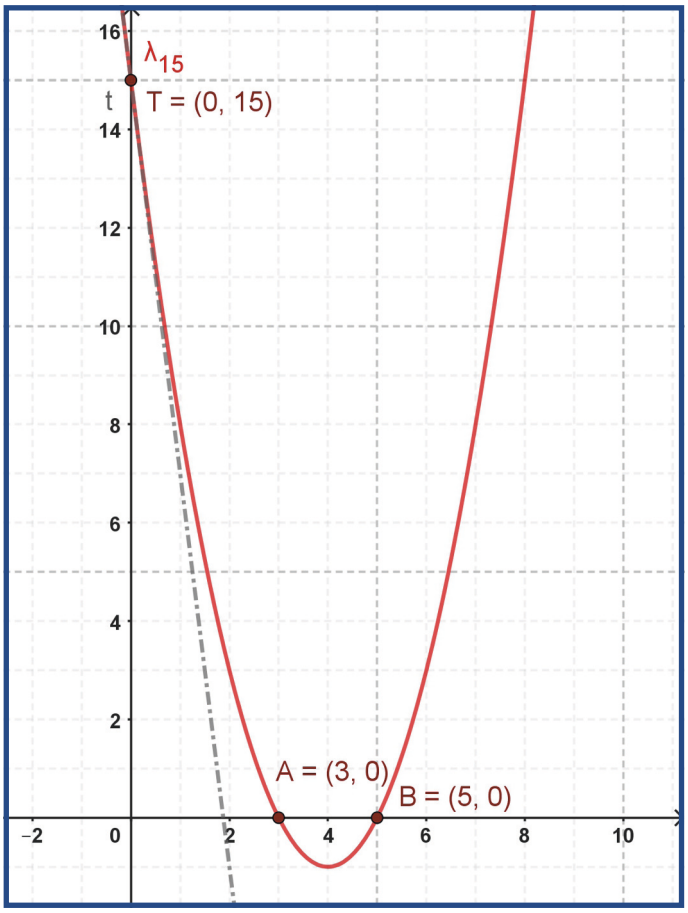
Determinate l'equazione della retta tangente t alla funzione nel punto T.

Dopo qualche calcolo la tangente risulta $t_{15} : y = -8x + 15$. Il coefficiente angolare di questa retta è, come si vede subito, $m = -8$: la derivata aritmetica di 15 cambiata di segno. Curioso!

Osservate i risultati di queste due operazioni: la derivata aritmetica di n e la tangente geometrica alla funzione associata ad n: $\Lambda_{15}(x)$. Riuscite a vedere una coincidenza? Una correlazione?

La correlazione appare evidente, ma un caso è troppo poco ...

Considerate il numero intero $n = 6$. Calcolate la sua derivata aritmetica.



Abbiamo subito $n' = 5$.

Determinate ora il polinomio associato $\Lambda_{16}(x)$ e scrivete l'equazione della retta tangente t alla curva nel punto in cui interseca l'asse delle ordinate.

Il polinomio è $\Lambda_{15}(x) = (2 - x)(3-x)$ che si può scrivere come $\Lambda_{15}(x) = x^2 - 5x + 6$. La retta tangente è $t_6 : y = -5x + 6$.

Osservate di nuovo i due risultati: retta tangente e derivata aritmetica. Ci sono correlazioni?

Eh, sì! Sembra proprio così: il polinomio caratteristico incontra l'asse delle ordinate in un punto la cui ordinata è il numero intero a cui il polinomio è associato (che è anche la quota della retta) e il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto è la derivata aritmetica del numero originale.

Cercate di allargare il campo: provate con numeri interi la cui scomposizione ha più di due fattori primi o i cui fattori primi non abbiano esponente uno. La regolarità, la correlazione, rimane sempre?

Se prendiamo in esame, per esempio, il numero $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ abbiamo:

» la derivata è $n' = 10$
» il polinomio risulta $\Lambda_{30}(x) = (2 - x)(3 - x)(5 - x) = -x^3 + 10x^2 - 31x + 30$
» la retta tangente è quindi $y = -13x + 30$

Ancora una volta: il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata aritmetica n' del numero n, la quota è il numero n stesso.

Potete formalizzare una congettura che lega la derivata aritmetica di un numero intero n alla tangente della funzione associata $\Lambda_n(x)$?

Ora dovrebbe essere tutto abbastanza chiaro:

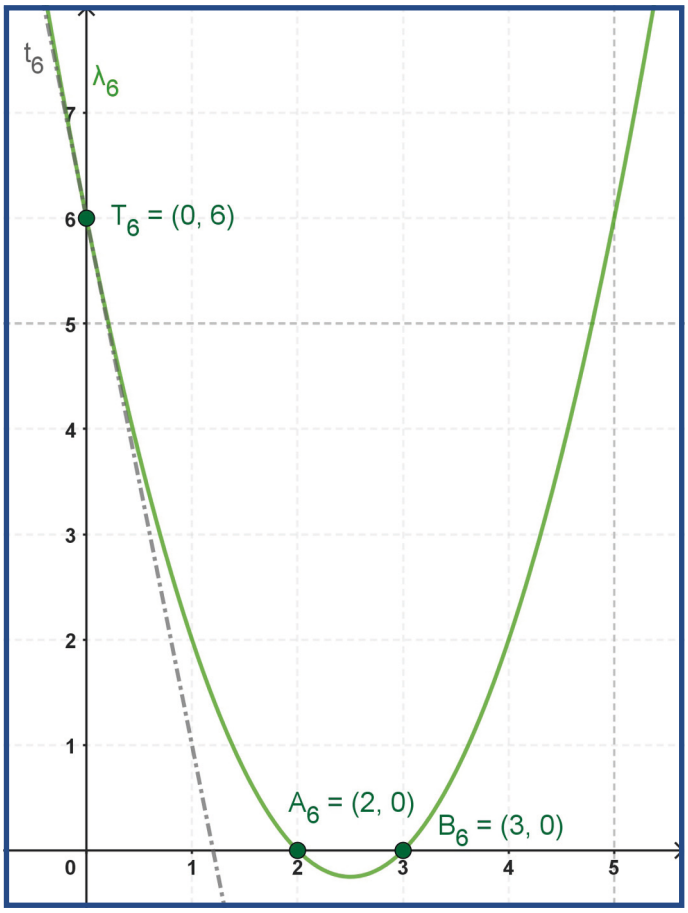
» n è la quota della funzione $\Lambda_n(x)$;
» la derivata aritmetica n' di un numero n è il coefficiente angolare della retta tangente alla $\Lambda n(x)$ nel punto in cui questa interseca l'asse delle ordinate.

Sorge spontaneo a questo punto chiedersi: se i numeri sono infiniti, anche le funzioni sono infinite? Ovvero a ogni funzione corrisponde sempre un numero generatore?

Dei bravi matematici, a questo punto del fascicolo, risponderebbero senza problemi: *ovviamente.*

E allora la vera domanda diventa questa: sapreste trovare un metodo o una formula per poter trovare il numero generatore conoscendo solo ed esclusivamente la sua rispettiva funzione?

Se la risposta fosse positiva sarebbe ottimo, perché avreste risolto il problema di calcolare la derivata della funzione, prendendo la scorciatoia della derivata aritmetica. Al momento non ci sono dimostrazioni in merito, ma chissà se tra i nostri lettori c'è un matematico brillante che nel futuro amplierà l'orizzonte della Teoria dei numeri.



4. Ulteriori approfondimenti

4.1. Il polinomio caratteristico

Può essere interessante indagare altre caratteristiche del polinomio caratteristico associato a un numero intero, per esempio:

» Il polinomio di secondo grado (caratteristico di un numero intero scomponibile in due soli fattori di esponente unitario) è legato al trinomio caratteristico che viene presentato nei primi anni delle scuole superiori, è possibile una dimostrazione?

» La correlazione che abbiamo ipotizzato nell'ultima parte del laboratorio rimane vera se gli esponenti dei fattori primi di n sono diversi da uno? E se il numero non è intero? Come si potrebbe definire un polinomio caratteristico? E se non fosse un polinomio?

4.2. Derivata di un numero trascendente

L'introduzione che potete leggere qui accanto è tratta dal fascicolo 11- Numeri trascendenti che si può scaricare qui: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/05/11-Numeri-trascendenti.pdf.

Abbiamo definito la derivata aritmetica di numeri interi e razionali. Ma i numeri trascendenti? Si potrebbe pensare di approssimare un numero trascendente con un numero razionale utilizzando un qualche metodo di approssimazione: pensate a π e ai metodi di approssimazione di cui si parla a volte sul blog del progetto *RiA*.

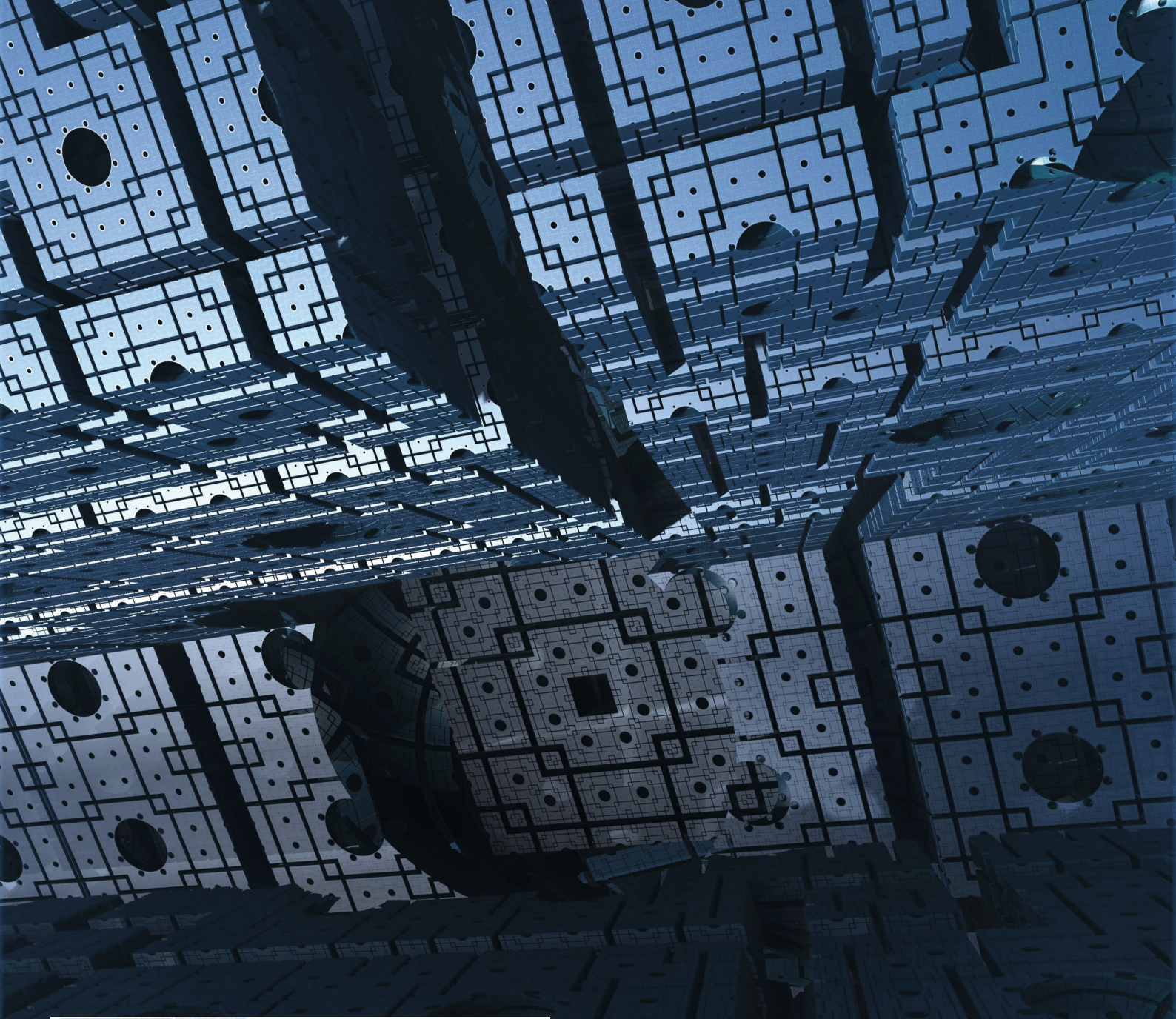
Questo argomento è discusso più in dettaglio proprio sul sito **Research in Action**.

4.3. Operazione inversa della derivata aritmetica

È possibile invertire l'operazione di derivata aritmetica? Calcolare, in qualche modo l'*antiderivata* di un numero (che sia intero, razionale o trascendente)? In fondo l'*antiderivata* analitica fornisce infiniti risultati: tutte le primitive di una data funzione $f(x)$ ma tutte queste funzioni sono molto simili tra loro.

Il problema è più complesso di quanto possa sembrare a prima vista e probabilmente la risposta è uno dei motivi per cui la derivata aritmetica si è rivelata, almeno fino a ora, un *vicolo cieco* della matematica.

Anche questo problema è approfondito su **Research in Action**.



LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

INM

ISMAR
Istituto di Scienze Marine

LSS G.B. Grassi

liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina

www.liceograssilatina.org

CNR - IAC

Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone

www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma

Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INM

Istituto di iNgegneria del Mare

www.insean.cnr.org

CNR - ISMAR

Istituto di Scienze MARine

www.ismar.cnr.org