Un’attrazione irresistibile

Il magico viaggio imposto dalla gravità

Research in Action - RiA

researchinaction.it

22 Un’attrazione irresistibile - 05.23
Revisione 0 del 24.05.23

Quando due corpi interagiscono gravitazionalmente, seguendo le leggi della meccanica classica newtoniana sono possibili diversi tipi di moto. In questo laboratorio tratteremo di un fenomeno, un’interazione, che segue una traiettoria iperbolica. Per esempio, nel riferimento in cui uno dei due corpi è in quiete, l’altro compie un moto iperbolico passando vicino al primo ad una minima distanza (distanza di minimo approccio, o parametro di impatto), per poi fuggore di nuovo lontano verso l’infinito.

RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley … the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish … (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Un’attrazione irresistibile - Il magico viaggio imposto dalla gravità

Sommario dei contenuti

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/materials/22-Un-attrazione-irresistibile.pdf**;
» il materiale asupporto del laboratorio ...

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**.

Un’attrazione irresistibile

Il magico viaggio imposto dalla gravità

1. Introduzione

Questo laboratorio è stato sviluppato da Luca Pontesilli, Alessandro Quadrini e Matteo Uccellini in collaborazione con il professor Donato Bini (Istituto delle Applicazione del Calcolo Mauro Picone di Roma), il progetto è stato coordinato dal professor Grassucci (Iss G.B. Grassi di Latina).

Quando due corpi interagiscono gravitazionalmente, seguendo le leggi della meccanica classica newtoniana sono possibili diversi tipi di moto: con traiettoria chiusa (orbite ellittiche come nel caso dei pianeti del nostro sistema solare) o aperta (con traiettorie paraboliche o iperboliche in cui come per esempio le traiettorie di alcune comete non periodiche) come potete leggere su qualunque testo che discuta questo problema a livello elementare (problema di Keplero). In questo laboratorio tratteremo di un fenomeno che segue una traiettoria iperbolica. Per esempio, nel riferimento in cui uno dei due corpi è in quiete, l’altro compie un moto iperbolico passando vicino al primo ad una minima distanza (distanza di *minimo approccio*, o *parametro di impatto*), e poi fuggendo di nuovo ad una distanza infinita da esso.

L’angolo tra la direzione iniziale e finale del corpo che compie il moto iperbolico si chiama angolo di scattering, χ, che risulta una funzione dell’energia e del momento angolare iniziale del corpo stesso. Il problema reale (non descritto dalla teoria di Newton ma dalla relatività generale di Einstein) è molto complicato perché mano a mano che i corpi si avvicinano la gravità determina forti accelerazioni che a loro volta comportano emissione di onde gravitazionali e conseguente perdita di energia *(E)*, momento lineare *(p)* e momento angolare *(J)* da parte dei corpi stessi.

Per discutere la dinamica si ricorre per lo più a calcoli numerici ed i risultati più recenti sono riassunti in **tabella che trovate a pagina 7**, adattata dal lavoro di *T. Damour, F. Guercilena, I. Hinder, S. Hopper, A. Nagar and L. Rezzolla, Strong-Field Scattering of Two Black Holes: Numerics Versus Analytics, Phys. Rev. D 89, no.8, 081503 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.081503 [arXiv:1402.7307 [gr- qc]].*

Strong-Field Scattering of Two Black Holes: Numerics Versus Analytics: https://arxiv.org/abs/1402.7307

1.1. Prerequisiti

Per questo laboratorio è necessario:

» saper approssimare una serie di dati con funzioni polinomiali;
» saper valutare l'errore commesso nell'approssimazione di una serie di dati.

1.2. Obiettivi

L'obiettivo di questo progetto è quello di approssimare il valore dell'angolo di scattering χ in funzione del parametro di impatto *(b_{AM}/M)*, energia iniziale *(E_{AM}/M)* e momento angolare iniziale *(J_{AM}/M)* con il minimo errore possibile a partire da una serie di dati concernenti l'interazione gravitazionale che si instaura tra due corpi, di cui uno in quiete e l'altro in movimento provocando, oltre a una deviazione del suddetto, anche una serie di modificazioni dovute all'emissione di onde gravitazionali, misurabili rispettivamente in termini di angolo di scattering, perdita di energia, momento lineare e momento angolare.

Sul blog Research in Action è possibile utilizzare la libreria sviluppata con Blockly nel corso del laboratorio: http://researchinaction.it/myblockly/numbertheory.html
Blockly è un generatore di codice open source sostenuto da Google: https://developers.google.com/blockly/.

2. Il problema

2.1. I dati

La tabella che segue riporta i dati rilevati da … quando …

Da sinistra verso destra le varie colonne riportano il parametro di impatto b_{NR}/M, l'energia iniziale E_{NR}/M, il momento angolare iniziale J_{NR}/M e l'angolo di scattering χ_{NR} misurato in gradi sessagesimali. M è la massa totale del sistema dei due corpi.

Ai fini di questo laboratorio si può assumere $M = 1$ pensando di misurare le varie quantità per unità di massa totale. NR sta qui per *Numerical Relativity* ad indicare che questi dati provengono da simulazioni numeriche che usano la relatività generale. Le cifre tra parentesi rappresentano l'errore con cui sono conosciute le varie quantità. Ad esempio *1.099652(36)* significa che stimiamo il *valore vero* come compreso tra *1.099652 - 0.000036* e *1.099652 + 0.000036*, o in altre parole che le ultime due cifre del numero considerato sono incerte.

b_{NR}/M	E_{NR}/M	J_{NR}/M	χ_{NR} . M
9.6	1.0225555(50)	1.099652(36)	305.8(2.6)
9.8	1.0225722(50)	1.099652(36)	253.0(1.4)
10	1.0225791(50)	1.145523(38)	222.9(1.7)
10.6	1.0225870(50)	1.214273(40)	172.0(1.4)
11	1.0225884(50)	1.260098(41)	152.0(1.3)
12	1.0225907(50)	1.374658(45)	120.7(1.5)
13	1.0225924(50)	1.489217(48)	101.6(1.7)
14	1.0225931(50)	1.603774(52)	88.3(1.8)
15	1.0225938(50)	1.718331(55)	78.4(1.8)
16	1.0225932(50)	1.832883(58)	70.7(1.9)

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

2.2. Programma di lavoro

Adesso proviamo a risolvere il problema. Il piano di lavoro dovrebbe essere quello indicato qui di seguito. Non aver paura, sembra molto complicato, e forse è così, ma durante tutto il percorso saremo al tuo fianco. Iniziamo con il programmare il percorso da seguire dall'inizio fino al termine del lavoro:

» riportare su un piano cartesiano i valori corrispondenti alla colonna b_{NR}/M e quelli corrispondenti alla colonna χ così da rappresentarli come punti;
» analizzare l'andamento del fenomeno che stiamo studiando;
» trovare una funzione polinomiale che approssimi al meglio questi punti;
» stimare l'errore che si ha utilizzando la funzione *fit* come approssimazione dei dati sperimentali;
» provare a migliorare l'approssimazione ripetendo il procedimento già impiegato ma utilizzando come funzione approssimante una razionale fratta;
» svolgere questi procedimenti utilizzando come ascissa anche le colonne di dati E_{NR}/M e J_{NR}/M (questi ultimi saranno lasciati al lettore come esercizi);
» analizzare il fenomeno osservando le funzioni e cercare di porre previsioni per il futuro.

Ora che abbiamo una scaletta possiamo iniziare a lavorare ...

2.3. Una funzione polinomiale

Partiamo dai dati dell'angolo di scattering χ_{NR} e del parametro di impatto b_{NR}/M che si trovano nella prima e nell'ultima colonna della tabella.

Decidi quali dati rappresentare sull'asse delle ascisse e quali sull'asse delle ordinate. Riporta quindi i dati su un piano cartesiano unendo i punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata per avere un'idea dell'andamento dello *scattering* in funzione della variabile indipendente.

Ricorda che quello che vogliamo approssimare è l'angolo di scattering, questo dovrebbe permetterti di decidere. Puoi utilizzare il piano cartesiano che trovi in questa pagina ma potrebbe essere utile avvalersi di un software CAS.

Osserva i punti sperimentali e la spezzata che si ottiene unendo questi punti, prova ad utilizzare un polinomio per approssimarli. Determina una funzione χ_{NR}, un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.

Ricordati sempre che per un buon lavoro è ottimale utilizzare un numero relativamente basso di parametri rispetto a quello totale dei punti e che bisognerà adattare la funzione parametrica di conseguenza al numero di parametri che abbiamo scelto. Ad esempio, per una funzione a quattro parametri, il modello da utilizzare sarà del tipo:

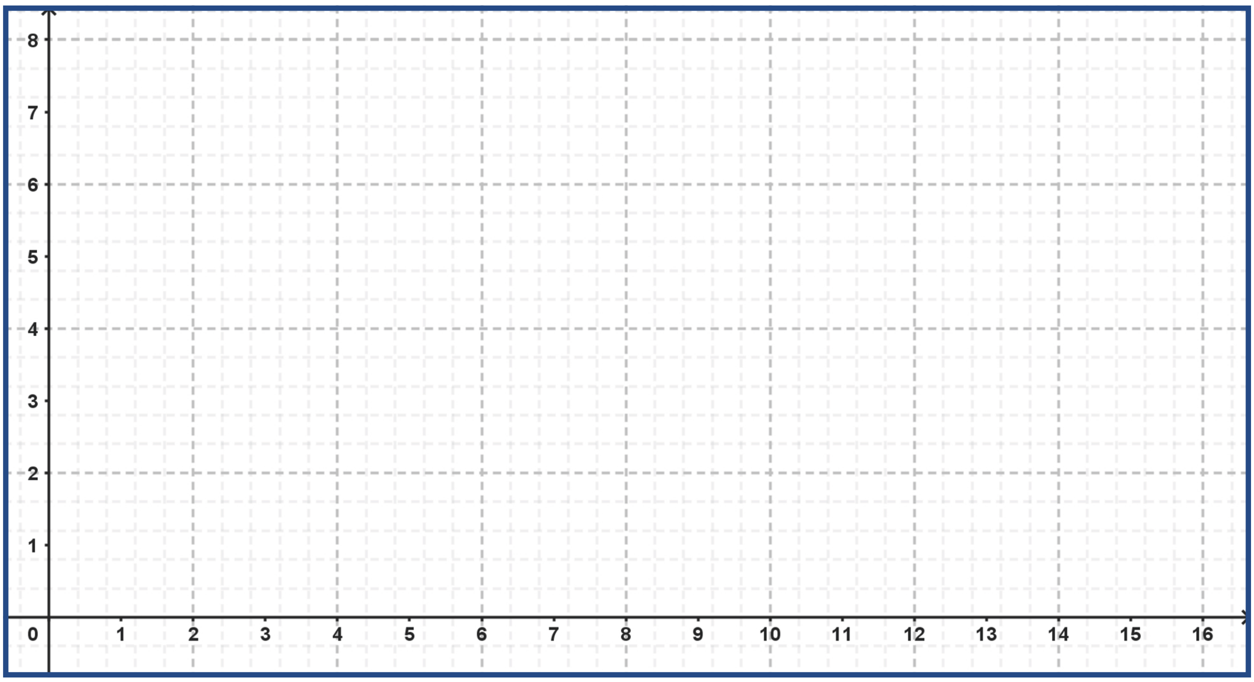
$$\chi(b_{NR}) = a \cdot b_{NR}^{3} + b \cdot b_{NR}^{2} + c \cdot b_{NR} + d$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per stimare l'errore (cfr. 1. Il calcolo dell'errore a pagina 5) e per approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

Se sei riuscito a determinare una funzione che approssima i dati sperimentali ora è il momento di valutare la qualità del lavoro fatto.

Fai una stima dell'errore che si commette utilizzando la funzione per approssimare i dati. Se l'errore è troppo alto o pensi di poterlo migliorare, puoi pensare di modificare i punti che hai scelto per ricavare i parametri.

Un buon metodo è quello di calcolare lo scarto quadratico: il quadrato della distanza sull'asse delle ordinate tra il valore sperimentale e il valore della curva approssimante per la corrispondente ascissa. La somma dei quadrati delle rispettive distanze (o meglio, la radice di questa somma ....)



ci darà una stima all'errore complessivo del *fit*, dando una misura di quanto questa si discosta dai dati originali.

Compara gli errori che ottieni dalle diverse funzioni - ottenute modificando il grado del polinomio o scegliendo una diversa combinazione di punti sperimentali - e scegli, ovviamente, quella che presenta il più basso.

Un approssimazione con una funzione polinomiale è già un buon risultato, se l'errore è nell'ordine di 10^{-1}. Vediamo se, però, possiamo fare meglio.

2.4. Maggiore attenzione ai dati

Per migliorare si può pensare di osservare con più attenzione l'andamento dei dati sul piano cartesiano cercando di capire che caratteristiche dovrebbe avere la funzione approssimante.

Prova a migliorare l'approssimazione utilizzando una tipologia di funzione che rispecchi maggiormente le caratteristiche della nostra spezzata. Per esempio, l'andamento dei dati suggerisce qualcosa sul comportamento agli estremi dell'intervallo che stiamo considerando della funzione che possiamo scegliere? Possiamo pensare a una funzione che rispecchi questa caratteristica?

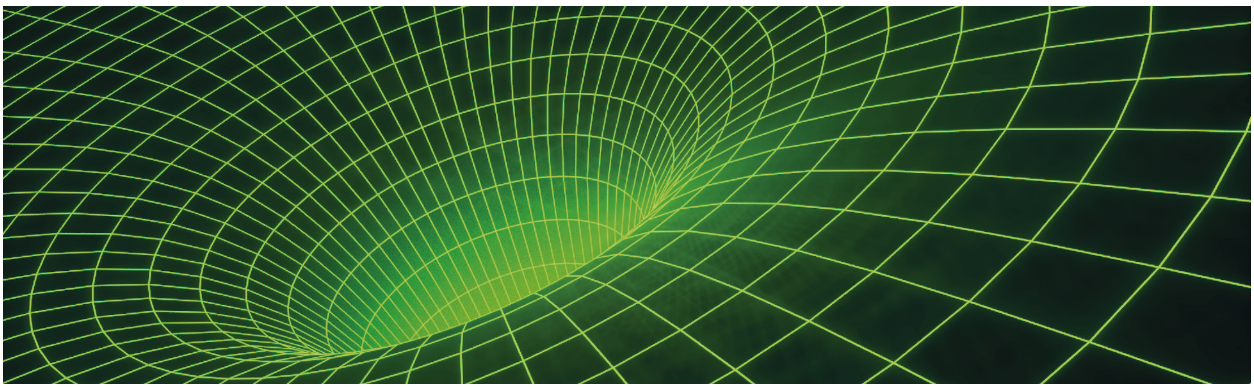
Con *estremi dell'intervallo* intendiamo il valore minimo e massimo che assume la variabile indipendente χ. Qui si tratta di capire se la funzione $\chi(b_{NR})$ con la quale vogliamo approssimare i dati ha un andamento che la porta a crescere indefinitamente per valori via via più piccoli di b_{NR} (come un esponenziale) oppure se per un determinato b_{NR0} è una funzione che tende a infinito nel qual caso avremmo a che fare, per esempio, con una funzione razionale fratta.

Probabilmente, ci sono diverse tipologie di funzioni con le caratteristiche che ti servono ma l'obiettivo è quello di risolvere il problema con funzioni per quanto possibile semplici e quindi - suggerimento - una funzione razionale fratta potrebbe fare al caso nostro.

In questa fase del lavoro hai molta libertà di scelta, quindi, con ogni probabilità, dovrai fare parecchie prove ... un software CAS con il lavoro impostato bene ti permetterà di provare modificando solo alcune scelte ottenendo automaticamente il nuovo risultato. Ricorda: la stima dell'errore può guidare verso la soluzione ottimale o anche solo la migliore.

Come al solito, una volta scelta l'approssimazione, stima l'errore (a un eventuale committente questa informazione è necessaria).

L'obiettivo è quello di migliorare l'approssimazione ottenuta in precedenza **(cfr. 2.3 Una funzione polinomiale nella pagina precedente)** e quindi questo *step* del laboratorio è un successo se l'errore è inferiore a quello stimato nel tentativo precedente (quello con funzioni polinomiali).




10

3. Soluzioni

Innanzitutto riportiamo qui di seguito la tabella con la conversione dell'angolo di scattering in radianti (ultima colonna della tabella, evidenziati in colore rosso).

b_{NR}/M	E_{NR}/M	J_{NR}/M	$\chi_{NR} \cdot M$
9.6	1.0225555(50)	1.099652(36)	5,3372169
9.8	1.0225722(50)	1.099652(36)	4,41568
10	1.0225791(50)	1.145523(38)	3,8903389
10.6	1.0225870(50)	1.214273(40)	3,00197
11	1.0225884(50)	1.260098(41)	2,6529
12	1.0225907(50)	1.374658(45)	2,1066124
13	1.0225924(50)	1.489217(48)	1,7732545
14	1.0225931(50)	1.603774(52)	1,541126
15	1.0225938(50)	1.718331(55)	1,368338
16	1.0225932(50)	1.832883(58)	1,233948

3.1. Una funzione polinomiale

Decidi quali dati rappresentare sull'asse delle ascisse e quali sull'asse delle ordinate. Riporta quindi i dati su un piano cartesiano unendo i punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata per avere un'idea dell'andamento dello scattering in funzione della variabile indipendente.

Poiché l'obiettivo finale è quello di approssimare i valori dello scattering è bene che sia questa la grandezza da posizione sull'asse delle ordinate come variabile dipendente, rispetto ad un'altra, per esempio b_{NR}/M che è detta indipendente e posta sull'asse delle ascisse.

Qui di seguito si può trovare la rappresentazione dei dati su un piano cartesiano. Nello stesso

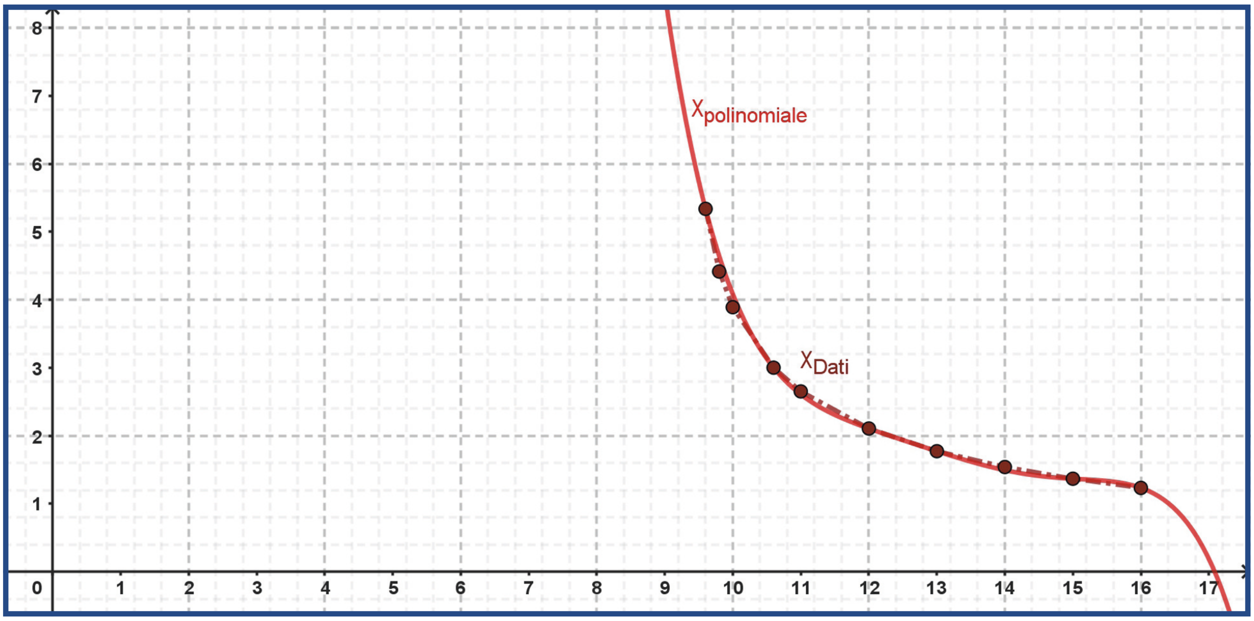


grafico è tracciata, in colore più chiaro la curva che rappresenta il polinomio approssimante, denominata $\chi_{polinomiale}$).

Osserva i punti sperimentali e la spezzata che si ottiene unendo questi punti, prova ad utilizzare un polinomio per approssimarli, in quanto sia facilmente ricavabile e studiabile. Determina una funzione $\chi(b_{NR})$, un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

L'andamento dei dati non suggerisce nessuna funzione in particolare, per cui cerchiamo, come suggerito, di approssimarli con un polinomio. Nel nostro caso scegliamo un polinomio di quinto grado che, avendo sei parametri, richiederà di imporre il passaggio per sei punti tra quelli forniti. Dopo qualche tentativo abbiamo scelto i punti n. 1, 4, 6, 7, 9 e 10 (in pratica abbiamo preso le ascisse delle corrispondenti righe della prima colonna - b_{NR}/M - e le ordinate dalla quarta colonna - χ_{NR}. Il polinomio ottenuto è il seguente (dove i parametri sono arrotondati a tre cifre decimali per comodità di lettura):

$$\chi(b) =- 0.004b^5 + 0.267b^4 - 7.162b^3 95.661b^2 +$$
$$-637.3336b + 1698.557$$

Il grafico della funzione polinomiale che abbiamo ricavato è mostrato, come già detto, nella figura che si trova nella pagina precedente.

Fai una stima dell'errore che si commette utilizzando la funzione per approssimare i dati. Se l'errore è troppo alto o pensi di poterlo migliorare, puoi pensare di cambiare i punti che hai scelto per ricavare i parametri.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per stimare l'errore (cfr. 1. Il calcolo dell'errore a pagina 5) e per approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

Per stimare l'errore abbiamo calcolato scarto quadratico in quanto molto semplice ed efficace da utilizzare. Il calcolo ci fornisce un errore nell'ordine di 10^0, per la precisione 0.57. È un errore ancora un po' troppo elevato, per cui ora cercheremo di trovare una funzione che permetta un'approssimazione più precisa.

3.2. Maggiore attenzione ai dati

Prova a migliorare l'approssimazione utilizzando una tipologia di funzione che rispecchi maggiormente le caratteristiche della nostra spezzata. Per esempio, l'andamento dei dati suggerisce qualcosa sul comportamento agli estremi dell'intervallo che stiamo considerando della funzione che possiamo scegliere? Possiamo pensare a una funzione che rispecchi questa caratteristica?

La risposta a questo quesito ha richiesto di *indagare* tra un gran numero di funzioni di diversa tipologia, dopo vari tentativi abbiamo optato per una funzione razionale fratta: la funzione approssimante sembra debba avere almeno un asintoto verticale appena a sinistra del primo punto sperimentale per cui abbiamo cercato una funzione del tipo:

$$\chi(b_{NR}) = \frac{a \cdot b_{NR}^3 + b \cdot b_{NR}^2 + c \cdot b_{NR} + d}{(e \cdot b_{NR} + 1) b_{NR}^2}$$

A questo punto abbiamo imposto il passaggio per cinque punti sperimentali, per la precisione i punti n. 1, 4, 6, 8 e 10 ottenendo la funzione che segue:

$$\chi(b_{NR}) = \frac{-0.042 \cdot b_{NR}^3 + 0.395 \cdot b_{NR}^2 - 21.922 \cdot b_{NR} + 178.552}{(1 - 0.111 \cdot b_{NR}) \cdot b_{NR}^2}$$

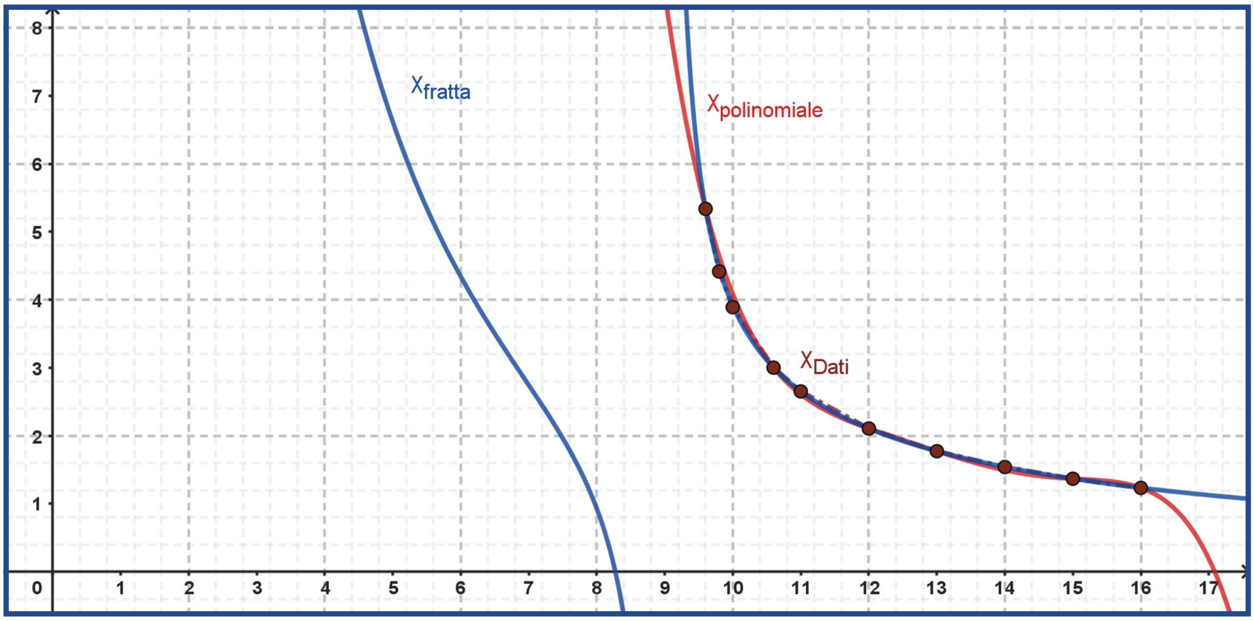
La funzione trovata è tracciata in colore blu nel grafico che si trova in questa stessa pagina. Abbiamo lasciato anche il ramo della funzione per valori più vicini allo zero, fuori dall'intervallo che ci interessa, per completezza, in questo modo si intuisce chiaramente la presenza di un asintoto verticale di equazione $b_{NR} = 1/0.111$.

Come al solito, una volta scelta l'approssimazione, stima l'errore (a un eventuale committente questa informazione è necessaria).

Ancora una volta, abbiamo calcolato lo scarto quadratico medio ottenendo un errore nell'ordine di 10^0, più esattamente pari a 0.27

3.3. Conclusioni

Giunti ormai al termine del nostro laboratorio possiamo infine analizzarlo alla luce del lavoro svolto e trarne alcune conclusioni. Per esempio, gettando uno sguardo solo all'andamento delle funzioni approssimanti possiamo subito decidere quale delle tre grandezze poste in relazione allo scattering ha, almeno in apparenza, una maggior influenza su di esso: mentre il valore dell'energia iniziale del sistema rimane sostanzialmente invariato rispetto alle evidenti modificazioni del valore di scattering, quello che invece subisce subisce la variazione maggior è il parametro di impatto.



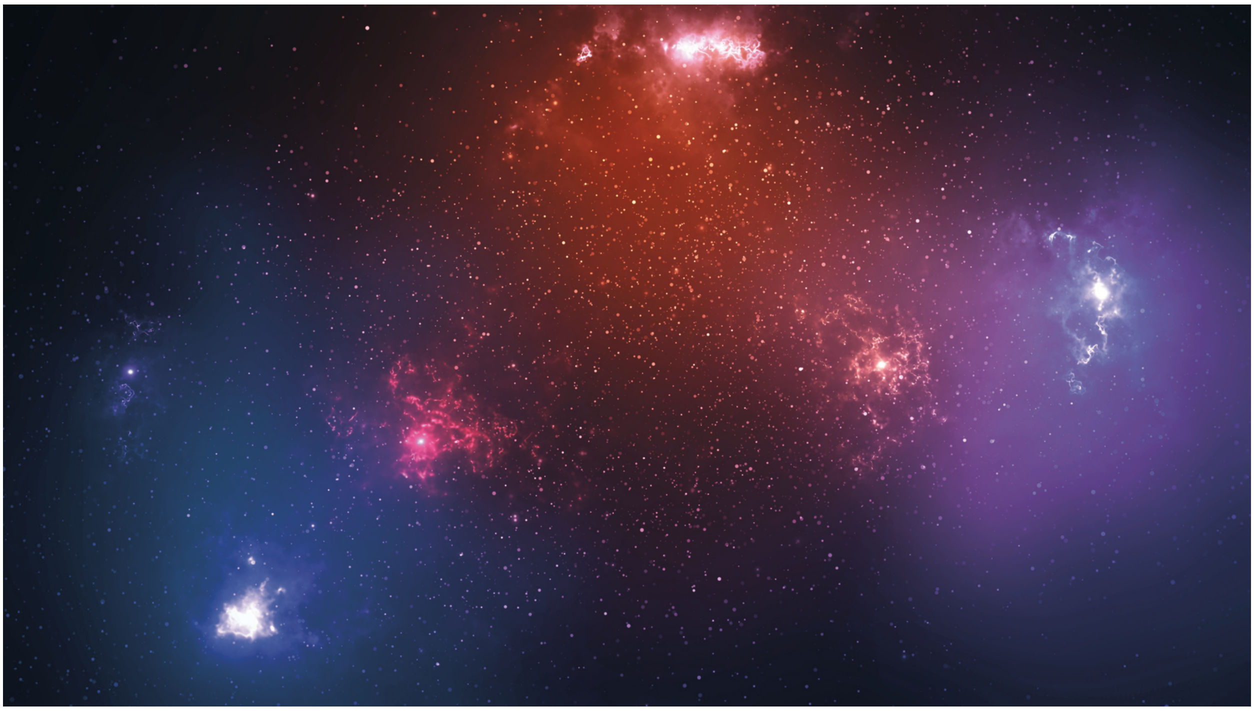
4. Esercizi

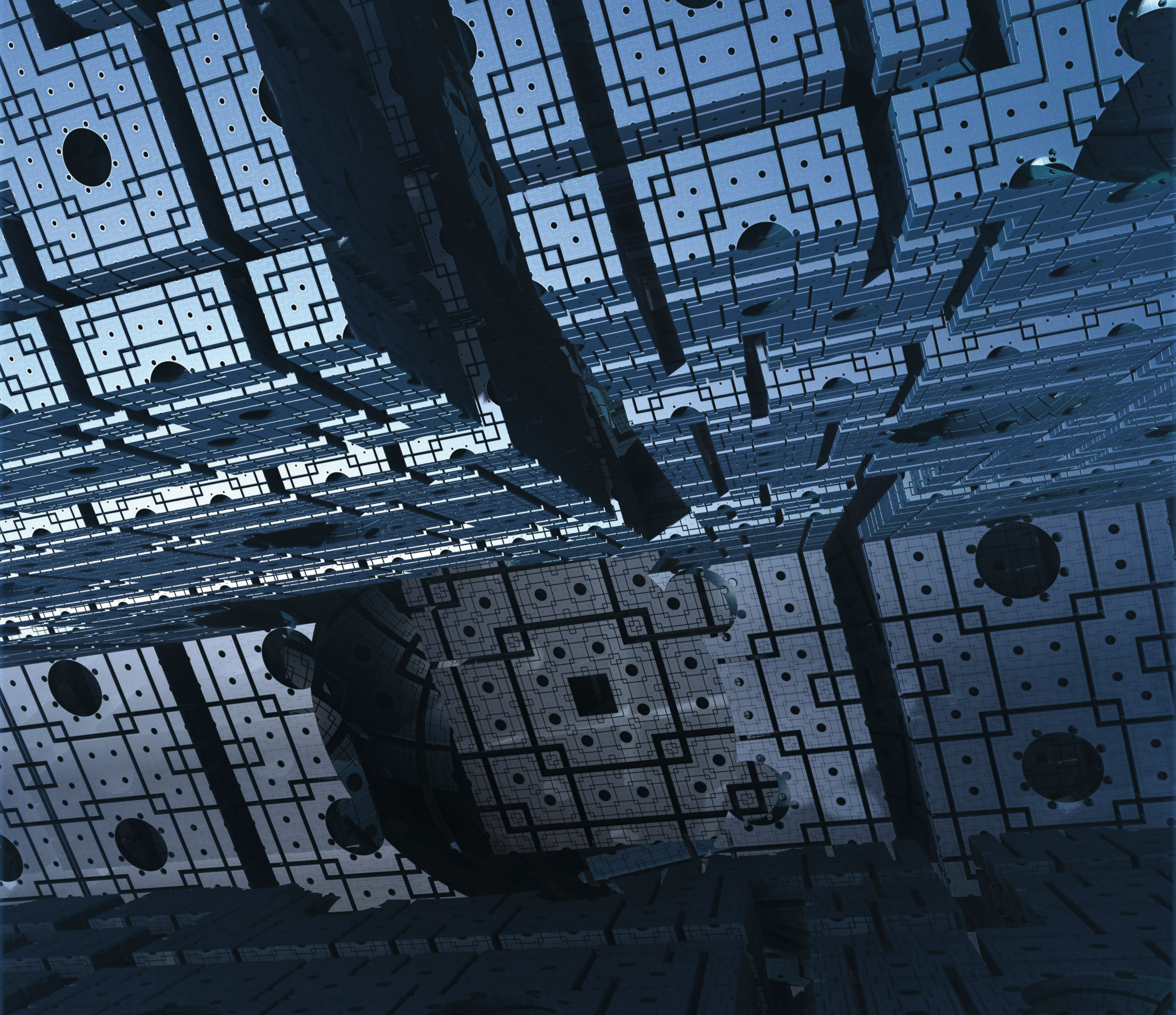
La tabella dei dati, che riproponiamo qui di seguito (con l'angolo di scattering misurato in radianti) per comodità di lettura, riporta anche i dati di energia E_{NR} e momento angolare J_{NR}. Anche questi valori dipendono dal parametro di impatto b_{NR}, come l'angolo di scattering.

b_{NR}/M	E_{NR}/M	J_{NR}/M	χ_{NR} . M
9.6	1.0225555(50)	1.099652(36)	5,3372169
9.8	1.0225722(50)	1.099652(36)	4,41568
10	1.0225791(50)	1.145523(38)	3,8903389
10.6	1.0225870(50)	1.214273(40)	3,00197
11	1.0225884(50)	1.260098(41)	2,6529
12	1.0225907(50)	1.374658(45)	2,1066124
13	1.0225924(50)	1.489217(48)	1,7732545
14	1.0225931(50)	1.603774(52)	1,541126
15	1.0225938(50)	1.718331(55)	1,368338
16	1.0225932(50)	1.832883(58)	1,233948

Per verificare quello che hai imparato però ti diamo un ultimo compito: cerca funzioni fit per approssimare il momento angolare.

Si tratta di seguire una strada simile a quella già percorsa per l'angolo di scattering.





LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

INM

ISMAR
Istituto di Scienze Marine

LSS G.B. Grassi
liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina
www.liceograssilatina.org

CNR - IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone
www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie
www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INM
Istituto di iNGegneria del Mare
www.insean.cnr.org

CNR - ISMAR
Istituto di Scienze MARine
www.ismar.cnr.org