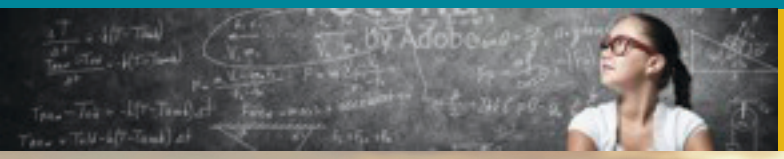
Canale di circolazione

Miglioriamo uno strumento fondamentale



Research in Action - RiA

RESEARCHINACTION.IT

Il canale di circolazione è un impianto sperimentale utilizzato per eseguire test idrodinamici su modelli di navi, eliche e altri dispositivi in scala destinati ad uso acquatico. Tramite questo strumento è possibile ottimizzare la fase progettuale, testando in un ambiente isolato i modelli prima di costruire gli apparati in scala reale, evitando così sprechi di denaro e materiali. Il canale di circolazione dell'INM (l'Istituto di iNgegneria del Mare), che si trova a Roma, è uno dei più grandi al mondo.

23 - Canale di circolazione - 05.23
Revisione 0.1 del 07.06.23

math inside

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Canale di circolazione - Miglioriamo uno strumento fondamentale

Sommario dei contenuti

Blockly è un generatore di codice open source sostenuto da Google: https://developers.google.com/blockly/.

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/materials/23-Canale-di-circolazione.pdf**;

» il materiale a supporto del laboratorio: **http://researchinaction.it/materials/23-Canale-di-circolazione.zip**.

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**.

RiA Toolbox Blockly GeoGebra xMaxima G.B. GRassi

Canale di circolazione

Miglioriamo uno strumento fondamentale

1. Introduzione

Questo laboratorio è stato sviluppato da Antonio Boscaro, Emanuele De Angelis, Delfo Galante, Matteo Giancristofaro, Gabriele MIlani in collaborazione con il dottor Alessandro Moriconi (Istituto di iNgegneria del Mare di Roma), il progetto è stato coordinato dal professor Grassucci (Iss G.B. Grassi di Latina).

1.1. Il canale di circolazione

Il canale di circolazione è un impianto sperimentale utilizzato per eseguire test idrodinamici su modelli di navi, eliche e altri dispositivi in scala destinati ad uso acquatico. Tramite questo strumento è possibile ottimizzare la fase progettuale, testando in un ambiente isolato i modelli prima di costruire gli apparati in scala reale, evitando così sprechi di denaro e materiali. Il canale di circolazione dell'INM (l'Istituto di iNgegneria del Mare), che si trova a Roma, è uno dei più grandi al mondo.

Nel dettaglio, un canale di circolazione è formato da una turbina che spinge l'acqua attraverso un canale fino alla vasca usata per testare i modelli di navi e di eliche.

L'istituto possiede anche un secondo *canalino*: accanto a quello principale infatti ce n'è uno di dimensioni ridotte utilizzato a scopi didattici. È proprio di questo apparato che ci occuperemo in questo laboratorio. Il canale didattico, su cui lavoreremo, è munito di un display che mostra un valore N crescente all'aumentare della portata Q del canale. Tale valore però non ha un significato fisico noto (non è presente nessuna unità di misura sul display), ma, dopo un'analisi qualitativa, si è solamente dedotto che è direttamente proporzionale a Q.

Il canale di circolazione didattico che si trova presso l'Istituto di ingegneria del mare di Roma e che è oggetto di questo laboratorio.

1.2. Prerequisiti

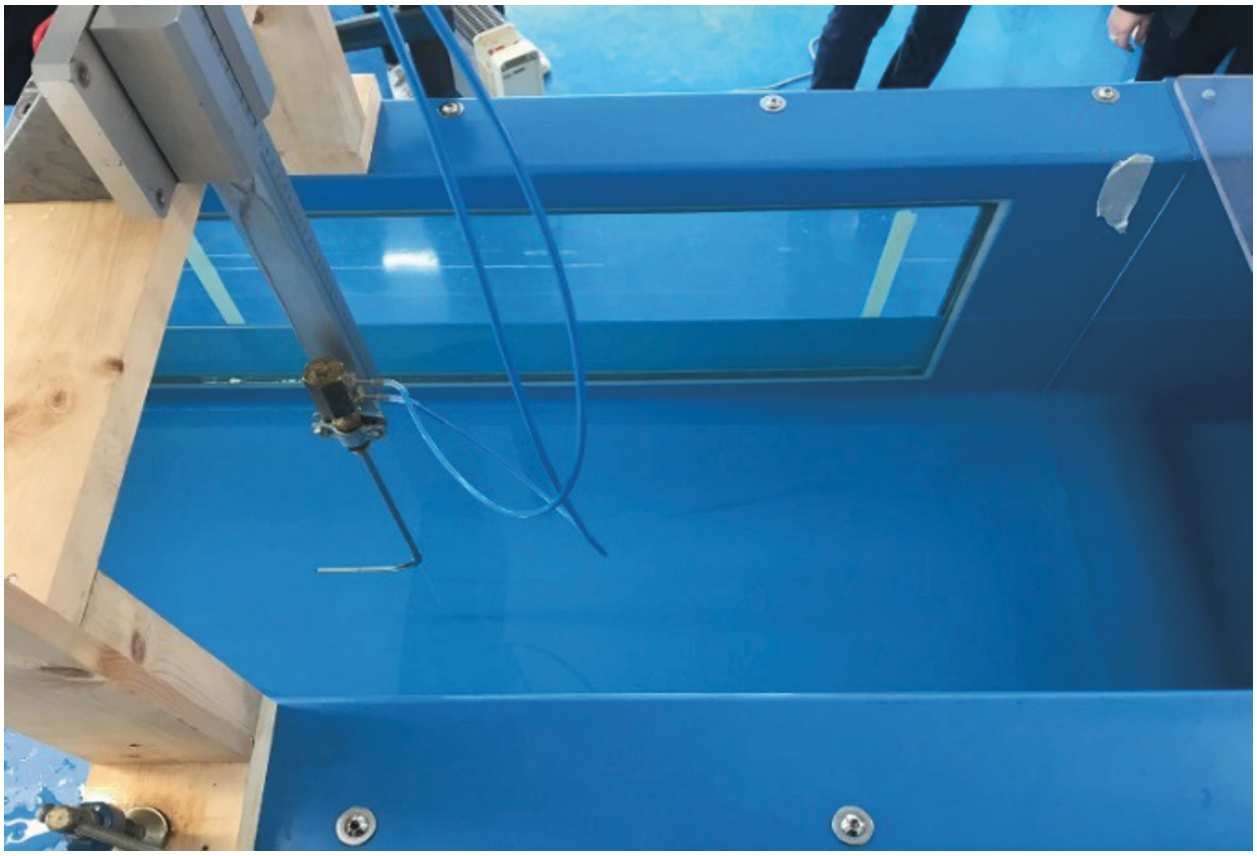
Per affrontare questo laboratorio è necessario:

» conoscere le principali grandezze fisiche che si incontrano in meccanica e i rudimenti dell'analisi dimensionale;
» saper approssimare una serie di dati sperimentali con una funzione, anche semplicemente polinomiale, e stimare in qualche modo l'errore commesso.

Può sicuramente tornare utile l'utilizzo di un'applicazione per il calcolo simbolico (CAS - Computer Algebra System), in modo particolare per l'approssimazione *(fit)* dei dati.

1.3. Obiettivi

L'obiettivo di questo laboratorio è determinare una funzione che restituisca la velocità dell'acqua in funzione del livello dell'acqua (l'altezza, la profondità) e del valore che compare sul display a partire dai dati sperimentali ottenuti dallo strumento.



Un particolare del tubo di Pitot del canale di circolazione didattico che si trova presso l'Istituto di ingegneria del mare di Roma (foto gentilmente concessa dal dott. Alessandro Moriconi CNR-INM).

2. Il problema

2.1. I dati sperimentali

Presso l'INM è stata effettuata una campagna sperimentale in cui è stata misurata la velocità del flusso dell'acqua per determinati valori mostrati sul display *(N)*, di cui abbiamo parlato in precedenza, e della profondità dell'acqua nella vasca *(h_0)*. Per essere più precisi, le misure sono state effettuate con un *tubo di Pitot*, uno strumento da cui si ricava la pressione dinamica del fluido in uno specifico punto (e non direttamente la velocità).

La tabella che segue mostra le misure: le righe corrispondono a valori di *N* diversi, le colonne a differenti valori della profondità dell'acqua nella vasca.

N	ho = 0,250 (kPa)	ho = 0,300 (kPa)	ho = 0,350 (kPa)
0	0,000	0,000	0,000
5	0,009	0,005	0,002
10	0,044	0,024	0,009
15	0,112	0,057	0,024
20	0,232	0,112	0,055
25	0,409	0,204	0,099
30		0.330	0.170
35		0.484	0.272
40			0.409

2.2. Rappresentazione dei dati

Come dati di partenza abbiamo i valori della pressione misurata con il tubo di Pitot, come già detto, per specifici valori della profondità dell'acqua h_0 e del numero mostrato dal display *N*, proporzionale alla portata del canale. Per alcuni valori di h_0 ed *N* non è stato possibile ottenere misure accettabili a causa del moto turbolento dell'acqua (misure che possiamo ignorare perché relative a condizioni che non permettono l'utilizzo dell'apparato) e quindi abbiamo riportato qui solo le misure accettabili.

2.3. Approssimazione di un solo set di dati

Il problema richiede di approssimare i dati con una funzione che dipende da due variabili ma per ora cercheremo un'approssimazione solo in funzione di *N* per cui iniziamo a lavorare solo per uno specifico valore della profondità dell'acqua.

Concentra l'attenzione, per ora, solo sulla seconda colonna, quella che riporta le misure relative a $h_0 = 0.250$. Prova a rappresentare i dati su un piano cartesiano. Quale può essere la variabile indipendente, quella che sarà rappresentata sull'asse delle ascisse e quale quella dipendente, che finirà sull'asse delle ordinate?

A questo punto può essere utile ricorrere a un software CAS, come per esempio GeoGebra, per velocizzare il lavoro. In ogni caso, se preferisci lavorare solo con carta, penna e calcolatrice, puoi utilizzare il piano cartesiano che trovi nella pagina successiva.

Adesso osserva l'andamento dei dati sul piano cartesiano. Questo andamento suggerisce una particolare funzione?

Riconoscere una particolare funzione o una specifica tipologia può aiutare nel seguito quando

dovremo ricercare una funzione approssimante.

Ora cerchiamo una funzione che approssimi al meglio i dati che abbiamo appena rappresentato.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

Se l'andamento dei punti sul grafico ti ricorda una particolare tipologia di funzioni, prova a determinare una specifica funzione di quel tipo che ricalchi l'andamento dei dati sperimentali ma ricorda che è sempre possibile approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale, una tipologia di funzioni piuttosto flessibile.

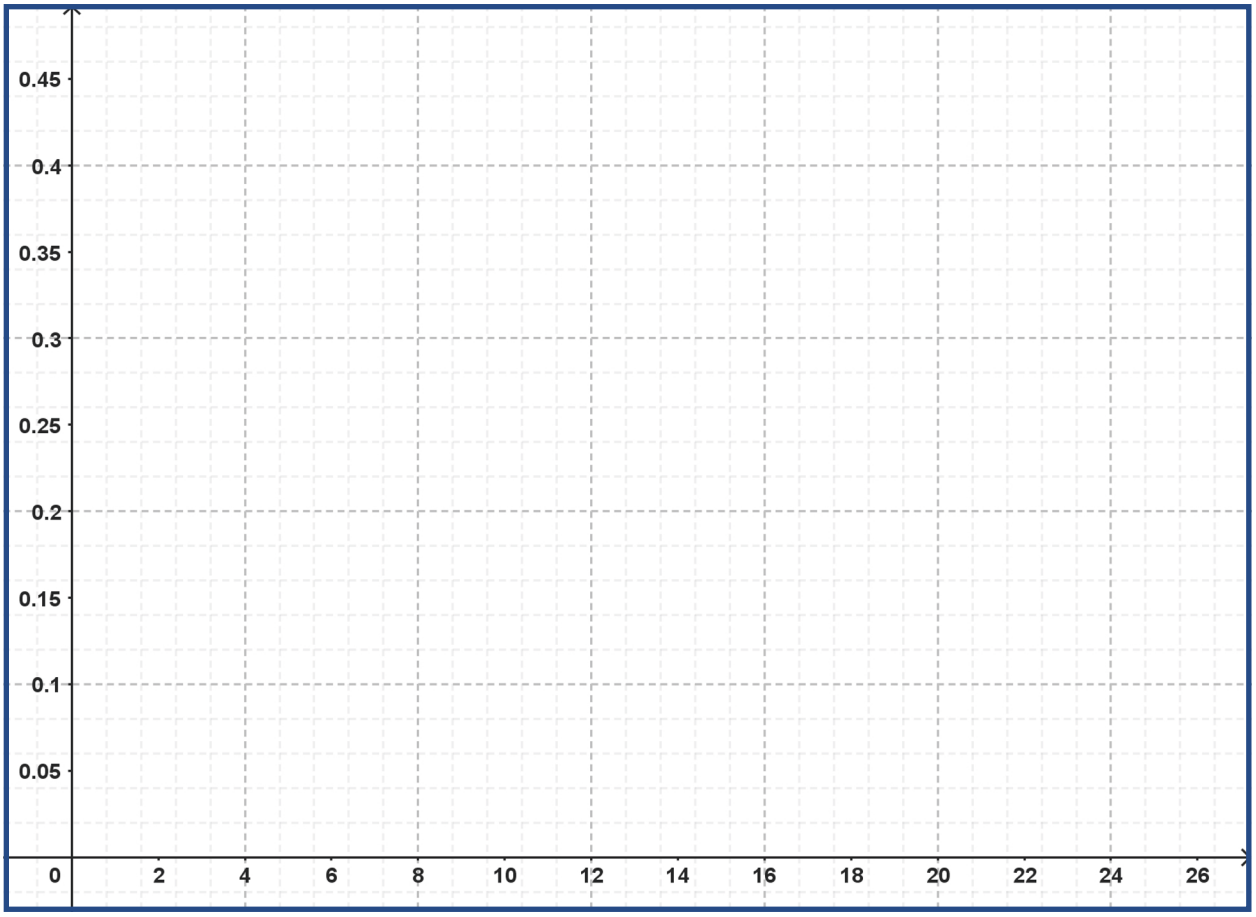
In sostanza si tratta di definire una funzione del tipo desiderato generale ma dipendente da alcuni parametri e determinare i parametri in modo che il grafico di questa funzione passi per alcuni punti sperimentali scelti in modo opportuno. In generale, una funzione semplice è preferibile a una più complessa, quindi conviene scegliere, per esempio, polinomi di grado basso (terzo o quarto grado).

È chiaro che avendo pochi parametri a disposizione (infatti, per esempio, un polinomio di quarto grado dipende solo da cinque parametri) saranno possibili più funzioni approssimanti di quante ce ne possano servire. Sta a te provare diverse combinazioni alla ricerca dell'errore più basso e quindi dell'approssimazione migliore.

Se sei riuscito a trovare una funzione che si adatta ai dati, è il momento di valutare la precisione del lavoro fatto: determina l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

Se l'errore è nell'ordine di 10^{-3} o anche solo di 10^{-2} hai fatto un buon lavoro. Possiamo procedere oltre. Se l'errore è troppo alto,prova a modificare le tue scelte:

» puoi usare una funzione dello stesso tipo cambiando i punti scelti per determinare i valori dei parametri (qui ti potrebbe venire in aiuto un software CAS che permetterebbe di ripetere i



calcoli solo modificando i dati selezionati);

» puoi provare a usare funzioni di tipo differente.

Alla fine di questo *step* del percorso dovresti avere una funzione $p_{250}(N)$ che approssima in modo ottimale o quasi ottimale la prima serie di dati riportata **nella tabella di pagina 7**.

Proviamo di nuovo

Si tratta di ripetere il procedimento per la seconda serie di dati, quelli contenuti nella terza colonna della tabella, relativi al valore $h_0 = 0.300$. Ricorda che l'obiettivo finale non è quello di approssimare le singole serie di dati ma quello di trovare una funzione di due variabili quindi, fidati, potrebbe essere utile cercare un'approssimazione con una funzione $p_{300}(N)$ simile a quella precedente.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. 1. Il calcolo dell'errore a pagina 5).

Usa lo stesso procedimento per la seconda serie di dati, quella con $h_0 = 0.300$ (sono riportati nella terza colonna della tabella dei dati).

Per avere una visione d'insieme del lavoro (anche se stai usando un software CAS) potrebbe essere una buona idea utilizzare lo stesso piano cartesiano per rappresentare tutte le serie di dati., quello che trovi nella pagina precedente e sul quale hai già lavorato. Magari aiutati rappresentando i dati con colori differenti.

Di nuovo: determina l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

Anche in questo caso, se l'errore è è nell'ordine di 10^{-3} o anche solo di 10^{-2} vuol dire che ci siamo, stiamo procedendo sulla strada giusta. In caso contrario prova a modificare i punti scelti per determinare la funzione approssimante.

A questo punto dovremmo avere due funzioni che approssimano due insiemi di dati (le due colonne della tabella, corrispondenti ai valori $h_0 = 0.250$ e $h_0 = 0.300$).

Ancora una volta

Se sei arrivato fin qui, completa il lavoro con i dati della terza serie, riportati nella quarta colonna della tabella dei dati.

Ripercorri ancora una volta la stessa strada: approssima l'ultima colonna della tabella, quella relativa a $h_0 = 0.350$.

Ricorda: è decisamente una buona idea usare una funzione o polinomio molto simile alle due trovate precedentemente.

Infine determina anche per questo set di dati l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

Un errore sulla seconda, terza cifra decimale indica sicuramente un buon risultato.

2.4. La funzione che approssima tutti i dati!

Arrivati fin qui abbiamo stimato i dati come se fossero tre esperimenti diversi e quindi con tre funzioni simili, ma l'obiettivo del laboratorio è quello di trovare una funzione che possa sostituire i dati ma che dipenda sia da N che da h_0: quella che comunemente viene detta una funzione a più variabili.

Il fascicolo *Onde gravitazionali 2* (http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/05/09-Onde-gravitazionali-2.pdf) affronta, in un contesto differente, la ricerca di una funzione fit che approssimi al meglio una serie di dati che dipende da due variabili (una funzione a più variabili). Anche il fascicolo MathByNight propone un problema molto simile (cfr. 2. Oblatezza di stelle di neutroni a pagina 6): http://researchinaction.it/materials/15-MathByNight-2019.pdf.

Utilizziamo il lavoro già fatto: cosa hanno in comune tutte e tre le funzioni?

Prova a pensare ad un modo che ti permetta di utilizzare il lavoro precedente per ricavare un'unica funzione a due variabili $p(N, h_0)$ - p funzione di N e h_0. Qualcosa che fornisca il valore (stimato, approssimato) della pressione fissati i valori di N e h_0. Se hai seguito i nostri consigli, dovresti avere tre funzioni di N che hanno lo stesso aspetto, tre polinomi che hanno lo stesso grado e lo stesso numero di parametri. Per esempio, se hai scelto un polinomio di terzo grado

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

avrai tre polinomi con tre serie di parametri: una per il valore $h_0 = 0.250$, un'altra per $h_0 = 0.300$ e l'ultima per $h_0 = 0.250$. Una buona idea potrebbe essere quella di scrivere una funzione ausiliaria $a(h_0)$ che approssimi i tre valori del parametro a. Stesso lavoro per tutti gli altri parametri. Sostituendo le i parametri in funzione di h_0 improvvisamente ti ritroverai con una funzione $p(N, h_0)$ che dipende da entrambe le variabili.

Approssima ogni parametro con una funzione di h_0. Ora dovresti essere in grado di approssimare la funzione a due variabili!

Una valutazione del lavoro fatto

Completa il lavoro fornendo una stima dell'errore con cui la funzione $p(N, h_0)$ approssima i dati. Tieni conto che un errore nell'ordine di 10^{-2} è indice di un lavoro davvero ben fatto!

2.5. Un ultimo sforzo

Abbiamo quasi finito. La richiesta non era quella di trovare un'approssimazione per la pressione ma di formire un'espressione per la velocità dell'acqua nella vasca. Dobbiamo solo cercare un modo per passare dalla pressione alla velocità! Questo modo è il *teorema di Bernoulli*, che mette in relazione la pressione, la densità, la velocità e l'altezza, la profondità, di un fluido. In particolare la formula è:

$$p + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p g h_2$$

A prima vista la formula sembra alquanto complessa, ma questo è dovuto ala sua generalità, infatti tiene in considerazione una miriade di casi in cui può essere applicata. Il nostro è un problema specifico, nel quale l'equazione si semplifica notevolmente (davvero!) poiché sono presenti dei valori costanti: pressione, densità del fluido e altezza dell'acqua. L'equazione semplificata quindi sarà:

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

dove ρ è la densità dell'acqua.

Non ci resta che ricavare la velocità da questa formula:

$$v = \sqrt{2p}$$

A questo punto, riesci a trasformare la funzione $p(N, h_0)$ che hai ricavato (con grande fatica) in una funzione $v(N, h_0)$ che fornisce la velocità v in funzione del valore di N e di $h0$?

Non dovrebbe essere difficile ... a questo punto il tuo lavoro è terminato e i matematici e gli ingegneri dell'Istituto di ingegneria del mare (CNR-INM) di Roma potranno usare la tua funzione per utilizzare meglio il canale di corcolazione didattico!

3. Soluzioni

... abbiamo lavorato direttamente sui valori della pressione perché le funzioni approssimanti intermedie sono più semplici ... (Antoine Brouschels).

La citazione riportata è una battuta e l'autore - Antoine Brouschels - è una maccheronica francesizzazione di Antonio Boscaro, uno degli studenti che hanno lavorato al progetto. Qui si vuole, bonariamente, prendere in giro Antonio per le sue non troppo chiare giustificazioni fornite per le scelte fatte!

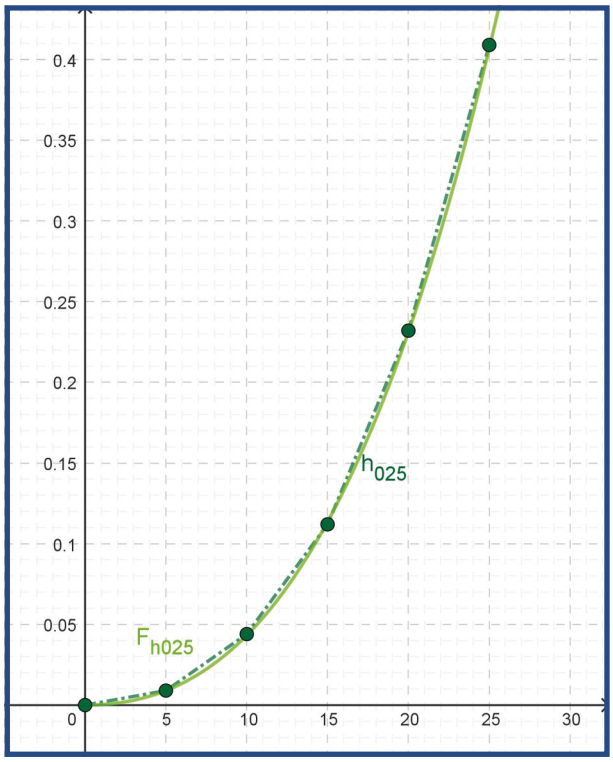
Nella seconda parte del fascicolo - questa - ripercorreremo l'intera esperienza rispondendo ai quesiti e fornendo la nostra soluzione al problema che ti è stato proposto in precedenza.

Concentra l'attenzione, per ora, solo sulla seconda colonna, quella che riporta le misure relative a $h_0 = 0.250$. Prova a rappresentare i dati su un piano cartesiano. Quale può essere la variabile indipendente, quella che sarà rappresentata sull'asse delle ascisse e quale quella dipendente, che finirà sull'asse delle ordinate?

In questo caso la variabile indipendente è il numero che appare sul display cioè N, che quindi rappresenteremo sull'asse delle ascisse; di conseguenza la variabile dipendente sarà la pressione che invece rappresenteremo sull'asse delle ordinate. La figura in basso in questa stessa pagina mostra i dati e la spezzata aperta che li rappresenta in colore più scuro. Per comodità di lettura il grafico è in scala *1:100 (y:x)*.

Adesso osserva l'andamento dei dati sul piano cartesiano. Questo andamento suggerisce una particolare funzione?

A prima vista l'andamento può indicare una funzione polinomiale. Abbiamo deciso quindi di utilizzare una funzione di quarto grado, omettendo però quota e termine di primo grado dato che la funzione sicuramente passa per l'origine degli assi cartesiani e non deve assumere valori negativi.



Se l'andamento dei punti sul grafico ti ricorda una particolare tipologia di funzioni, prova a determinare una specifica funzione di quel tipo che ricalchi l'andamento dei dati sperimentali ma ricorda che è sempre possibile approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale, una tipologia di funzioni piuttosto flessibile.

Dopo vari tentativi e considerando che la funzione sembra debba passare molto vicino all'origine delle coordinate scelte, abbiamo pensato di utilizzare un polinomio di quarto grado con solo i termini di grado 4, 3 e 2 (e quindi avremo bisogno solamente di tre condizioni per determinare i parametri):

$$p(N) = a \cdot N^4 + b \cdot N^3 + c \cdot N^2$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. 1. Il calcolo dell'errore a pagina 5).

Imponiamo il passaggio per il secondo, quinto e sesto punto della serie relativa ai valori che

stiamo trattando si può ottenere la funzione:

$$p_{0.25}(N) = 1.07 \cdot 10^{-8} \cdot N^4 + 1.44 \cdot 10^{-5} \cdot N^3 + 2.88 \cdot 10^{-4} \cdot N^2$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per stimare l'errore (cfr. 1. Il calcolo dell'errore a pagina 5) e per approssimare una serie di dati con una funzione polinomiale (cfr. 4. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

La funzione (i parametri sono riportati con sole due cifre decimali per comodità di lettura) è tracciata nella figura che si trova nella pagina precedente in colore verde chiaro.

Se sei riuscito a trovare una funzione che si adatta ai dati, è il momento di valutare la precisione del lavoro fatto: determina l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

Per la stima dell'errore abbiamo deciso di utilizzare lo scarto quadratico che ci da un errore nell'ordine di 10^{-3}, per la precisione lo scarto è pari a $2 \cdot 10^{-3}$. Un ottimo risultato!

Proviamo di nuovo

Ora dovremmo aver capito come procedere anche per la seconda serie di misure sperimentali.

Usa lo stesso procedimento per la seconda serie di dati, quella corrispondente alla profondità dell'acqua pari a $h_0 = 0.300$

I valori che ci servono sono riportati nella terza colonna della tabella delle misure sperimentali **(cfr. 2.1 Dati sperimentali a a pagina 7)**. Anche in questo caso la variabile indipendente risulta essere N, il numero che appare sul display, che quindi rappresenteremo sull'asse delle ascisse, la pressione sarà invece la variabile dipendente e perciò la rappresenteremo sull'asse delle ordinate.

Per motivi di uniformità, visto che stiamo trattando serie di dati poco differenti l'una dall'altra, la funzione approssimante più conveniente risulta essere una polinomiale di quarto grado simile alla precedente, con solo i termini di quarto, terzo e secondo grado. Abbiamo scelto di imporre il passaggio della funzione per il secondo, sesto e ottavo punto ottenendo il polinomio che segue:

$$p_{0.30}(N) = 1.83 \cdot 10^{-8} \cdot N^4 + 5.77 \cdot 10^{-6} \cdot N^3 + 1.71 \cdot 10^{-4} \cdot N^2$$

Di nuovo: determina l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

Con la funzione approssimante trovata abbiamo un errore di poco più alto rispetto al precedente, nell'ordine di 10^{-2}, pari a $8 \cdot 10^{-3}$, ma comunque buono.

Ancora una volta

Affrontiamo ora, in modo molto simile, la terza serie di misure.

Ripercorri ancora una volta la stessa strada: approssima l'ultima colonna della tabella, quella relativa a $h_0 = 0.350$.

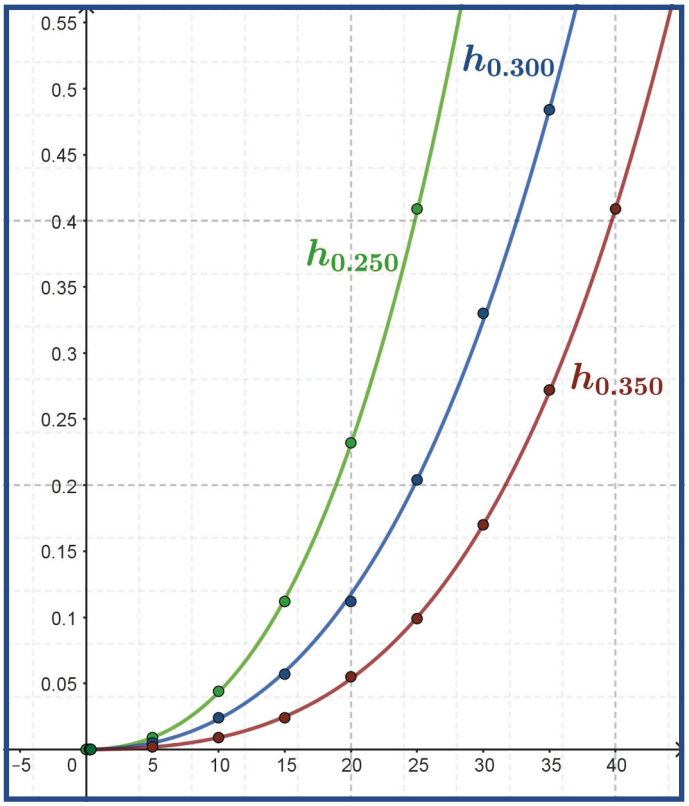
Esattamente come in precedenza, dopo aver rappresentato i dati su un piano cartesiano e aver controllato che hanno un andamento molto simile alle due serie precedenti, abbiamo scelto un polinomio di quarto grado con i soli tre termini di grado più alto. Imponendo il passaggio per il terzo, il settimo e l'ottavo punto abbiamo ottenuto la funzione:

$$p_{0.35}(N) = 5.76 \cdot 10^{-8} \cdot N^4 + 2.64 \cdot 10^{-6} \cdot N^3 + 5.78 \cdot 10^{-5} \cdot N^2$$

Infine determina anche per questo set di dati l'errore compiuto sostituendo ai valori sperimentali la funzione che hai trovato.

L'errore per questo polinomio approssimante è molto simile a quello calcolato nel primo caso, di nuovo nell'ordine di 10^{-3}: $2 \cdot 10^{-3}$. Nel grafico in questa stessa pagina sono tracciati i tre polinomi approssimanti rispettivamente verde, blu e rosso per valori di $h_0 = 0.25$, $h_0 = 0.30$ e $h_0 = 0.35$.

Appare evidente che l'andamento delle tre funzioni è molto simile ed è per questo che abbiamo scelto polinomi dello stesso grado e della stessa tipologia. Inoltre, possiamo notare che tutte e tre hanno origine dallo stesso punto, o meglio passano tutte per l'orgine delle coordinate scelte.



3.1. La funzione che approssima tutti i dati!

Utilizziamo il lavoro già fatto: cos'hanno in comune tutte e tre le funzioni?

Oltre ad avere un andamento simile le tre funzioni approssimanti dipendono tutte da tre parametri, i coefficienti dei termini di quarto, terzo e secondo grado *a*, *b* e *c*. A questo punto potremmo pensare di far dipendere ognuno di questi tre parametri dal valore della profondità dell'acqua h_0. Infatti possiamo pensare alle tre serie di parametri come dati (quasi sperimentali) che corrispondono ai diversi valori della prodondità, così come rappresentati nella tabella che segue.

Sul sito del progetto - http://researchinaction.it/ - è possibile scaricare il materiale a supporto del laboratorio che contiene, tra l'altro, i file GeoGebra con i grafici dei polinomi a una variabile e le approssimazioni dei parametri: http://researchinaction.it/materials/23-Canale-di-circolazione.zip

h_0	$a(h_0)$	$b(h_0)$	$c(h_0)$
0.250	$1.07\ 10^{-8}$	$1.83\ 10^{-8}$	$5.76\ 10^{-8}$
0.300	$1.44\ 10^{-5}$	$5.77\ 10^{-6}$	$2.64\ 10^{-6}$
0.350	$2.88\ 10^{-4}$	$1.77\ 10^{-4}$	$5.78\ 10^{-5}$

Allora non resta che cercare tre funzioni $a(h_0)$, $b(h_0)$ e $c(h_0)$, ognuna capace di approssimare i parametri per i diversi valori di h_0. Il nostro problema, la funzione che dipende sia da N che da h_0, si potrà allora scrivere come:

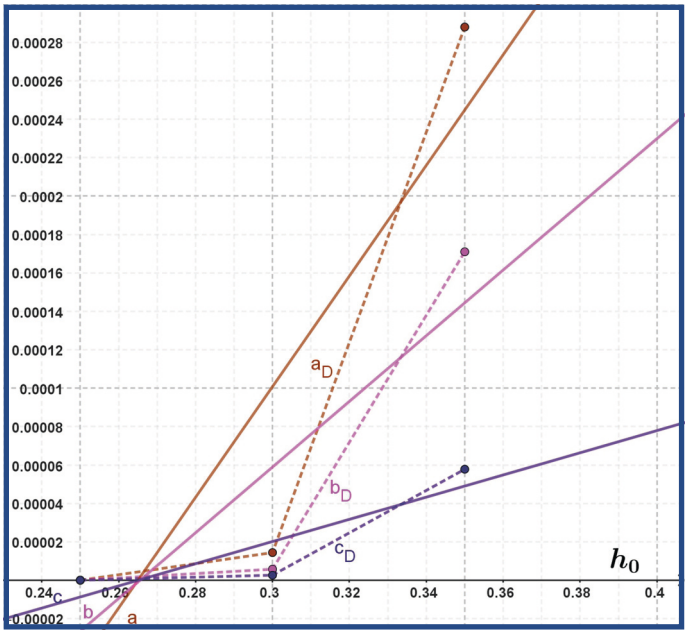
$$p(N,h_0) = a(h_0) \cdot N^4 + b(h_0) \cdot N^3 + c(h_0) \cdot N^2$$

Approssima ogni parametro con una funzione di h_0. Ora dovresti essere in grado di approssimare la funzione a due variabili!

Per capire meglio come fare abbiamo rappresentato i valori dei parametri su un piano cartesiano (sulle ascisse h_0, sulle ordinate il valore dei parametri *a*, *b* e *c*). Il grafico è riportato nella pagina successiva con un rapporto ascisse:ordinate di 500:1 per comodità di rappresentazione. L'andamento di ciascuna serie è *abbastanza* lineare quindi abbiamo scelto di approssimare ogni serie di parametri con una retta. Per determinare le equazioni abbiamo operato in questo modo:

- il coefficiente angolare m_a, m_b, m_c di ogni retta è la media dei (due) coefficienti angolari dei segmenti che si ottengono unendo due punti successivi;
- la *quota* q della retta è ottenuta imponendo il passaggio di ciascuna retta $y = mx + q$ per il baricentro dei tre punti.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati lineari (cfr. 2. Approssimazione di dati lineari a pagina 7).



Con questo procedimento abbiamo ottenuto tre funzioni approssimanti (lineari, tre rette) per ciascuna terna dei valori dei coefficienti *a*, *b* e *c* (le equazioni sono riportate con sole tre cifre decimali per comodità di lettura):

$$a(h_0) = 28.772 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 7.625 \cdot 10^{-4}$$
$$b(h_0) = 17.067 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 4.532 \cdot 10^{-4}$$
$$c(h_0) = 5.779 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 1.532 \cdot 10^{-4}$$

Ci siamo! Ora è sufficiente riprendere il polinomio *p(N)* approssimante generico (che abbiamo usato per le tre serie di dati $h_0 = 0.250$, $h_0 = 0.300$ e $h_0 = 0.350$):

$$p(N) = a \cdot N^4 + b \cdot N^3 + c \cdot N^2$$

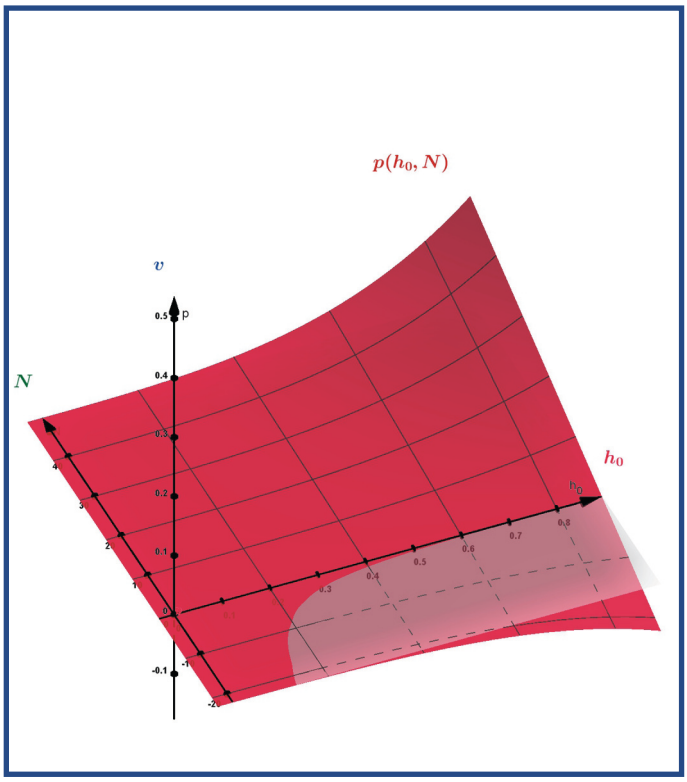
e sostituire i parametri (inizialmente costanti) con le approssimazioni appena trovate ottenendo, finalmente, la funzione cercata:

$$p(N,h_0) = (28.772 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 7.625 \cdot 10^{-4}) \cdot N^4 + (17.067 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 4.532 \cdot 10^{-4}) \cdot N^3 + \\ + (5.779 \cdot 10^{-4} \cdot h_0 - 1.532 \cdot 10^{-4}) \cdot N^2$$

La funzione è mostrata in questa stessa pagina: l'asse delle h_0 è quasi orizzontale nell'immagine (per valori un poco superiori a quelli sperimentali per esigenze grafiche), l'asse delle N è sulla sinistra della figura (i valori di N sono le ascisse nei grafici dei polinomi a una variabile mostrati **a pagina 13**) e quello delle p è verticale.

Una valutazione del lavoro fatto

Completa il lavoro fornendo una stima dell'errore con cui la funzione *p(N, h_0)* approssima i dati. Tieni conto che un errore nell'ordine di ... è indice di un lavoro davvero ben fatto!



Nel complesso la funzione approssima le misure sperimentali con un errore nell'ordine di 10^{-1}, per essere più precisi *0.200*. Un ottimo risultato tenendo conto dello scopo di questo laboratorio!

3.2. Un ultimo sforzo

Ricordiamo che, nel caso specifico che stiamo analizzando, la formula di Bernoulli, molto semplificata, permette di esprimere la velocità in termini della pressione:

$$v = \sqrt{2p}$$

A questo punto, riesci a trasformare la funzione *p(N, h_0)* che hai ricavato (con grande fatica) in una funzione *v(N, h_0)* che fornisce la velocità *v* in

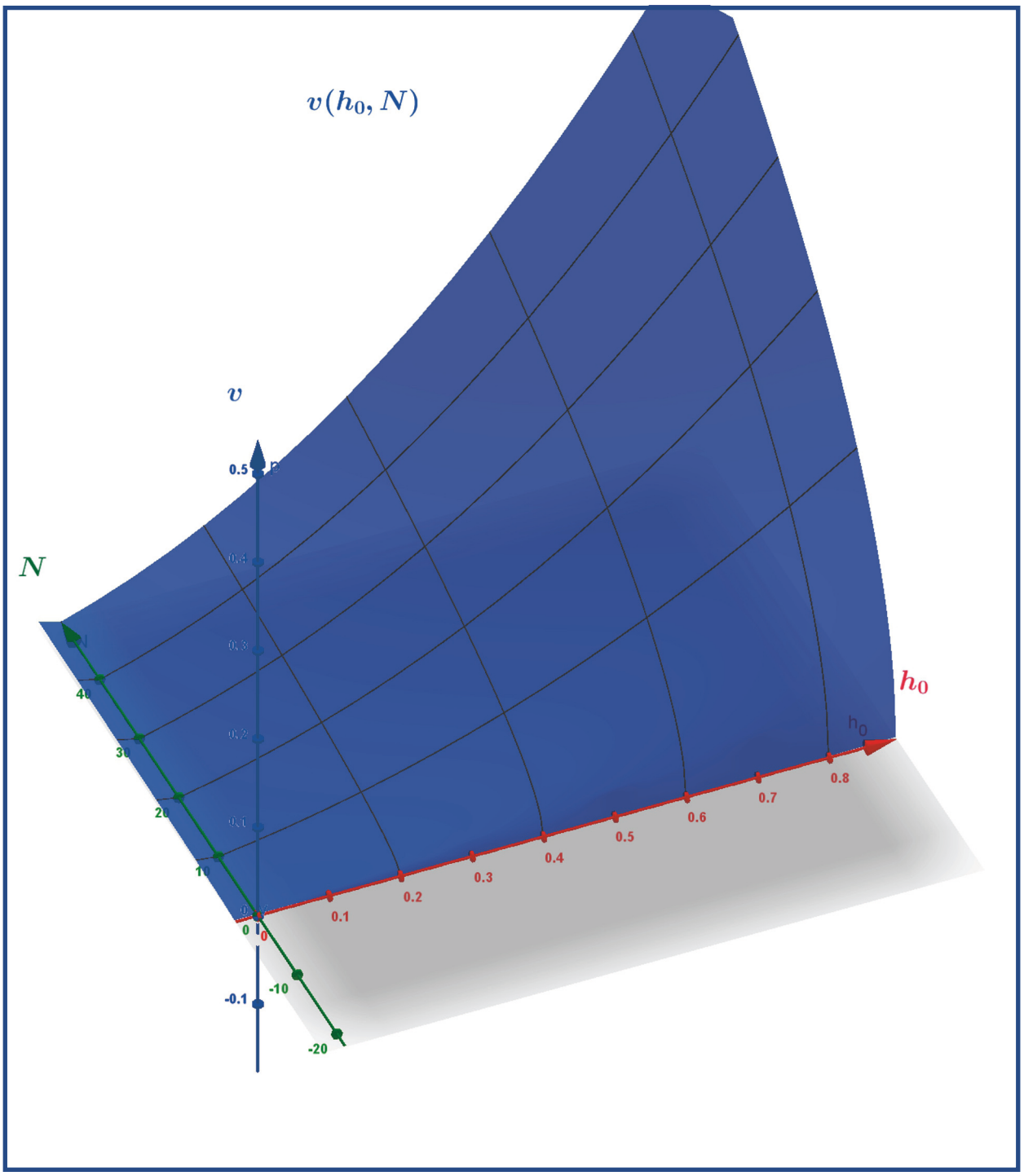
funzione del valore di N e di $h0$?

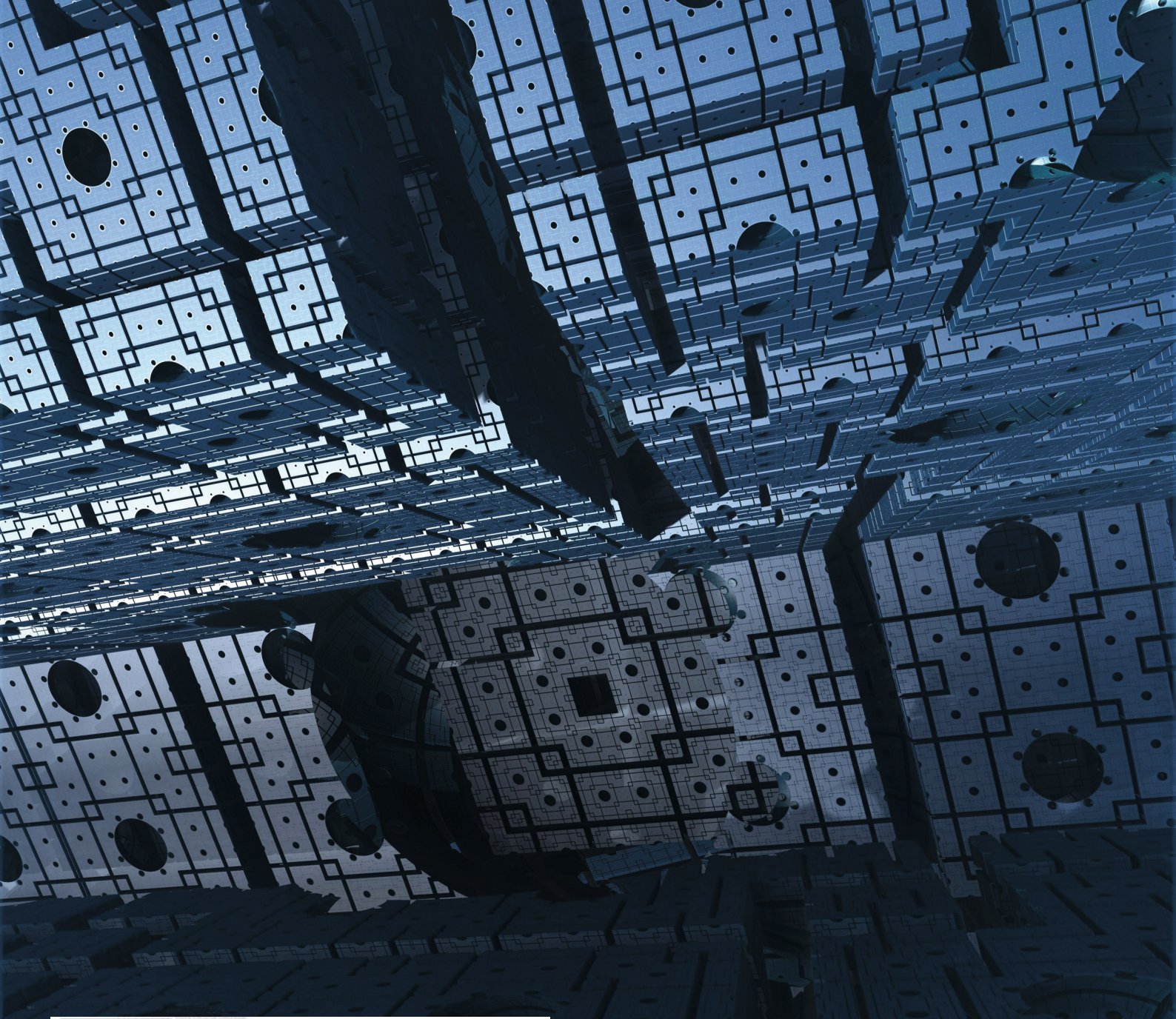
Beh! Questo *step* è senza dubbio il più semplice di tutto il laboratorio. La funzione che esprime la velocità è, banalmente, la radice quadrata del doppio della $p(N, h_0)$ che abbiamo trovato (con grande fatica) in precedenza:

$$v(N,h_0)=\sqrt{2\cdot p(N,h_0)}$$

La figura qui di seguito mostra l'andamento della funzione $v(N, h_0)$. Sull'asse in colore rosso (quasi orizzontale nell'immagine) sono riportati i valori di h_0, sull'asse di colore verde i valori di N (le ascisse dei grafici presentati fino a questo momento) mentre, ovviamente, l'asse verticale (in colore blu) è, ovviamente, relativo ai valori della velocità.

Sul sito del progetto - http://researchinaction.it/ - è possibile scaricare il materiale a supporto del laboratorio che contiene, tra l'altro, il documento xMaxima con lo svolgimento dell'intero percorso: http://researchinaction.it/materials/23-Canale-di-circolazione.zip





LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

INM

ISMAR
Istituto di Scienze Marine

LSS G.B. Grassi

liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina

www.liceograssilatina.org

CNR - IAC

Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone

www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma

Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INM

Istituto di iNgegneria del Mare

www.insean.cnr.org

CNR - ISMAR

Istituto di Scienze MARine

www.ismar.cnr.org