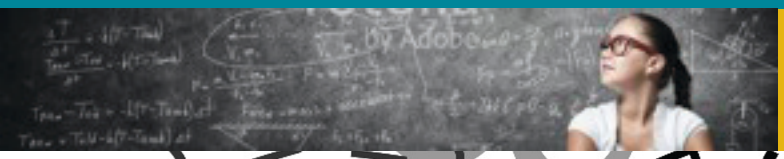
Iperreali

Qual è il numero più piccolo? E il più grande?



Research in Action - RiA

RESEARCHINACTION.IT

24 Iperreali - 05.23
Revisione 2 del 15.09.23

I numeri possono essere: naturali, interi, razionali o iperreali. Ci concentreremo su questi ultimi. Ma qual è la loro particolarità? Gli iperreali aggiungono ai numeri reali dei numeri infinitamente grandi o piccoli che agevolano l'introduzione al concetto di integrale e di derivata.

Gli iperreali sono stati introdotti e formalizzati da Abraham Robinson nel 1966 in un saggio in cui si prospetta un approccio al calcolo differenziale e all'analisi matematica senza utilizzare il concetto di limite.

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Iperreali - Qual è il numero più piccolo? E il più grande?

Sommario dei contenuti

1. Introduzione 5

1.1. Prerequisiti 6
1.2. Obiettivi 6

2. Gli insiemi numerici 7

2.1. Cosa intendiamo con un insieme numerico? 7
2.2. Una classificazione degli insiemi numerici 7
2.3. Alcuni esercizi 8
2.4. U n esempio un poco strano 10

3. Iperreali 11

3.1. Qualche definizione 11
3.2. Ordinamento 12
3.3. Il reciproco di un numero iperreale 12
3.4. Ordinamento 13
3.5. Operazioni 14
3.6. Definizione di standard e indistinguibile 15
3.7. Usare gli iperreali 16
3.8. Ma insomma, a cosa servono questi iperreali? 16

4. Soluzioni 19

4.1. Alcuni esercizi 19
4.2. Un esempio un poco strano 20

5. Iperreali 21

5.1. Il reciproco di un numero iperreale 21
5.2. Operazioni 21
5.3. Definizione di standard e indistinguibile 23
5.4. Usare gli iperreali 24
5.5. Ma insomma, a cosa servono questi iperreali? 25
5.6. Generalizzare 27

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/materials/24-Iperreali.pdf**.

Tra i laboratori proposti è possibile leggere anche due fascicoli di argomento simile o correlato:

» **Numeri trascendenti**, questo laboratorio è presentato qui: **http://researchinaction.it/laboratori/numeri-trascendenti/**

» **21 - Derivata aritmetica, la nuova frontiera della matematica?** Questo laboratorio è presentato qui **http://researchinaction.it/2023/06/05/la-derivata-aritmetica/**

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**.

Tra i laboratori sviluppati nel progetto ce n'è uno che affronta un curioso tema, la derivata aritmetica, che ha alcuni punti in comune con l'argomento trattato in questo fascicolo. http://researchinaction.it/materials/21-Derivata-aritmetica.pdf

RiA Toolbox Blockly GeoGebra xMaxima G.B. GRassi

Iperreali

Qual è il numero più piccolo? E il più grande?

1. Introduzione

Questo laboratorio è stato sviluppato da Alessandra Mancini, Gabriele Paggiossi, Krystal Perna, Beatrice Rizzuto e Siria Zoratto in collaborazione con la professoressa Annalisa Malusa (la Sapienza di Roma), il progetto è stato coordinato dal professor Grassucci (Iss G.B. Grassi di Latina)..

I numeri possono essere naturali, interi, razionali reali o addirittura *iper*-reali. In questo laboratorio faremo la conoscenza proprio di questi ultimi perchè alcuni problemi, come vedremo, hanno una elegante soluzione usando questo insieme numerico e perchè, come invece vedremo in un secondo laboratorio dedicato all'argomento, permettono un approccio semplice ma rigoroso al calcolo differenziale. Ma qual è la loro particolarità? Gli iperreali aggiungono ai numeri reali dei numeri infinitamente grandi o infinitamente piccoli ma in modo così naturale, così accurato da non accorgersi quasi di aver cambiato contesto.

Tra i laboratori sviluppati nel progetto ce n'è uno di argomento affine: 11 - Numeri trascendenti: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/05/11-Numeri-trascendenti.pdf

Per chiarezza, l'insieme dei numeri iperreali comprende:

» i numeri standard, i reali come li conosciamo, useremo lettere latine minuscole *a*, *b*, ... per indicare i numeri standard
» gli infinitesimi, numeri in modulo più piccoli di qualsiasi numero standard positivo, li indicheremo con lettere greche minuscole α, β, ...
» gli infiniti, numeri più grandi in modulo di qualsiasi numero standard, denotati da lettere latine maiuscole *A*, *B*, ...

Per l'analisi non standard si può consultare *Non standard analysys, lectures on A. Robinson Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers* di W.A.J. Luxembourg: https://authors.library.caltech.edu/75428/1/NON-STANDARD%20ANALYSIS-ROBINSONS%20THEORY%20OF%20INFINITESIMALS-1962.pdf

Gli iperreali sono stati introdotti e formalizzati da Abraham Robinson nel 1966 nel saggio *Non standard Analysis* in cui si prospetta un approccio al calcolo differenziale e all'analisi matematica senza utilizzare il concetto di limite. Robinson in quel testo sostiene che la categoria dei numeri iperreali è l'insieme dei reali, degli infinitesimi, dei reciproci degli infinitesimi (numeri infiniti) e di altri numeri infinitamente vicini ai reali.

Come vedremo nel corso del nostro laboratorio, gli iperreali hanno alcune proprietà in comune con i numeri reali e la loro rappresentazione su una retta deriva direttamente dalla rappresentazione analoga dei numeri reali. Eppure, non tutto è così semplice come finora abbiamo lasciato intendere, c'è un problema … i numeri reali, infatti, hanno una determinata proprietà, enunciata dal *postulato di Eudosso-Archimede*, secondo cui se prendiamo un segmento *A* molto piccolo e un segmento *B* molto grande, esiste:

» un multiplo di *A* maggiore di *B*
» un sottomultiplo di *B* minore di *A*

Questo significa che il *postulato di Eudosso-Archimede* esclude l'esistenza degli iperreali! Il multiplo di un numero reale, per quanto grande possa essere, sarà sempre un numero reale, come il sottomultiplo di un numero reale, per quanto piccolo possa essere, sarà sempre un numero reale.

Perciò, per poter ammettere l'esistenza dei numeri iperreali dobbiamo abbandonare il *postulato di Eudosso-Archimede*, definendo i numeri reali come i numeri standard, in quanto rispettano il postulato, e i numeri iperreali non standard, in quanto non lo rispettano, per questo motivo l'analisi non standard è a volte definita *analisi non archimedea*.

1.1. Prerequisiti

Prima di affrontare questo laboratorio è necessario:

» comprendere il concetto di tangente sia dal punto di vista geometrico che da quello analitico
» conoscere i principi basilari della geometria analitica ed essere in grado di lavorare agilmente sul piano cartesiano

Può essere di aiuto un software CAS (Computer Algebra System).

1.2. Obiettivi

Vogliamo raggiungere una utile conoscenza degli iperreali e di alcune loro applicazioni a semplici problemi di geometria analitica e di fisica.

2. Gli insiemi numerici

Prima di affrontare gli iperreali veri e propri un breve percorso alla scoperta degli insiemi numerici.

2.1. Cosa intendiamo con un insieme numerico?

Un insieme numerico è un raggruppamento, una collezione, di numeri composto da una quantità finita o infinita di elementi *sul quale sono definite alcune operazioni*. Ciò che rende diversi gli insiemi sono queste operazioni e le loro proprietà, gli insiemi numerici sono classificati infatti in base a determinate caratteristiche di queste operazioni.

Si possono fare moltissimi esempi di insiemi numerici e alcuni di loro hanno particolare importanza per alcune brache della matematica ma sicuramente conosciamo i più comuni, quelli che abbiamo imparato a utilizzare fin dai primi anni di scuola:

» i numeri naturali
» i numeri interi
» i numeri razionali

E al termine di questo percorso anche i numeri iperreali!

2.2. Una classificazione degli insiemi numerici

Anelli

Un anello è un insieme che possiede due operazioni e alcune importanti proprietà.

Un insieme A è anello se in A è definita un'operazione che indicheremo con il simbolo $\oplus$ (addizione) in cui ad ogni coppia di elementi di A corrisponde un elemento di A che è la somma dei due. L'operazione deve essere:

» associativa: $a + (c+d) = (a+c) + d$
» commutativa: $a+b = b+a$
» deve esistere l'elemento neutro (indicato spesso con 0) per l'addizione per cui si ha, per ogni elemento a dell'insieme, $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
» per ogni elemento di A deve esistere un elemento detto opposto (denotato spesso con $-a$) tale che $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$

Inoltre in A è definita una seconda operazione $\otimes$ (moltiplicazione) in cui ad ogni coppia di elementi di A corrisponde un elemento di A che è il prodotto dei due. L'operazione deve essere:

» associativa: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
» commutativa: $a \otimes b = b \otimes a$
» deve esistere, anche per la moltiplicazione, un elemento neutro (indicato con 1) tale che, per ogni elemento dell'insieme si ha $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$

Infine, la seconda operazione $\otimes$ deve essere distributiva rispetto alla prima prima $\oplus$:

$$a \otimes (c \oplus d) = (a \otimes c) \oplus (a \otimes d)$$

Notare che non è rischiesta dell'esistenza per la moltiplicazione $\otimes$ di un elemento che abbia una proprietà simile a quella dell'opposto, non si richiede, cioè, che esiste un $b \in A$ tale che

$$a \otimes (b) = (b) \oplus a = 1$$

Campi

Un campo è un insieme in cui sono definite due operazioni che hanno certe specifiche proprietà, in pratica tutte quelle richieste per gli anelli più una ulteriore.

In A è definita un'operazione $\oplus$ (addizione) in cui ad ogni coppia di elementi di A corrisponde un elemento di A uguale alla loro somma. L'operazione deve essere:

» associativa: $a \oplus (c \oplus d) = (a \oplus c) \oplus d$
» commutativa: $a \oplus b = b \oplus a$
» deve esistere l'elemento neutro (indicato, come visto, con 0) per l'addizione per cui per ogni elemento a dell'insieme sia $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
» per ogni elemento di A deve esistere un elemento detto opposto (denotato spesso con $-a$) tale che $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$

Inoltre in A è definita una seconda operazione $\otimes$ (moltiplicazione) in cui ad ogni coppia di elementi di A corrisponde un elemento di A che è il prodotto dei due. L'operazione deve essere:

» associativa: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
» commutativa: $a \otimes b = b \otimes a$
» con elemento neutro (indicato frequentemente con 1) per la moltiplicazione tale che per ogni elemento dell'insieme si ha $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$
» per ogni elemento a di A a eccezione al più dell'elemento neutro dell'addizione deve esistere un elemento reciproco $a^{-1} = 1/a$ tale che $a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = 1$

Infine, la seconda operazione $\otimes$ deve essere distributiva rispetto alla prima prima $\oplus$:

$$a \otimes (c \oplus d) = (a \otimes c) \oplus (a \otimes d)$$

In pratica, un campo completa quel panorama di proprietà che avevamo visto nella pagina precedente aggiungendo quell'ultima caratteristica a cui avevamo già fatto riferimento: entrambe le operazioni sono tali da garantire un elemento, che sia l'opposto o il reciproco, che combinato con l'elemento originale ci da l'elemento neutro.

2.3. Alcuni esercizi

I numeri naturali sono un insieme numerico ben noto, probabilmente il primo utilizzato dall'umanità. Si indica con la lettera $\mathbb{N}$ e i suoi elementi sono indicati come segue $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Prova a decidere se l'insieme dei numeri naturali è un anello o un campo con le operazioni di somma e moltiplicazioni che già conosci. Quali proprietà non possiede questo insieme?

Puoi utilizzare la tabella che segue (o almeno le prime tre colonne), *spuntando* le caselle cirrispondenti alle proprietà possedute dall'insieme e dalla specifica operazione. A questo punto del nostro percorso non sono necessarie dimostrazioni, fai qualche prova e usa il tuo intuito per decidere se l'insieme possiede la specifica proprietà.

	$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$	
proprietà	addizione	moltiplicazione	addizione	moltiplicazione
associativa	☐	☐	☐	☐
commutativa	☐	☐	☐	☐
elemento neutro	☐	☐	☐	☐
opposto/reciproco	☐	☐	☐	☐
x distributiva rispetto a +	☐		☐	

Semplificando, l'insieme dei numeri naturali è un anello se nella tabella hai spuntato tutte le caselle a eccezione della casella nella terza colonna e penultima riga (la casella relativa all'esistenza del reciproco per la moltiplicazione). È un campo se hai spuntato anche questa ultima casella.

Ora vediamo se un insieme *più grande* risolve alcuni dei problemi dei numeri naturali. I numeri interi sono chiaramente un ampliamento dei numeri naturale e il loro insieme si indica con la lettera $\mathbb{Z}$, gli elementi sono indicati come segue $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ..\}$.

L'insieme dei numeri interi è un anello? È anche un campo? Quale proprietà possiede che i numeri naturali non posseggono? E quale, invece, non possiede nemmeno questo insieme?

Puoi completare la tabella che trovi nella pagina precedente, le ultime due colonne sono proprio relative all'insieme dei numeri interi. Osserva che gli interi *aggiungono* una proprietà, nelle ultime due colonne ci dovrebbe essere una *spunta* in più!

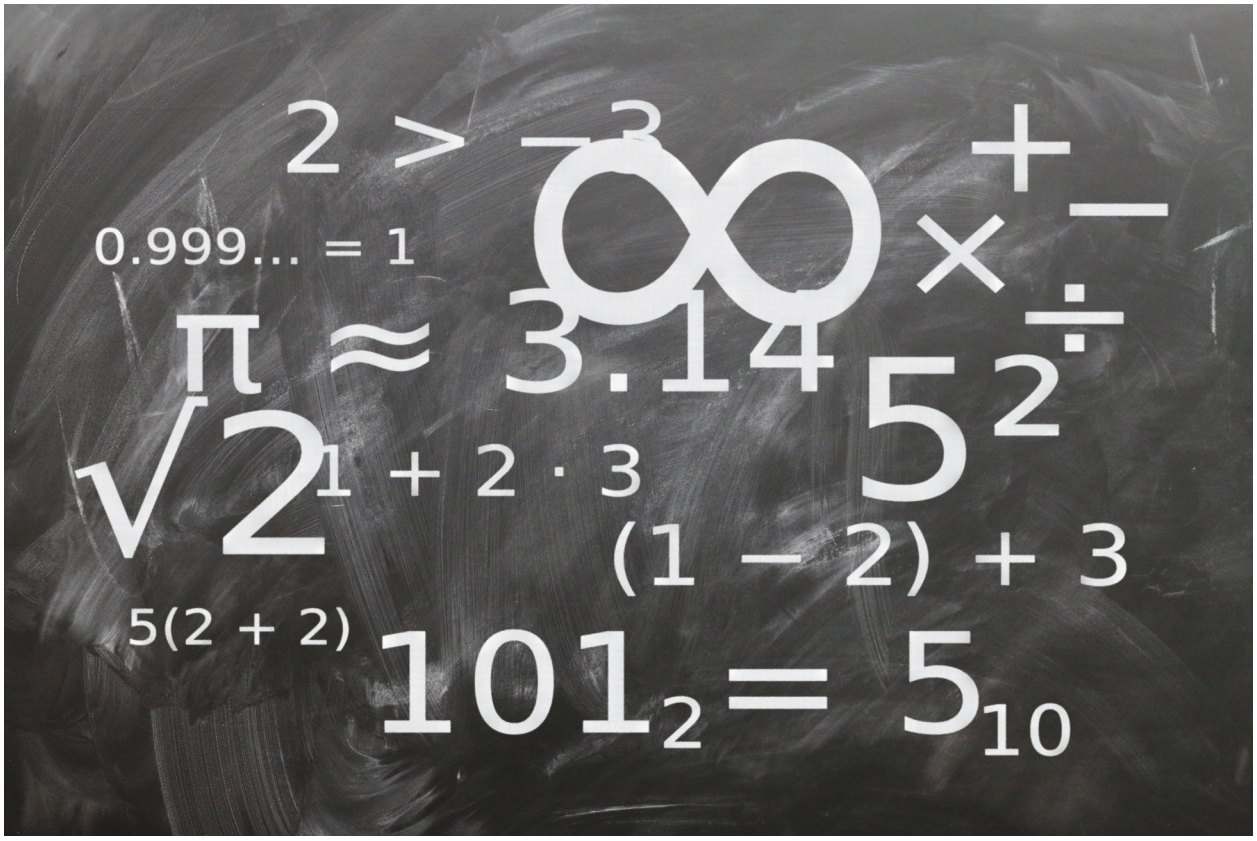
Ampliamo ancora l'insieme su cui lavorare. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono composti da coppie di interi (a, b) - o meglio, a/b.

L'insieme dei numeri razionali quali proprietà possiede? In particolare, quali sono le differenze rispetto agli interi?

Nota che i numeri razionali *aggiungono* una proprietà che gli interi non posseggono!

Ricorda che per dimostrare che un insieme non possiede una certa proprietà è sufficiente un contro esempio, un esempio in cui quella proprietà non è verificata, ma per controllare che *possiede* una tale proprietà sarebbe necessaria una dimostrazione, p.es.: l*a proprietà è valida per ogni coppia di elementi qualsiasi* ... Questo discorso ci porterebbe troppo lontano, in questo laboratorio ci acconteremo di un certo numero di prove e della tua capacità di generalizzare.

Una classe resto modulo n è il sottoinsieme dei naturali (o degli interi) che divisi per n danno lo stesso resto. Per esempio, i naturali {0, 3, 6, ...} divisi per tre danno tutti resto zero mentre i numeri {1, 4, 7, ...} divisi per tre danno tutti resto uno.
Se pensiamo ancora a n = 3, i numeri interi si possono dividere in tre classi resto: i numeri che divisi per tre danno resto zero, uno o due. A questo punto, se chiamiamo o = {0, 5, 6, ...} la classe che ha resto zero, u quella che ha resto uno e a ={2, 5, 8, ...} quella che ha resto due, potremmo pensare di costruire un insieme {o, u, a} con la somma e il prodotto definiti dalle tabelle nel testo.



2.4. Un esempio un poco strano

Se l'insieme su cui stiamo lavorando ha un numero finito di elementi, possiamo costruire delle tabelle con tutti i possibili risultati di una specifica operazione. A questo punto le proprietà di una specifica operazione sono verificabili direttamente sulla tabella, senza bisogno di dimostrazioni, sarà sufficiente provare tutte le possibili combinazioni, analizzare tutti i possibili risultati di una specifica operazione.

Supponiamo di aver un insieme numerico i cui elementi sono solo solamente tre: o, u, a. Può sembrare arbitrario o peggio privo di senso procedere con una definizione così astratta e slegata dalla realtà ma la capacità di astrarre è proprio una delle armi più potenti della matematica (e dei matematici)!

Su questo insieme è definita un'operazione di somma i cui possibili risultati sono tutti riportati nella tabella che trovate nella pagina seguente. Sulla prima riga e sulla prima colonna sono riportati gli elementi dell'insieme e in ogni casella è mostrato il prodotto del numero che si trova nell'intestazione della riga per quello che si trova nell'intestazione della colonna).

$\oplus$	o	u	a
o	o	u	a
u	u	a	o
a	a	o	u

La tabella va usata in questo modo, per stabilire il risultato, p. es., dell'operazione $u \oplus a$ dobbiamo cercare la casella che si trova nella riga corrispondente alla u (il primo operando) e nella colonna relativa alla a (il secondo operando) scoprendo che $u \oplus a = o$.

Prova a verificare se questa operazione è associativa e/o commutativa e se esiste l'elemento neutro per ogni elemento dell'insieme. In altre parole, questo insieme è un anello? Un campo?

Non dovrebbe essere un compito difficile, è un insieme con solo tre elementi e si tratta di verificare le proprietà per la somma di ogni possibile coppia osservando la tabella (ci sono solo nove possibili coppie ordinate composte da due elementi dell'insieme).

Ora definiamo anche un'operazione di moltiplicazione $\otimes$ i cui risultati sono riportati nella tabella seguente.

$\otimes$	o	u	a
o	o	o	o
u	o	u	a
a	o	a	u

Una interessante definizione dello stesso insieme, con operazioni differenti ma che portano allo stesso risultato, si può trovare in *Santi-Valenti, Dall'intero all'iperreale - Un'introduzione graduata all'analisi non standard.*

Confronta le proprietà delle operazioni su questo insieme con le definizioni di anello e campo. Per quanto molto, molto limitato, questo insieme è un …

Questo insieme può essere definito in almeno un paio di modi differenti. Per esempio può essere pensato come l'insieme dei numeri $\{0, 1, 2\}$ con l'operazione di somma modulo 3.

3. Iperreali

3.1. Qualche definizione

Quello degli iperreali è un insieme molto vasto che estende i numeri reali (che qui prendono il nome di numeri standard) aggiungendo la classe degli infinitesimi (e di conseguenza anche degli infiniti).

Standard

I numeri standard sono i reali e sono tutti, a eccezione dello zero, numeri finiti non infinitesimi (fni). In questo laboratorio indicheremo i numeri reali, come premesso nell'introduzione, con lettere minuscole dell'alfabeto latino a, b, c, ...

I microscopi a infiniti ingrandimenti sono un idea di G. Goldoni introdotta ne *I numeri iperreali*– 2017, Ilmiolibro, dove l'autore racconta della sua esperienza didattica di introduzione al calcolo differenziale utilizzando gli iperreali.

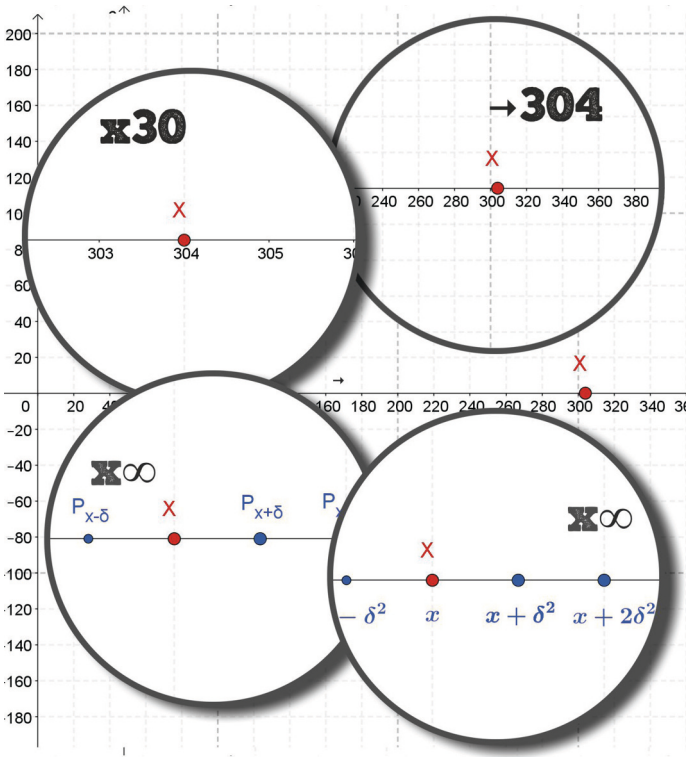
Infinitesimi

Gli infinitesimi sono numeri finiti il cui valore assoluto è più piccolo di qualsiasi numero standard positivo: un numero ε è un infinitesimo se $|\varepsilon| < x$ per ogni standard positivo $x > 0$. Useremo lettere minuscole dell'alfabeto greco $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ per indicare gli infinitesimi. Lo *zero* è l'unico numero standard minore di ogni altro standard positivo, dunque è un infinitesimo. Tutti gli altri infinitesimi sono detti infinitesimi non nulli (inn).

Infiniti

I numeri finiti (f) sono numeri il cui modulo è minore di almeno un numero standard: $|x| < a$, per almeno un $a > 0$ standard. Gli infiniti, invece, sono numeri il cui valore assoluto è maggiore di ogni numero standard: $|M| > x$ per ogni standard positivo $x > 0$. Si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino A, B, C, ... Notare che i numeri standard non sono infiniti, poiché non sono maggiori di tutti gli standard.

Dove si trovano?



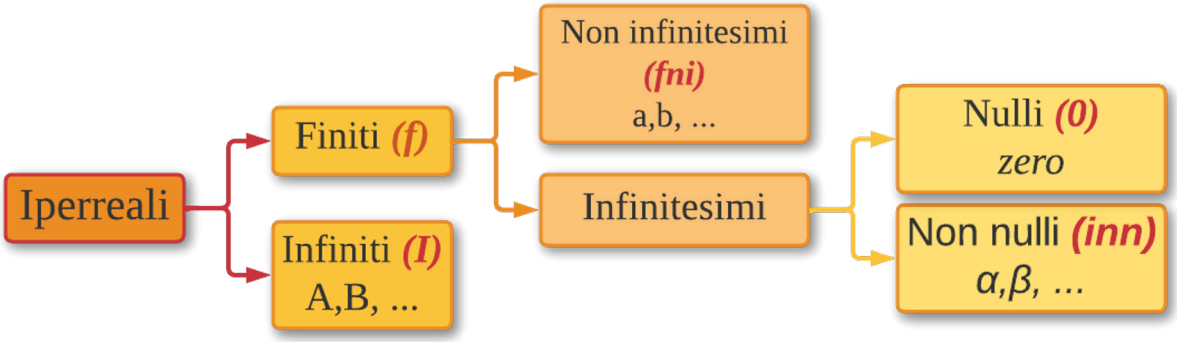
Tutti i numeri iperreali si possono rappresentare su una retta orientata, in modo simile a quanto facciamo di solito per i numeri reali, con qualche modifica: abbiamo bisogno di strumenti particolari che ci consentano di vedere infiniti e infinitesimi.

Se volessimo aumentare l'ingrandimento dell'asse delle ascisse, avremmo bisogno di un microscopio standard x n, che *puntando* un numero reale x, aumenta l'ingrandimento nei suoi dintorni di n volte.

Pur scegliendo una n molto grande (1000, 10000, 100000), non riusciremmo comunque a vedere gli infinitesimi, poiché nei *dintorni* di x vedremo numeri con l'ingrandimento aumentato di 1000, 10000, 100000 volte ma comunque finito.

La figura qui a sinistra mostra due microscopi standard: il primo a ingrandimento x1 (in alto a destra), il secondo a ingrandimento x30 (in alto a sinistra). Si vede che la distanza, l'ampiezza delle tacche, è via via più grande ma sempre finita.
In basso sono stati usati, prima uno e poi l'altro, due microscopi a infiniti ingrandimenti: le tacche ora hanno un'ampiezza infinitesima e si riesce a osservare tutti i numeri infinitamente vicini a 304.

In figura una suddivisione schematica degli iperreali.



Gli infinitesimi, però, sono numeri più piccoli di ogni altro numero standard positivo! Dunque, per poter vedere gli infinitesimi lungo l'asse delle ascisse, avremmo bisogno di un microscopio di tipo $\times \infty$, capace di infiniti ingrandimenti!

Una volta puntato il microscopio $\times \infty$, saremmo in grado di poter vedere i numeri infinitamente vicini ad n. Le tacche sull'asse saranno i multipli di un infinitesimo e quindi ampie δ. Ovviamente con un tale ingrandimento resterebbe visibile solo il numero standard su cui abbiamo puntato il microscopio insieme a tutti gli altri numeri che differiscono da n di un infinitesimo!

Per esempio, se volessimo osservare i *dintorni* del numero 304 dovremmo puntare un microscopio a infiniti ingrandimenti proprio su questo numero. Il solo standard visibile allora sarebbe proprio 304 e con lui tutti gli iperreali del tipo $304 \pm \varepsilon$ (con ε infinitesimo qualsiasi).

3.2. Ordinamento

Per riassumere quanto detto finora, possiamo ordinare i numeri iperreali positivi in questa maniera: $0 < \varepsilon < a < M$, dove:

» lo zero è minore di tutti i numeri positivi
» gli infinitesimi sono minori di tutti i *finiti non infinitesimi* positivi
» i *finiti non infinitesimi* sono minori degli infiniti positivi
» tra i finiti non infinitesimi $a > b$ se si ha che $a - b > 0$

3.3. Il reciproco di un numero iperreale

Prima di affrontare il calcolo dei numeri iperreali con le rispettive operazioni, chiariamo meglio il reciproco e l'ordinamento di infinitesimi e infiniti.

Reciproci

Per comprendere il reciproco di un infinitesimo δ, partiamo dal reciproco dei numeri reali.

Quanto vale il reciproco di un numero molto piccolo? Per esempio, quanto fa uno diviso un milionesimo di miliardesimo? E uno su un miliardesimo di miliardesimo? …

Beh! Ora dovrebbe essere chiaro che più il numero è grande più il suo reciproco è piccolo, molto, molto piccolo … La stessa cosa vale per gli infinitesimi! Se dividiamo per un numero *infinitamente* piccolo otteniamo un numero *infinitamente* grande! Dunque, se noi abbiamo un infinitesimo δ, che quindi è più piccolo di ogni $1/n$ per ogni n standard (quindi finito) positivo, allora, con qualche semplice passaggio algebrico, $1/\delta > n$ per ogni n standard. Quindi $1/\delta$ è un infinito.

Passiamo al reciproco di un infinito M. Come prima, partiamo dai numeri reali.

Quanto vale il reciproco di un numero molto piccolo? Per esempio, quanto fa uno diviso un milione di miliardi? E uno su un miliardo di miliardi? …

Al contrario di quanto visto in precedenza, più il numero è grande più il suo reciproco è molto molto piccolo …

A questo punto, quanto pensi possa essere il reciproco di un infinito M?

Se noi abbiamo un infinito $M > 0$, allora deve essere $M > 1/n$ per ogni n standard positivo, allora, con gli stessi passaggi algebrici visti in precedenza, $1/M < n$ per ogni n standard. Quindi $1/M$ è un infinitesimo!

3.4. Ordinamento

Ordinamento di infinitesimi

Si dice che ε è un infinitesimo di ordine superiore (o) rispetto a δ se ε/δ è un infinitesimo (o se δ/ε è un infinito). Si usa scrivere $\varepsilon = o(\delta)$ e si legge ε *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* δ. Due infinitesimi ε, δ sono dello stesso ordine se $\varepsilon/\delta = n$ per un qualche n standard. Analogamente, ε è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a δ se ε/δ è un infinito (o se δ/ε è un infinitesimo). Quindi scriveremo $\varepsilon > \delta$ se $\delta = o(\varepsilon)$.

Ordinamento di infiniti

Possiamo stabilire un ordine anche tra gli infiniti in un modo molto simile. Si dice che A è un infinito di ordine superiore (O) rispetto a B se A/B è un infinito (o se B/A è un infinitesimo) e useremo la notazione $A = O(B)$ che si legge A *è un infinito di ordine superiore rispetto a* B. Due infiniti A, B sono dello stesso ordine se $A/B = n$ per qualche standard n. In modo simile A è un infinito di ordine inferiore rispetto a B se A/B è un infinitesimo (o se B/A è un infinito).

3.5. Operazioni

Nella figura **a pagina 12** abbiamo presentato una classificazione degli iperreali e alcune abbreviazioni che ci possono aiutare a scrivere in modo sintetico i risultati delle operazioni per coppie di operandi di tipo differente.

La somma di iperreali

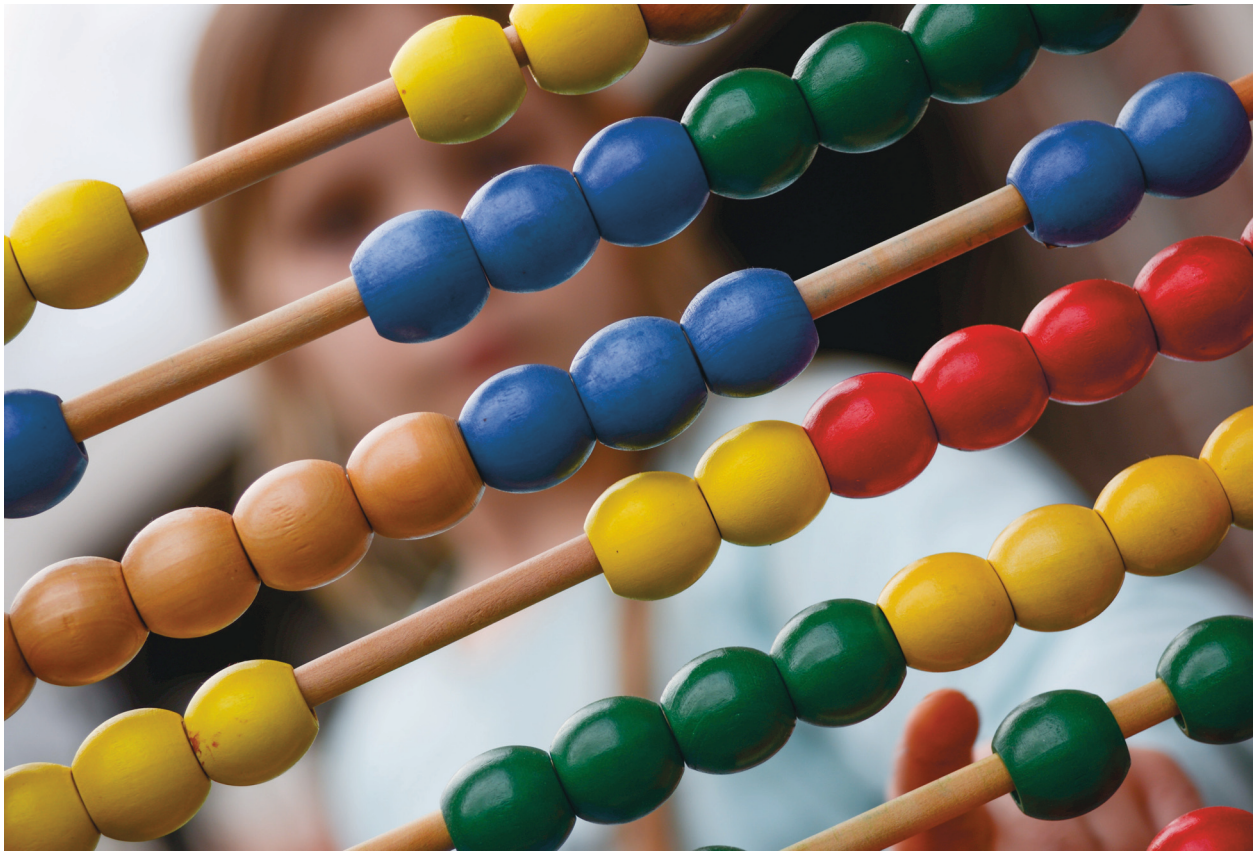
Immaginiamo di aver definito le operazioni di somma come di consueto. Costruiamo una tabella con una colonna e una riga per ogni sottoinsieme degli iperreali: infinitesimi non nulli *(inn)*, finiti non infinitesimi *(fni)*, infiniti *(I)* e indichiamo un generico infinitesimo, nullo oppure no, con la lettera *i*.

Completa la tabella che segue relativa alla somma di due numeri iperreali.

Per esempio, se sommiamo un infinitesimo con un altro infinitesimo il risultato può essere un infinitesimo, ma anche zero (sommando un infinitesimo con il suo opposto). Quindi nella casella relativa alla somma tra un inn e un altro inn inseriremo i che sta a indicare che la somma di due inn sarà un infinitesimo (che potrà anche essere nullo).

+	inn	fni	I
inn			
fni			
I			

Ci sono caselle che ti hanno creato problemi? Per esempio, quale risultato darà la somma di due infiniti? Prova a pensare a tutti i casi possibili e ricorda che un infinito può anche essere negativo.



Il prodotto di iperreali

Proviamo a indagare ora il prodotto di due iperreali, supponendo di aver definito la moltiplicazione nel modo consueto.

Completa la tabella che segue relativa al prodotto di due numeri iperreali.

Ci sono caselle nella tabella il cui risultato non è facile da prevedere? Per esempio, quanto fa il prodotto di un infinito per un infinitesimo? Prova a pensare a tutti i casi possibili e ricorda che, per esempio, se M è infinito allora 1/M è un infinitesimo. In questo caso, quanto fa M per 1/M?

×	inn	fni	I
inn			
fni			
I			

3.6. Definizione di standard e indistinguibile

Un numero iperreale x finito può essere scritto come somma di un finito, un numero standard s, e un infinitesimo ε dove uno o entrambi possono anche essere nulli: $x = s + \varepsilon$.

Il numero reale s è la sua parte standard $s = \mathrm{std}(x)$, eventualmente pari a zero quando il numero è un infinitesimo. Per esempio $\mathrm{std}(\varepsilon) = 0$. Mentre ε è la sua parte infinitesima, eventualmente nulla se x è un numero standard.

Nota che se x, y sono due numeri iperreali, allora $\mathrm{std}(x+y) = \mathrm{std}(x) + \mathrm{std}(y)$.

Prova a dimostrare questa proprietà: la parte standard della somma di due iperreali è pari alla somma delle parti standard dei due. La tabella della somma su cui hai lavorato prima ti dovrebbe aiutare.

Questa dimostrazione nonn dovrebbe essere difficile. Ricorda che *dimostrare* vuol dire, in parole semplici, verificare la proprietà su due numeri generici (il che equivale a mostrare che la proprietà è vera per tutti i numeri di quel tipo).

Ancora una definizione e abbiamo finito con la teoria. Due numeri iperreali $x, y \neq 0$, sono detti indistinguibili ($x \sim y$) se il rapporto tra il modulo della loro differenza e ciascuno dei due è infinitesima, più precisamente, se sono verificate entrambe le condizioni seguenti:

» $|x-y|/x$ è un infinitesimo
» $|x-y|/y$ è un infinitesimo

In questo caso, quanto vale la parte standard del loro rapporto? In altre parole, quanto fa $\mathrm{std}(x/y)$?

Questa volta la dimostrazione non è così semplice. Se non riesci o la trovi troppo difficile, possiamo accontentarci di un'intuizione (in ogni caso puoi saltare alle soluzioni: vedi **Definizione di standard e indistinguibile a pagina 23**).

Prova a calcolare la parte standard del rapporto tra, per esempio, $x + \varepsilon$ e x. Oppure tra $x + \varepsilon$ e $x + \delta$. Cosa ottieni? Riesci a generalizzare?

3.7. Usare gli iperreali

Un primo esercizio

Prendiamo in considerazione l'espressione $(3x^2-6x+9)/(x+1)$ ...

Quale valore assume se $x = -1$? Devi solo sostituire -1 alla variabile e sviluppare.

Nulla di strano. Può capitare ... ma ora proviamo a cambiare contesto.

Quale valore assume la stessa espressione se calcolata per $x = -1+\varepsilon$? Di nuovo, devi sostituire il valore $-1+\varepsilon$ alla variabile, sviluppare e semplificare.

Ricorda che $-1 + \varepsilon$ è *infinitamente vicino* a -1. Ma il risultato non è esattamente lo stesso.

Infine prova a calcolare la parte standard dell'espressione $(3x2-6x+9)/(x+1)$ in corrispondenza del valore $x = -1 + \varepsilon$.

Il risultato è sorprendente. Un'espressione che non ha senso in un particolare punto, per un particolare valore della variabile, improvvisamente acquista senso in un punto infinitamente vicino a quello!

Ora ripassiamo alcune proprietà…

» $(k + \varepsilon) \sim k$: la somma di un finito e un infinitesimo è indistinguibile dal numero finito in questione, più precisamente $\mathrm{std}(k + \varepsilon) = k$.
» $M \sim N$ se la differenza è un numero finito, un infinitesimo o un infinito di ordine inferiore:
» $M \sim (M + \varepsilon)$
» $M \sim (M + \varepsilon)$
» $M^2 \sim (M^2 + M)$

…e qualche regola:

» sommando due infinitesimi si può trascurare un infinitesimo di ordine superiore: $(\varepsilon+\beta) \sim \varepsilon$ se $\beta = o(\varepsilon)$
» sommando un *fni* con un infinitesimo si può trascurare l'infinitesimo: $(a+\varepsilon) \sim a$
» sommando un infinito con un infinitesimo si può trascurare l'infinitesimo: $(M+\beta) \sim M$
» sommando un infinito con un fni si può trascurare quest'ultimo: $(N+d) \sim N$
» sommando due infiniti si può trascurare quello di ordine inferiore, p.es.: $(M+M^2) \sim M^2$

Al termine delle soluzioni troverete alcuni esercizi per familiarizzare con gli iperreali **(cfr. Altri esercizi a pagina 24)**.

3.8. Ma insomma, a cosa servono questi iperreali?

A risolvere problemi. Facciamo qualche esempio.

Applicazioni alla fisica

Supponiamo che un punto materiale si muova su una traiettoria rettilinea con accelerazione costante $a > 0$. La legge oraria del moto sarà:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

Come trovare la velocità istante per istante? Probabilmente sai già la risposta ma qui ci interessa

il procedimento per arrivare a quella formula/legge. La velocità istantanea è il rapporto tra lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo infinitesimo e questo stesso intervallo di tempo:

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{s(t+dt) - s(t)}{(t+dt) - t}$$

Considera dt un infinitesimo, alla stregua di ε o δ, sostituisci a s(t+dt) e a s(t) la legge del moto rettilineo uniformemente accelerato. Semplifica l'espressione quanto possibile e calcola la parte standard del risultato.

Ricorda che per calcolare s(t+dt) è sufficiente sostituire l'espressione t+dt al posto di t nella s(t). Usa le parentesi se sei in difficoltà.

Il risultato finale, la parte standard della velocità std(v) ti è familiare? Riconosci un risultato già noto?

Se tutto è andato come previsto, dovresti aver ottenuto la legge che descrive la velocità istante per istante di un moto rettilineo uniformemente accelerato. Ma questo risultato, già notevole, si può generalizzare. Ed è questa la potenza degli iperreali!

Se $s(t) = t^3 - 2t$ è la legge oraria di un moto rettilineo qualsiasi (non uniformemente accelerato), prova a usare lo stesso metodo per determinare la velocità istantanea.

La velocità istantanea è sempre

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{s(t+dt) - s(t)}{(t+dt) - t}$$

Ricorda che dt è un infinitesimo.

Concludi il calcolo determinando la parte standard dell'espressione semplificata. Quello che ottieni è la velocità istante per istante del moto considerato. E questo procedimento è del tutto generale, può essere usato su un moto qualsiasi (rettilineo), espresso da una qualunque legge oraria. Un gran risultato!

Vogliamo determinare la tangente alla parabola $y = 2x^2-4x+1$ nel suo punto $T(2,1)$. La retta tangente alla parabola in un suo punto ha una proprietà unica rispetto a tutte le altre rette passanti per quello stesso punto: spostandosi di un infinitesimo dal punto di contatto *T* tangente e parabola restano infinitamente vicine. In altre parole, prendendo due punti infinitamente vicini di ascisse 2 e $2 + dx$, le ordinate di retta e parabola differiscono per un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza dx tra le ascisse (dx è ovviamente un infinitesimo)! Useremo questa proprietà per determinare la retta tangente alla parabola.

Scrivi l'equazione di una generica retta passante per T.

L'equazione che hai scritto dipende, ovviamente, dal coefficiente angolare *m* della retta. Tra tutte le rette passanti per il punto *T* cercheremo quella che si *allontana* meno dalla parabola.

Ora calcola l'ordinata del punto della retta generica la cui ascissa è $2 + dx$. E poi anche l'ordinata del punto della parabola la cui ascissa è sempre $2 + dx$. Calcola la differenza tra le due ordinate.

Cerchiamo ora di determinare il coefficiente angolare *m* in modo che la differenza sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a *dx*.

Osserva la differenza tra le ordinate, come devi scegliere *m* in modo che questo delta sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a *dx*.

Ricorda che δ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε se δ/ε è a sua volta un infinitesimo. Per esempio, δ^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a δ perchè $\delta^2/\delta = \delta$ è un infinitesimo. Se hai scelto bene, il valore di *m* è il coefficiente angolare della retta tangente!

Anche questo procedimento può essere generalizzato, si tratta di:

» scrivere l'equazione della generica retta che passa per il punto di tangenza della curva
» calcolare le ordinate di retta e curva in un punto *infinitamente vicino* a quello di tangenza
» determinare la parte standard della differenza tra le ordinate di retta e curva appena calcolate
» imporre che questa differenza sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'incremento della variabile indipendente.

In realtà, come vedremo nel fascicolo successivo, dedicato all'introduzione del calcolo differenziale, questa procedura è il fondamento della definizione di derivata di una funzione e del calcolo differenziale.

4. Soluzioni

4.1. Alcuni esercizi

Prova a decidere se l'insieme dei numeri naturali è un anello o un campo con le operazioni di somma e moltiplicazioni che già conosci. Quali proprietà non possiede questo insieme?

Ricordiamo che la definzione di anello e di campo sono riportate all'inizio di questo fascicolo **(cfr. 2.2 Una classificazione degli insiemi numerici a pagina 7)**.

Sono sufficienti alcuni esempi e un po' di intuizione per capire che la somma tra numeri naturali è associativa e commutativa, esiste anche l'elemento neutro (lo *zero*) ma non esiste l'opposto. In altre parole, dato un numero naturale *n* non esiste un altro numero naturale *-n* (il suo *opposto*) tale che $n + (-n) = 0$. Quindi l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ non è un anello (e quindi neanche un campo).

La tebella presentata **a pagina 8** dovrebbe avere questo aspetto:

	$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$	
proprietà	addizione	moltiplicazione	addizione	moltiplicazione
associativa	✔	✔	✔	✔
commutativa	✔	✔	✔	✔
elemento neutro	✔	✔	✔	✔
opposto/reciproco	☐	☐	✔	☐
x distributiva rispetto a +	✔		✔	

L'insieme dei numeri interi è un anello? È anche un campo? Quale proprietà possiede che i numeri naturali non posseggono? E quale, invece, non possiede nemmeno questo insieme?

Appare subito evidente che gli interi sono un *ampliamento* dei naturali con lo scopo di introdurre, per ogni elemento, il suo opposto. Quindi l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ è un anello.

D'altra parte per essere un campo dovrebbe esistere il *reciproco* di ogni elemento di $\mathbb{Z}$ (che fa le veci dell'opposto per quanto riguarda la moltiplicazione) ma questa condizione non è soddisfatta quindi non è un campo (fare riferimento alla tabella qui sopra).

L'insieme dei numeri razionali quali proprietà possiede? In particolare, quali sono le differenze rispetto agli interi?

Di nuovo, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ appare come un ampliamento degli interi con il preciso obiettivo di definire per ogni elemento il suo reciproco. Quindi per i razionali le due operazioni consuete sono associative e commutative e la seconda operazione è distributiva rispetto alla prima, per entrambe esiste l'elemento neutro (lo *zero* per l'addizione e l'*uno* per la moltiplicazione) e ogni elemento dell'insieme ha un opposto e un reciproco. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono un campo!

4.2. Un esempio un poco strano

Prendiamo in esame l'insieme {o, u, a} la cui operazione di somma è definita tramite la tabella:

$\oplus$	o	u	a
o	o	u	a
u	u	a	o
a	a	o	u

Prova a verificare se questa operazione è associativa e/o commutativa e se esiste l'elemento neutro per ogni elemento dell'insieme.

Possiamo verificare che l'operazione è associativa testando tutte le possibili combinazioni dei tre elementi leggendo i risultati delle somme nella tabella. Per esempio $o + (o+u) = o+u = u$ e, allo stesso modo, $(o+o) + u = o + u = u$.

L'operazione è inoltre commutativa perchè la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale principale (quella che parte dall'*alto a destra* e finisce in *basso a sinistra*). Infatti caselle simmetriche rispetto alla diagonale riportano la somma per due qualsiasi elementi x e y: una indica il risultato della somma $x + y$, l'altra la somma $y + x$.

Dalla tabella si deduce immediatamente che l'elemento neutro è o: infatti la riga e la colonna corrispondenti a questo elemento sono identiche alla riga e alla colonna di intestazione, proprio a indicare che la somma di qualsiasi elemento x con o è proprio l'elemento x.

Sullo stesso insieme, come già visto, si può anche definire una moltiplicazione i cui risultati sono riportati nella tabella che segue:

$\otimes$	o	u	a
o	o	o	o
u	o	u	a
a	o	a	u

Confronta le proprietà delle operazioni su questo insieme con le definizioni di anello e campo. Per quanto molto, molto limitato, questo insieme è un ...?

La moltiplicazione è commutativa (la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale principale) e associativa (come si può verificare provando tutte le possibili terne di elementi o, u, a). Così come, *a forza bruta*, si può dimostrare la distributività.

Ogni elemento ha un opposto:

» l'opposto di o è se stesso, infatti $o \oplus o = o$
» l'opposto di $u \oplus a$ visto che $u \oplus a = a \oplus u = o$
» e quindi l'opposto di a è u

Abbiamo costruito un anello: le due operazioni consuete sono associative e commutative e la seconda operazione è distributiva rispetto alla prima, per entrambe esiste l'elemento neutro (la o per l'addizione e la u per la moltiplicazione) e ogni elemento dell'insieme ha un opposto!

Ma è anche un campo: il reciproco di ogni elemento (a esclusione dell'elemento neutro dell'addizione o) è l'elemento stesso. Infatti $a \otimes a = u$ e $u \otimes u = u$.

5. Iperreali

5.1. Il reciproco di un numero iperreale

Quanto vale il reciproco di un numero molto piccolo? Per esempio, quanto fa uno diviso un milionesimo di miliardesimo? E uno su un miliardesimo di miliardesimo? …

Il reciproco di un numero molto piccolo è un numero molto grande! Il reciproco di un milionesimo di miliardesimo 10^{-15} è pari a un milione di miliardi $10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$. Mentre il reciproco di un miliardesimo di miliardesimo 10^{-18} arriva a un miliardo di miliardi: 10^{18} (un numero che diciotto zeri dopo luno iniziale).

Quanto vale il reciproco di un numero molto piccolo? Per esempio, quanto fa uno diviso un milione di miliardi? E uno su un miliardo di miliardi? …

In modo simile a quanto appena visto, più l'esponente della potenza di dieci è piccolo (grande in valore assoluto ma negativo) tanto il numero è molto, molto ... grande. Ma davvero molto grande!

A questo punto, quanto pensi possa essere il reciproco di un infinito M?

Se abbiamo un infinito M, supponiamo positivo, allora $M > 1/n$, con n un qualsiasi standard positivo, allora $1/M < n$. In altre parole, $1/M$ è più piccolo di qualunque standard positivo e quindi è un infinitesimo. Allo stesso modo si può dimostrare che il reciproco $1/\varepsilon$ di un infintesimo ε è maggiore di ogni standard positivo e quindi è un infinito.

5.2. Operazioni

La somma di due iperreali

Completa la tabella che segue relativa alla somma di due numeri iperreali.

Ci sono caselle che ti hanno creato problemi? Per esempio, quale risultato darà la somma di due infiniti? Prova a pensare a tutti i casi possibili e ricorda che un infinito può anche essere negativo.

+	inn	fni	I
inn	i	fni	I
fni	fni	f	I
I	I	I	?

Alcuni risultati hanno bisogno di qualche spiegazione in più. Ricordiamo che con *inn* si intende un infinitesimo non nullo mentre con *i* un infinitesimo che può anche essere nullo; con *fni* un finito non infinitesimo e con *f* un finito che può anche essere inifinitesimo o nullo:

» inn + inn = i poiché la somma di infinitesimi non nulli può essere solo un infinitesimo ma questo può anche essere nullo, infatti $\delta + (-\delta) = 0$

» inn + fni = fni poiché non è un infinitesimo (non è più piccolo di ogni standard positivo) nè un infinito (non è nemmeno più grande di qualsiasi standard positivo ma non è nemmeno nullo, ovviamente, almeno il numero inn è diverso da zero

» inn + I = I poiché se un infinitesimo è trascurabile rispetto ad un numero finito a maggior ragione lo sarà rispetto a un infinito

» fni + fni = f poiché la somma di finiti può essere solo un numero finito (quindi anche infinitesimo o nullo), per esempio la somma $a + (-a + \delta) = \delta$ che è un infinitesimo
» fni + I = I poiché un finito non infinitesimo è trascurabile rispetto ad un infinito

Ma la casella più ambigua è quella corrispondente alla somma di due infiniti I + I. Infatti una tale somma può essere un qualsiasi numero iperreale:

» un infinito: $N + M = Q$
» un infinitesimo nullo: $N + (-N) = 0$
» o un infinitesimo non nullo: $(N + \varepsilon) + (-N) = \varepsilon$

Il prodotto di due iperreali

Proviamo a indagare ora il prodotto di due iperreali, supponendo di aver definito la moltiplicazione nel modo consueto.

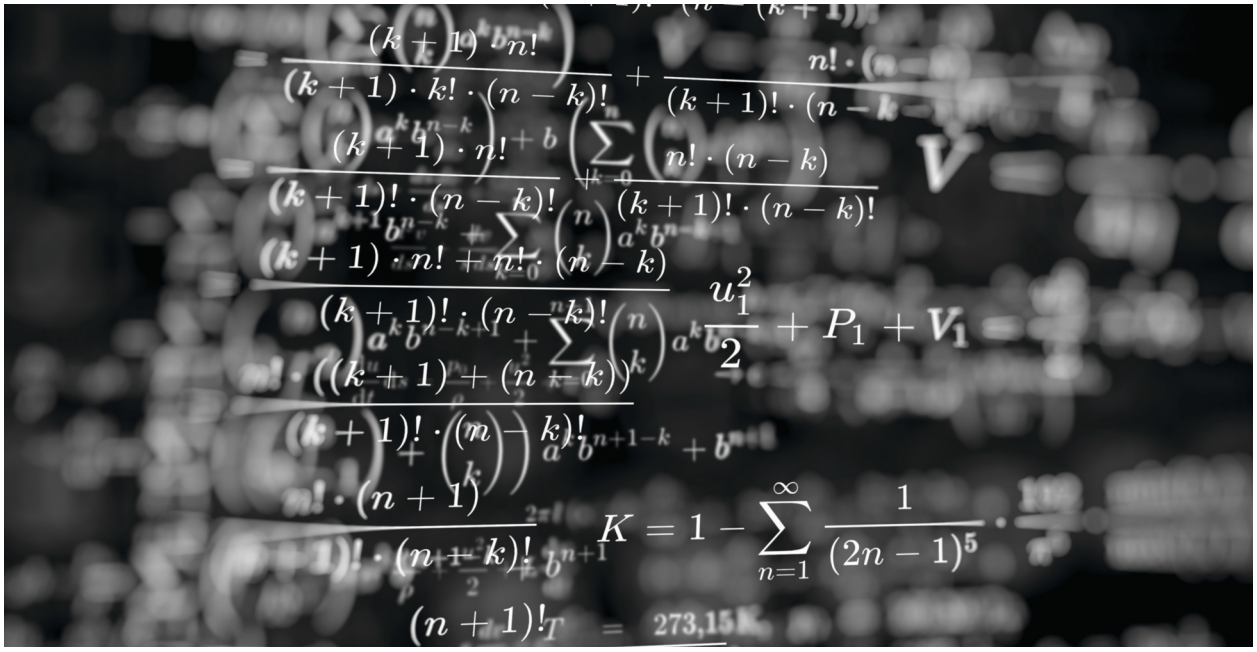
Completa la tabella che segue relativa al prodotto di due numeri iperreali.

Ci sono caselle nella tabella il cui risultato non è facile da prevedere? Per esempio, quanto fa il prodotto di un infinito per un infinitesimo? Prova a pensare a tutti i casi possibili e ricorda che, per esempio, se M è infinito allora 1/M è un infinitesimo. In questo caso, quanto fa M per 1/M?

⊗	o	u	a
o	o	o	o
u	o	u	a
a	o	a	u

Anche in questo caso sono necessari alcuni chiarimenti:

» inn · inn = inn visto che il prodotto tra infinitesimi non nulli è un infinitesimo di ordine superiore, per esempio $\delta \cdot \delta = \delta^2$
» inn · fni = inn poiché il prodotto tra un numero infinitamente piccolo e un numero finito è un infinitesimo dello stesso ordine: $\delta \cdot 3 = 3\delta$
» fni · fni = fni perché il prodotto tra finiti non infinitesimi è un finito non infinitesimo, come



per esempio nel prodotto $a \cdot 2a = 2a^2$

» fni $\cdot$ I = I poiché il prodotto tra un numero infinitamente grande un finito non infinitesimo è un infinito di ordine superiore, come esempio calcoliamo il prodotto $I \cdot 2 = 2I$

» I·I = I poiché il prodotto tra infiniti è un infinito (e di ordine superiore ai fattori), come in questo prodotto $I \cdot 2I = 2I^2$

Anche in questo caso c'è un caso più complicato degli altri, il prodotto tra un infinito e un infinitesimo, il risultato, anche questa volta può essere un iperreale qualsiasi:

» un infinitesimo non nullo come in questo prodotto $M \cdot 1/M^2 = 1/M = \varepsilon$

» un finito non infinitesimo, per esempio $M \cdot 1/M = 1$

» o, infine, un infinito come in questa moltiplicazione $M^2 \cdot 1/M = M$

5.3. Definizione di standard e indistinguibile

Ricordiamo che due numeri iperreali $x, y \neq 0$, sono detti indistinguibili ($x \sim y$) se il rapporto tra il modulo della loro differenza e ciascuno dei due è infinitesima, più precisamente, se sono verificate le due (entrambe) condizioni seguenti:

» $|x-y|/x$ è un infinitesimo

» $|x-y|/y$ è un infinitesimo

In questo caso, quanto vale la parte standard del loro rapporto? In altre parole, quanto fa std(x/y)?

Se x e y sono indistinguibili - si scrive $x \sim y$ - allora $\mathrm{std}(x/y) = 1$, infatti si deve avere sicuramente che $(x-y)/y = \alpha$ (con α infinitesimo) e quindi $x-y = \alpha y$ o anche $x = \alpha y + y = y\,(\alpha+1)$ da cui, immediatamente, $x/y = y(\alpha+1)/y = \alpha+1$ per cui $\mathrm{std}(x/y) = \mathrm{std}(\alpha+1) = 1$.

Il rapporto delle parti standard di due numeri indistinguibili è pari a uno!

Prova a calcolare la parte standard del rapporto tra, per esempio, x + ε e x. Oppure tra x + e e x + d. Cosa ottieni? Riesci a generalizzare?

La proposizione che abbiamo appena dimostrato deve essere verificata anche in questi esempi. Nel primo è chiaro che $x + \varepsilon$ e x sono indistinguibili infatti, supponendo ε un infinitesimo positivo, la loro differenza è un infinitesimo e quindi, a maggior ragione, lo sarà il rapporto tra la loro differenza e uno dei due numeri. Ora, la parte standard del loro rapporto è:

$$std\left(\frac{x+\varepsilon}{x}\right) = std\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right) = 1$$

perchè, ovviamente, il rapporto ε/x è un infinitesimo.

Nel secondo caso abbiamo:

$$std\left(\frac{x+\varepsilon}{x+\delta}\right) = std\left(\frac{x}{x+\delta}+\frac{\varepsilon}{x+\delta}\right) = std\left(\frac{x}{x+\delta}\right) = 1$$

dove va considerato che $\varepsilon/(x+d)$ è un infinitesimo.

5.4. Usare gli iperreali

Un primo esercizio

Prendiamo in considerazione l'espressione $(3x^2-6x+9)/(x+1)$ ...

Quale valore assume se x = -1? Devi solo sostituire -1 alla variabile e svluppare.

Appare subito evidente che la frazione, la funzione, perde di senso se $x = -1$, infatti sia il numeratore che il denominatore si annullano.

Quale valore assume la stessa espressione se calcolata per $x = -1+\varepsilon$? Di nuovo, devi sostituire il valore $-1+\varepsilon$ alla variabile, sviluppare e semplificare.

Come suggerito, sostituiamo alla variabile il valore $x = -1+\varepsilon$:

$$f(-1+\varepsilon) = \frac{3(-1+\varepsilon)^2 - 6(-1+\varepsilon) + 9}{-1+\varepsilon+1}$$

sviluppando otteniamo

$$f(-1+\varepsilon) = \frac{3 - 6\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 6 - 6\varepsilon + 9}{\varepsilon} = \frac{3\varepsilon^2 - 12\varepsilon}{\varepsilon}$$

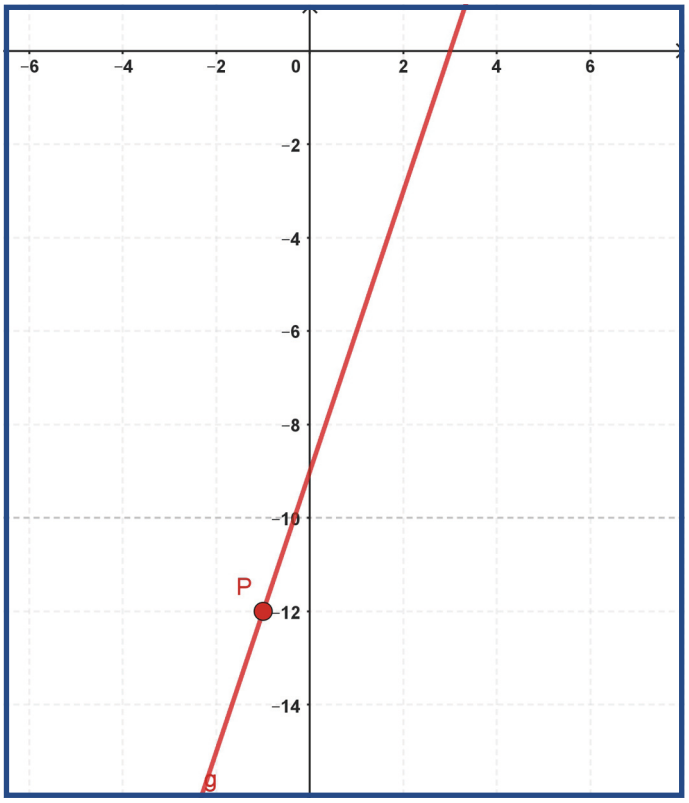
se raccogliamo a numeratore e semplifichiamo (ricordiamo che ε è piccolo, infinitesimo, ma non nullo uindi possiamo dividere numeratore e denominatore per ε) abbiamo

$$f(-1+\varepsilon) = 3\varepsilon - 12$$

Infine prova a calcolare la parte standard dell'espressione $(3x2-6x+9)/(x+1)$ in corrispondenza del valore $x = -1 + \varepsilon$.

Il risultato è davvero sorprendente: la parte standard dell'espressione è semplicemente -12! Vuol dire che la funzione che stiamo considerando non ha senso per $x = -1$ ma ha senso, e assume un valore finito, molto vicino a -1, infinitamente vicino a -1!

In effetti, numeratore e denominatore si possono scomporre e semplificare (se scegliamo $x \neq -1$) trasformando la funzione nell'equazione di una retta, quella rappresentata in figura. Per $x = -1$ questa retta non esiste (questo punto critico, questo *buchino*, è in figura il punto *P*), ma esiste infinitamente vicino a questa ascissa e il suo valore è infinitamente vicino a -12! Sia per valori infinitamente vicini a *-1* ma maggiori di *-1* che per valori infinitamente vicini ma inferiori.



Altri esercizi

Ora alcuni esercizi per familiarizzare con gli iperreali.

» Quanto vale la funzione $y = (3x^2-6x-9)/(x+1)$ per $x = -1$? E quanto vale *vicino* a -1?
» Quanto vale la funzione $y = (4x^2-6x+2)/(x-½)$ per $x = ½$? ? E quanto vale *vicino* a ½?
» Quanto vale la funzione $y = (½\, x^2 +3x-7/2)/(x+7)$ per $x = -7$? E quanto vale *vicino* al valore -7?

5.5. Ma insomma, a cosa servono questi iperreali?

Applicazioni alla fisica

Considera dt un infinitesimo, alla stregua di ε o δ, sostituisci a s(t+dt) e a s(t) la legge del moto rettilineo uniforme. Semplifica l'espressione quanto possibile e calcola la parte standard del risultato.

Innanzitutto calcoliamo la legge oraria s(t) in t + dt e in t:

$$v = \frac{\frac{1}{2}a(t+dt)^2 + v_0(t+dt) + s_0 - \frac{1}{2}at^2 - v_0 t - s_0}{dt}$$

sviluppando e semplificando si ha

$$v = \frac{\frac{1}{2}at^2 + atdt + \frac{1}{2}adt^2 + v_0 t + v_0 dt + s_0 - \frac{1}{2}at^2 - v_0 t - s_0}{dt}$$

dopo aver eliminati i termini di segno opposto, raccogliamo *dt* e semplifichiamo ottenendo

$$v = at + v_0 + \frac{1}{2}adt$$

se ora calcoliamo la parte standard (ricordando che *dt* è un infinitesimo)

$$v = std\left(at + v_0 + \frac{1}{2}adt\right) = at + v_0$$

Il risultato finale, la parte standard della velocità std(v) ti è familiare? Riconosci un risultato già noto?

È proprio la legge che descrive la velocità istante per istante di un moto rettilineo uniforme! Non molto utile, direte voi, visto che conoscevamo già questa formula. Ma questo risultato, già notevole, si può generalizzare.

Se $s(t) = t^3 - 2t$ è la legge oraria di un moto rettilineo qualsiasi (non uniformemente accelerato), prova a usare lo stesso metodo per determinare la velocità istantanea.

Calcoliamo, come fatto in precedenza, la legge oraria s(t) in t + dt, con *dt* infinitesimo

$$s(t+dt) = (t+dt)^3 - 2(t+dt) =$$
$$= t^3 + 3t^2 dt + 3t \cdot dt^2 + dt^3 - 2t - 2dt$$

ora calcoliamo la differenza s(t+dt) - s(t)

$$s(t+dt)-s(t)=t^3-2t-t^3-3t^2dt-3t\cdot dt^2-dt^3+2t+2dt=$$
$$=(2-3t^2)dt-3t\cdot dt^2-dt^3$$

Ora concentriamo l'attenzione sul rapporto tra la variazione della posizione $s(t+dt) - s(t)$ e l'intervallo di tempo $t + dt - t$

$$\frac{s(t+dt)-s(t)}{dt}=\frac{(2-3t^2)dt-3t\cdot dt^2-dt^3}{dt}=2-3t^2-3t\cdot dt-dt^2$$

Infine prendiamo la parte standard di questo rapporto (ricordando che dt è un innitesimo e quindi anche dt^2 lo è) e abbiamo la legge che descrive la velocità istante per istante del nostro misterioso moto rettilineo

$$v(t)=2-3t^2$$

E tutto anche senza conoscere il tipo di moto che stiamo studiando. Forte!

Applicazioni alla matematica

Vogliamo determinare la tangente alla parabola $y = 2x^2-4x+1$ nel suo punto $T(2,1)$.

Scrivi l'equazione di una generica retta passante per T.

La retta cercata ha equazione $y - 1 = m (x - 2)$ e quindi $y = m (x - 2) + 1$. Ovviamente l'equazione dipende dal coefficiente angolare *m*.

Ora calcola l'ordinata del punto della retta generica la cui ascissa è $2 + dx$. E poi anche l'ordinata del punto della parabola la cui ascissa è sempre $2 + dx$. Calcola la differenza tra le due ordinate.

Iniziamo dalla retta, abbiamo:

$$y(2+dx)=m(2+dx-2)+1=mdx+1$$

Ora passiamo alla parabola

$$y(2+dx)=2(2+dx)^2-4(2+dx)+1$$

che semplificando diventa

$$y(2+dx)=8+8dx+dx^2-8-4dx+1=4dx+1+dx^2$$

Adesso non resta che calcolare la differenza tra le due ordinate

$$4dx+1+dx^2-mdx-1=(4-m)dx+dx^2$$

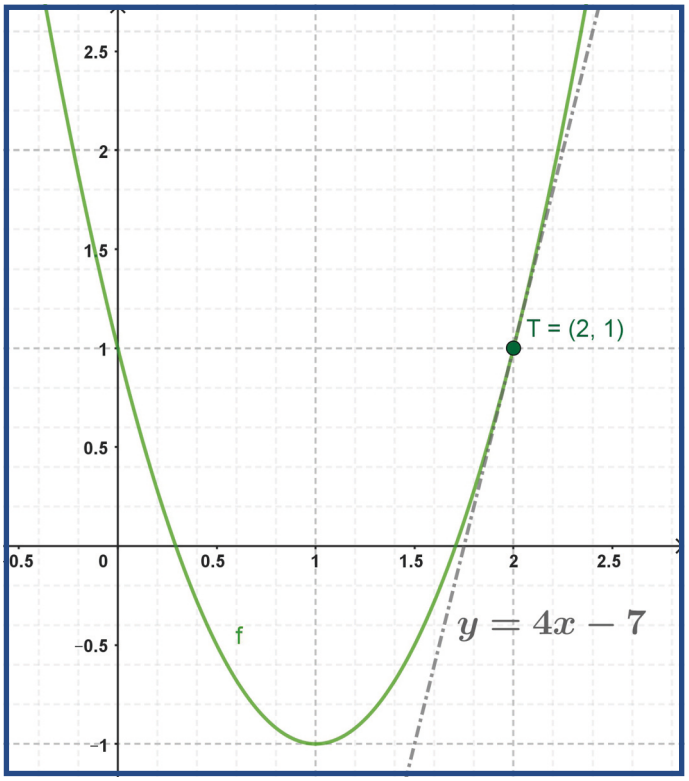
Osserva la differenza tra le ordinate, come devi scegliere *m* in modo che questo delta sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a *dx*.

La differenza in questione ha due termini: uno che dipende dall'infinitesimo dx e l'altro che dipende dall'infinitesimo dx^2 che è di ordine superiore a dx. Se quindi scegliamo $m = 4$ il primo termine scompare, la differenza tra le ordinate diventa semplicemente dx^2 e quindi il nostro obiettivo è raggiunto. Ma allora $m = 4$ è proprio la pendenza, il coefficiente angolare, della retta tangente. Straordinario!

La retta tangente quindi, ma questa è la parte più facile del problema, ha equazione $y = 4x -7$.

Ma la cosa più interessante è la possibilità di generalizzare questo metodo a curve diverse dalla parabola o da una qualsiasi conica!

Qui accanto il grafico della parabola, in colore verde, e la retta $y = 4x - 7$ che è chiaramente tangente alla curva nel punto T.



5.6. Generalizzare

Il procedimento appena usato si può davvero generalizzare senza aumentare la complessità del ragionamento seguito (tutt'al più si complica la parte di calcolo) seguendo due strade.

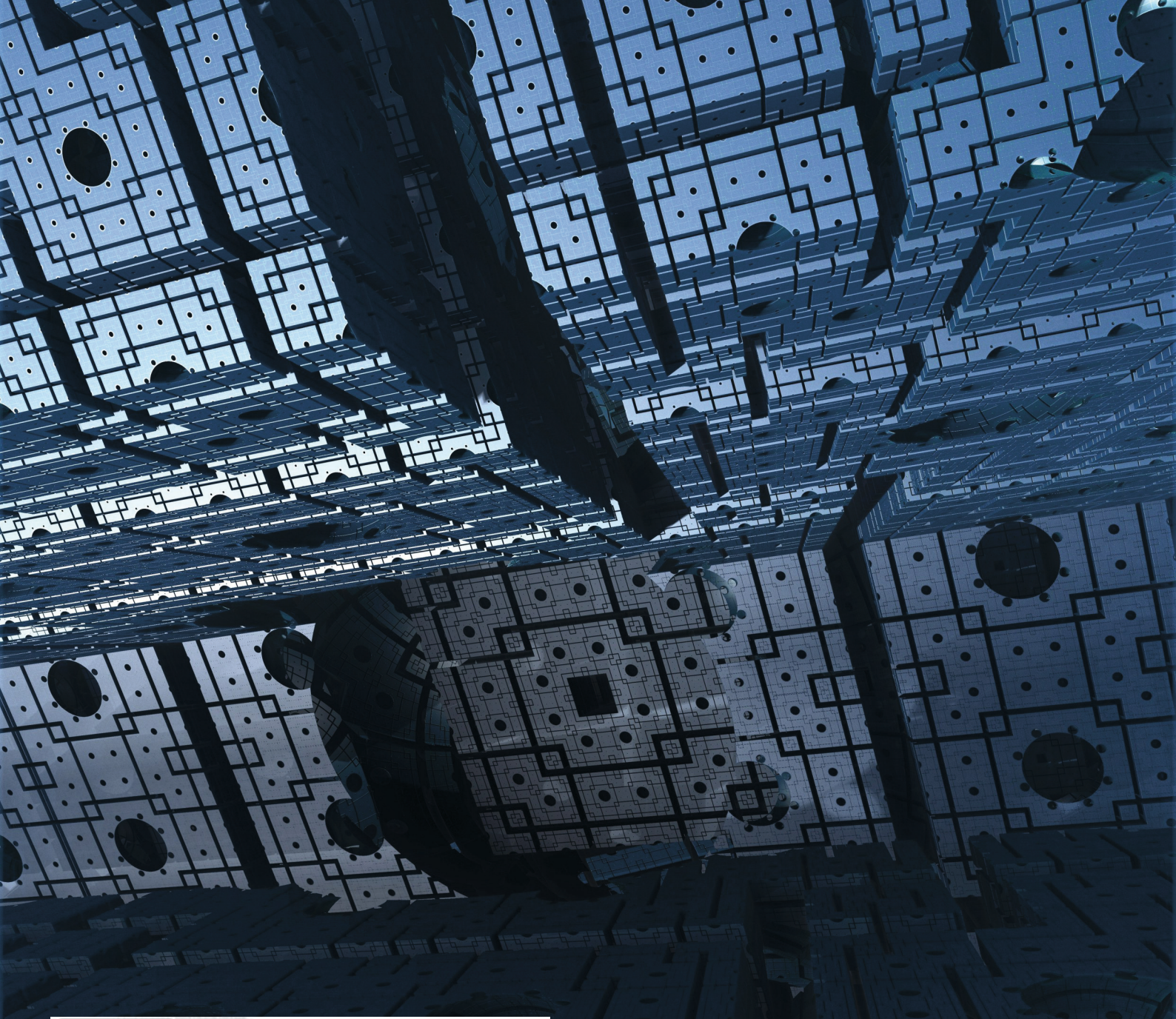
Generalizzare a funzioni qualsiasi

Possiamo applicare lo stesso procedimento a funzioni di tipo diverso. Se volessimo trovare, per esempio, la tangente alla curva $y = x^3 + 2x^2$ nel suo punto $T(-2, 0)$ scopriremmo che per avere la differenza delle ordinate della curva e della retta generica per T pari a un infinitesimo di ordine superiore a dx dovremmo scegliere $m = 4$ che è proprio il coefficiente angolare della retta tangente.

Generalizzare il procedimento

Se invece volessimo applicare questo metodo a una parabola qualsiasi, di equazione generica, come di consueto, $y = ax^2 + bx + c$ in un qualunque suo punto di ascissa anch'essa generica scopriremmo, con qualche calcolo, che il coefficiente angolare avrebbe la forma $m = 2ax + b$, dove x è l'ascissa del punto di tangenza, ottenendo un formula valida per qualsiasi parabola, rapida ed efficiente.

Questi ulteriori passi saranno affrontati nel laboratorio che segue, e completa, questo attuale che avete seguito fino a questo punto.



LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

INM

ISMAR
Istituto di Scienze Marine

LSS G.B. Grassi

liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina

www.liceograssilatina.org

CNR - IAC

Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone

www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma

Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INM

Istituto di iNgegneria del Mare

www.insean.cnr.org

CNR - ISMAR

Istituto di Scienze MARine

www.ismar.cnr.org