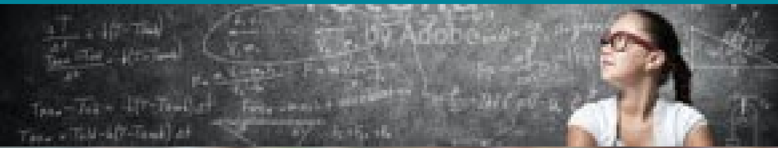
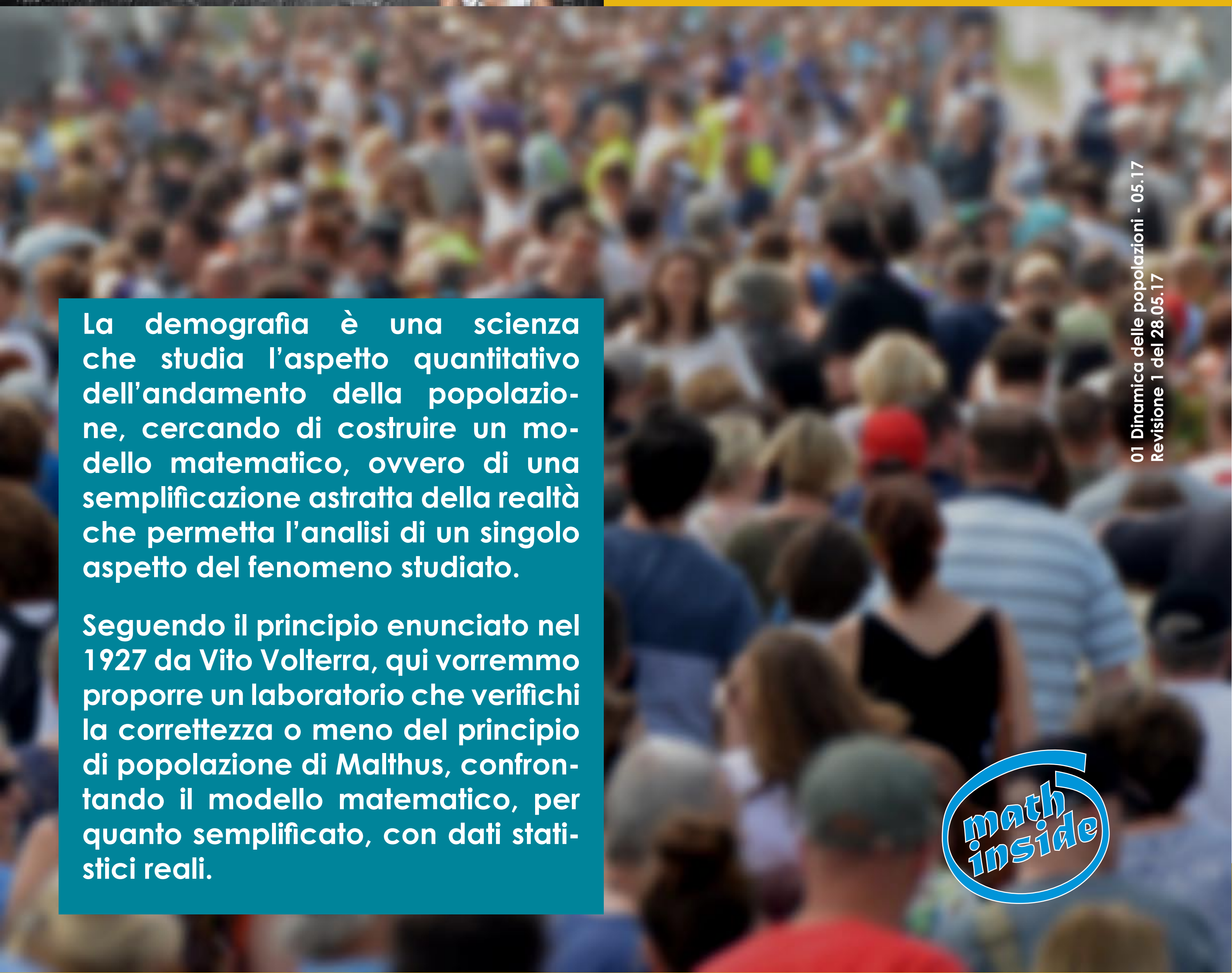
Dinamica delle popolazioni

Una verifica del principio di Malthus



Research in Action - RiA

ria-grassi.blogspot.it



La demografia è una scienza che studia l'aspetto quantitativo dell'andamento della popolazione, cercando di costruire un modello matematico, ovvero di una semplificazione astratta della realtà che permetta l'analisi di un singolo aspetto del fenomeno studiato.

Seguendo il principio enunciato nel 1927 da Vito Volterra, qui vorremmo proporre un laboratorio che verifichi la correttezza o meno del principio di popolazione di Malthus, confrontando il modello matematico, per quanto semplificato, con dati statistici reali.

01 Dinamica delle popolazioni - 05.17
Revisione 1 del 28.05.17

RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

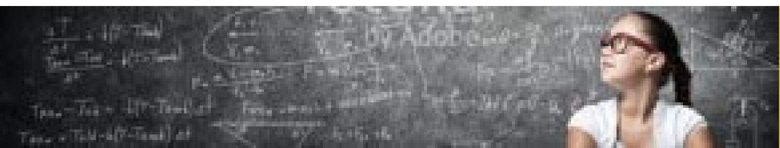
Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alla tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sulla sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.



Sommario dei contenuti

Dinamica delle popolazioni - Una verifica del principio di Malthus

Sommario dei contenuti

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 8.1MB): **drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eVnNOclBRSlpFSVk**;

» la crescita della popolazione rappresentata usando GeoGebra (in formato GGB di circa 20kB): **drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eMC1hSmJmRkxnX0E**;

» la crescita della produzione di grano rappresentata usando GeoGebra (in formato GGB di circa 16kB): **drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eaVVDU0FaZEMwbTA**.

Dinamica della popolazione

Una verifica del principio di Malthus

1. La dinamica delle popolazioni

Il laboratorio è stato sviluppato in collaborazione con Silvia Basile ed Eleonora Grassucci, il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Iss G.B. Grassi)

Sin dalla fine del Settecento numerosissime sono state le ricerche riguardanti la crescita demografica della popolazione mondiale. Effettivamente, come è facile pensare, l'uomo, seguendo gli ideali umanistici, ha da sempre prestato attenzione a se stesso e agli eventi a lui direttamente collegati come nascite, morti e malattie. La demografia quindi è proprio una scienza che studia l'aspetto quantitativo dell'andamento della popolazione, cercando di costruire un modello matematico, ovvero una semplificazione astratta della realtà che permetta l'analisi di un singolo aspetto del fenomeno studiato.

Il testo di V. Volterra è disponibile *online* grazie al progetto Manunzio: bpfe.eclap.eu/eclap/axmedis/b/bd0/00000-bd05ae74-d168-4c92-9a65-4f461377f7bd/2/~saved-on-db-bd05ae74-d168-4c92-9-a65-4f461377f7bd.pdf

Sostanzialmente il metodo per studiare una popolazione è suggerito da Vito Volterra:

> Per poter trattare la questione matematicamente conviene partire da ipotesi che, pure allontanandosi dalla realtà, ne diano una immagine approssimata. Anche se la rappresentazione sarà, almeno in un primo momento, grossolana, pure, se essa sarà semplice, vi si potrà applicare il calcolo e verificare o quantitativamente o anche qualitativamente se i risultati che si ottengono corrispondono ai dati statistici e quindi saggiare la giustezza delle ipotesi di partenza e avere il terreno preparato per nuovi risultati. *(Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, pubblicato nelle Memorie del R. Comitato talassografico italiano, Mem. CXXXI, 1927).*

Seguendo questo principio, qui vorremmo proporre un laboratorio che verifichi la correttezza o meno di un principio - il principio di popolazione - confrontando il modello matematico, per quanto semplificato, con dati statistici reali.

1.1. Il principio di Malthus

Il *principio di popolazione* fu proposto da Thomas Robert Malthus in un suo famoso saggio nel 1798 e in parole molto semplici si può enunciare in questo modo: *la popolazione di un paese aumenta con progressione geometrica, le risorse invece crescono in progressione aritmetica*. Citando testualmente:

Il testo di T.R. Malthus è disponibile *online* (in inglese): www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf

5

> Taking the population of the world at any number, a thousand millions, for instance, the human species would increase in the ratio of 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. and subsistence as 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc. In two centuries and a quarter, the population would be to the means of subsistence as 512 to 10: in three centuries as 4096 to 13, and in two thousand years the difference would be almost incalculable, though the produce in that time would have increased to an immense extent. *(Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers, Saggio sul principio di popolazione e sui suoi effetti sul futuro miglioramento della società, 1798 pubblicato con lo pseudonimo J. Johnson).*

Traducendo liberamente: *considerando una popolazione mondiale pari* *a un miliardo di individui, per esempio, questa aumenterebbe nel rapporto di 1, 2, 4, 8 ... mentre le risorse come la progressione 1, 2, 3, 4 ... In due secoli e un quarto il rapporto tra popolazione e risorse sarebbe di 512 a 10, in tre secoli come 4096 a 13 e in duemila anni il rapporto sarebbe praticamente incalcolabile anche se la produzione di risorse fosse aumentata di una quantità immensa.* In altre parole, la popolazione cresce in modo esponenziale mentre le risorse aumentano in modo lineare. Uno scenario apocalittico!

Un'introduzione *online* sulla teoria matematica delle popolazioni si può trovare qui: www.science.unitn.it/~anal1/biomat/note/BIOMAT_08_09.pdf a opera del professor Mimmo Iannelli (Università di Trento, Dipartimento di Matematica)

Il nostro scopo è allora quello di controllare se, nel secolo successivo alla pubblicazione del saggio, questa previsione (profezia?) si è realizzata oppure no costruendo un modello matematico per l'aumento della popolazione degli Stati Uniti nel XIX secolo confrontandolo con un modello analogo realizzato per la produzione di grano nello stesso periodo.

1.2. Prerequisiti

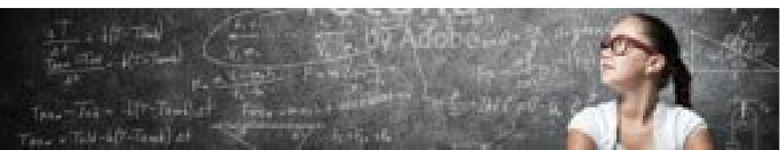
Per questo laboratorio è necessario conoscere:

» la geometria analitica della retta
» logaritmi ed esponenziali e loro proprietà (in particolare è necessario saper tracciare il grafico di funzioni esponenziali)

1.3. Obiettivi

Toolbox - 2. Approssimazione dati lineari a pagina 7 - è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk.

Confrontare un modello per la crescita della popolazione, ottenuto approssimando i dati della popolazione degli Stati Uniti tra il 1800 e il 1900, con il modello ricavato dai dati della produzione di grano nello stesso peridodo sempre negli USA. Sarà necessario conoscere un metodo per approssimare dati lineari ed esponenziali (il Toolbox spiega le procedure per approssimare una serie di dati allineati - lineari - ed esponenziali).



2. Un modello per la crescita della popolazione

Si può usare GeoGebra per eseguire tutto l'esercizio. Sul sito riaexplorer.blogspot.it è disponibile un tutorial per apprendere rapidamente le funzioni di GeoGebra essenziali.

Nella tabella che segue è riportata la popolazione degli Stati Uniti dal 1800 al 1900 con *passi* di dieci anni.

Popolazione negli USA					
Anno	Popolazione	Anno	Popolazione	Scala logaritmica	Coeff. angolare
1800	5.297.000				
1810	7.224.000				
1820	9.618.000				
1830	12.901.000				
1840	17.123.000				
1850	23.261.000				
1860	31.513.000				
1870	39.905.000				
1880	50.262.000				
1890	63.056.000				
1900	76.094.000				

2.1. Sistema di riferimento

Il primo passo è quello di rappresentare i dati su un piano cartesiano. Osserva che la popolazione dipende dal tempo (dall'anno) e non viceversa. Ricorda che, per nostra comodità, possiamo optare per un sistema di riferimento conveniente: in altre parole possiamo scegliere di rappresentare i dati nella scala per noi più comoda selezionando opportunamente l'unità di misura (per esempio, se dovessimo rappresentare sull'asse delle ordinate il prodotto interno lordo degli Stati Uniti, che è nell'ordine di grandezza delle migliaia di miliardi di dollari, sarebbe preferibile per tale asse, come unità di misura, proprio un migliaio di miliardi).

Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Una volta precisata la scala più opportuna completa la tabella che trovi in questa pagina riportando nella terza e quarta colonna i dati dell'anno e della popolazione nella scala che hai scelto. Indica la scala nell'intestazione della colonna.

2.2. Rappresentazione dei dati

Riporta i dati su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata. Puoi usare uno dei piani cartesiani che trovi nella pagina successiva.

Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappppresentato?

2.3. Confronto dei dati con il modello

Un modello, in questo caso, altro non è che una funzione il cui grafico *ricalchi* il più possibile l'andamento della linea spezzata che abbiamo costruito. Si tratta ora di determinare l'equazione di questa funzione, una funzione che approssimi al meglio i dati.

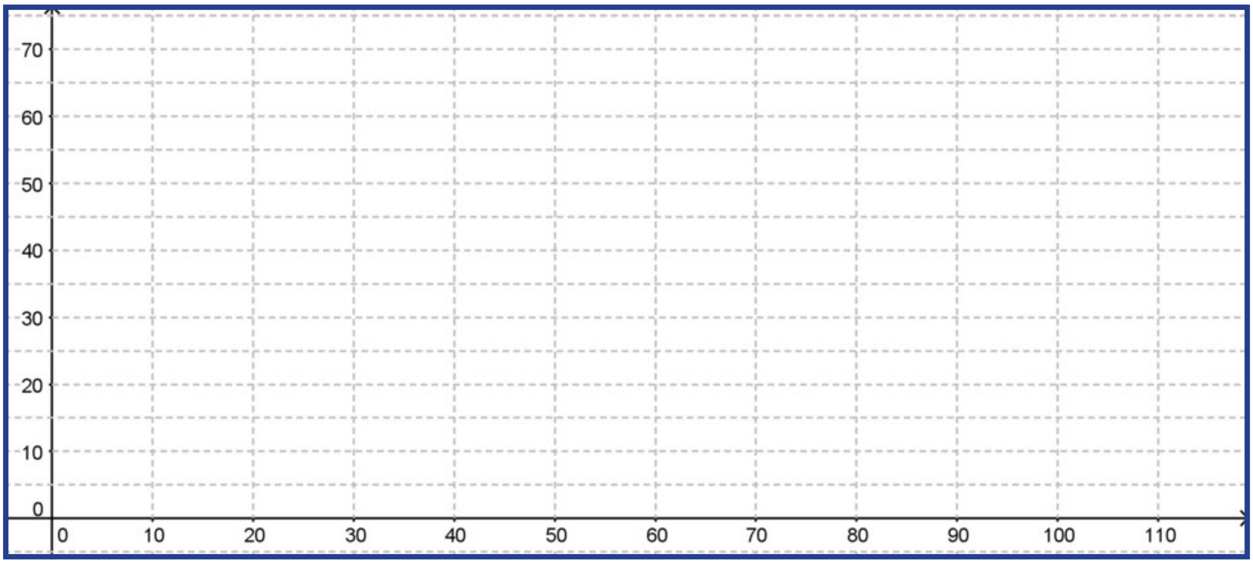
Il Toolbox è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7edXIMOXZrNO15MEk.

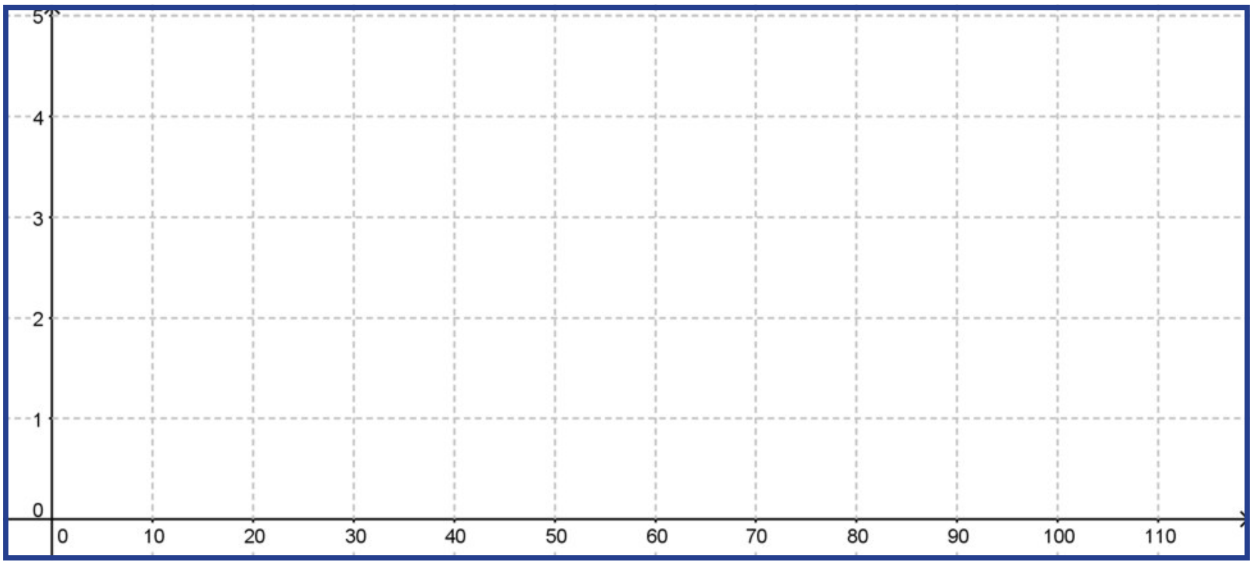
Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.

Per i calcoli intermedi puoi usare le ultime due colonne della tabella che trovi nella pagina precedente. Il Toolbox suggerisce alcuni metodi per approssimare dati sperimentali con una funzione. Può darsi che tu abbia bisogno del secondo piano cartesiano che trovi in questa pagina.

Il grafico segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla crescita della popolazione? Quale modello di crescita è più adatto?

Se il modello che hai costruito è di tipo esponenziale possiamo affermare che, almeno per il periodo preso in considerazione e per gli Stati Uniti, la prima parte del principio di Malthus è confermata.





3. Le risorse: il grano

Per confrontare l'aumento della popolazione con la crescita delle risorse analizzeremo la produzione di frumento negli Stati Uniti nello stesso periodo. La costruzione del modello è più complessa perchè in generale la produzione agricola dipende fortemente dalle condizini meteorologiche e inoltre, nel XIX secolo, è stata influenzata da una serie di innovazioni tecnologiche e da alcune scelte politiche. Tra tutte citiamo: l'espansione della della rete ferroviaria che ha favorito l'agricoltura specializzata (i prodotti viaggiavano più facilmente dai campi ai mercati); nel nord-ovest si coltivava mais e frumento attraverso l'impiego di concimi artificiali e macchine agricole meccaniche; nel 1862 la legge Morril favorì la sperimentazione in agricoltura che spinse l'introduzione di specie di grano più resistenti alle condizioni meteorologiche. In altre parole, dovremo aspettarci un andamento la cui lettura sarà meno semplice.

La tabella che segue riporta la produzione di grano negli USA espresse in tonnellate.

Produzione di grano negli USA				
Anno	Produzione x 10^3 kg	Anno	Produzione	Coeff. angolare
1800	5.297.000			
1810	7.224.000			
1820	9.618.000			
1830	12.901.000			
1840	17.123.000			
1850	23.261.000			
1860	31.513.000			
1870	39.905.000			
1880	50.262.000			
1890	63.056.000			
1900	76.094.000			

3.1. Sistema di riferimento

Come abbiamo già visto, il primo passo è quello di rappresentare i dati su un piano cartesiano. scegliendo un sistema di riferimento quanto più conveniente.

Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala comoda per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (come già osservato, non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Una volta precisata la scala più opportuna completa la tabella che trovi in questa pagina riportando nella terza e quarta colonna i dati dell'anno e della popolazione nella scala che hai scelto. Indica la scala nell'intestazione della colonna.

3.2. Rappresentazione dei dati

Riporta i dati su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata. Puoi usare il piano cartesiano che trovi nella pagina successiva.

Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. È possibile rappresentare i dati con un'unica funzione? O sarebbe meglio dividere l'intero periodo in due intervalli: uno in cui la produzione è praticamente costante e uno in cui la produzione aumenta? Nel periodo in cui la produzione aumenta, riesci a decidere che

tipo di andamento ha?

Ti dovresti essere accorto che, come avevamo previsto, la *modellizzazione* dell'andamento della produzione del grano è più complesso del precedente. Qui dobbiamo usare la nostra sensibilità per scegliere quali dati usare senza perdere di generalità.

3.3. Confronto dei dati con il modello

Come già fatto in precedenza per la popolazione, si tratta ora di determinare l'equazione di una funzione che approssimi al meglio i dati.

Il Toolbox è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7edXlM0XZrNO15MEk.

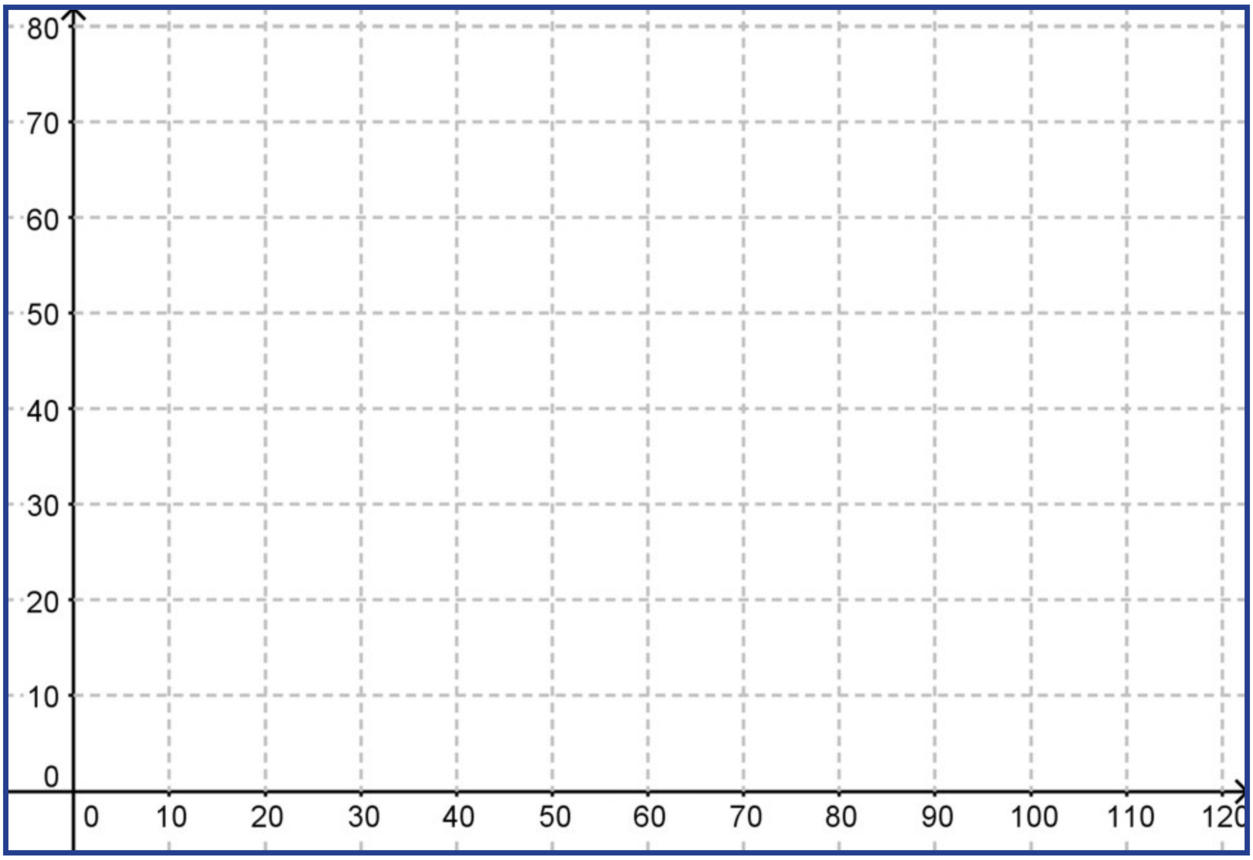
Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.

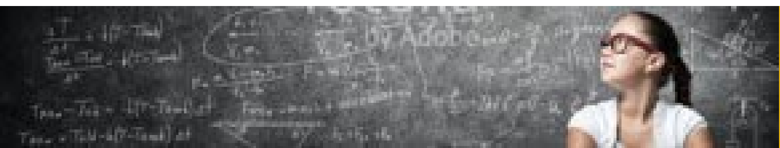
Per i calcoli intermedi puoi usare l'ultima colonna della tabella che trovi nella pagina precedente. Il Toolbox suggerisce alcuni metodi per approssimare dati sperimentali con una funzione. Può darsi che tu abbia bisogno del piano cartesiano che trovi in questa pagina.

Il grafico segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla crescita della popolazione? Quale modello di crescita è più adatto?

3.4. Conclusioni

Ora dovremmo essere in grado di trarre le nostre conclusioni. Se la popolazione aumenta in modo esponenziale e la produzione di grano in modo lineare (o peggio, rimane costante), il principio di popolazione enunciato da Malthus è sostanzialmente vero. In caso contrario è, in tutto o in parte, falso.





Soluzioni

Una verifica del principio di Malthus

4. Un modello per la crescita della popolazione

4.1. Sistema di riferimento

Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Rappresentiamo il tempo sull'asse delle ascisse in modo che l'anno 1800 corrisponda a zero. Sull'asse delle ordinate la popolazione misurata in milioni. Nella tabella che segue la terza e la quarta colonna riportano anni e popolazione nella scala scelta (delle ultime due colonne parleremo più avanti).

Popolazione negli USA

Anno	Popolazione	Anno - 1800	Popolazione x 10^6	Scala logaritmica	Coeff. angolare
1800	5.297.000	0	5,297	1,667	-
1810	7.224.000	10	7,224	1,977	0,0310
1820	9.618.000	20	9,618	2,264	0,0286
1830	12.901.000	30	12,901	2,557	0,0294
1840	17.123.000	40	17,123	2,840	0,0283
1850	23.261.000	50	23,261	3,147	0,0306
1860	31.513.000	60	31,513	3,450	0,0304
1870	39.905.000	70	39,905	3,687	0,0236
1880	50.262.000	80	50,262	3,917	0,0231
1890	63.056.000	90	63,056	4,144	0,0227
1900	76.094.000	100	76,094	4,332	0,0188

4.2. Rappresentazione dei dati

Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rapppresentato?

Nella figura che si trova nella pagina successiva i punti di colore rosso sono i dati della popolazione in funzione dell'anno, i segmenti di colore rosso più scuro che li congiungono rappresentano la linea spezzata desiderata. Appare abbastanza evidente che si tratta di un fenomeno di crescita esponenziale, per esserne sicuri rappresentiamo gli stessi dati in scala logaritmica, se in scala logaritmica i dati, rappresentati sul piano cartesiano, hanno un andamento lineare questo confermerebbe l'ipotesi che il fenomeno ha un andamento esponenziale (infatti una serie di misure esponenziali rappresentate in scala logaritmica appaiono allineate - vedi il Toolbox).

Il Toolbox - 3. Approssimazione di dati esponenziali a pagina 11 - è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7edXIM0XZrNO15MEk.

Nella tabella in alto la penultima colonna contiene il logaritmo naturale della popolazione anno per anno, mentre nella figura della pagina successiva i punti in colore blu rappresentano i dati in scala logaritmica (per comodità abbiamo usato lo stesso piano cartesiano). Come si vede risultano quasi perfettamente allineati, possiamo arrischiare una previsione: la popolazione degli Stati Uniti, nel periodo considerato, è aumentata in modo esponenziale.

L'ultima colonna della tabella contiene il coefficiente angolare di ogni segmento che unisce due punti successivi della linea spezzata blu. la media di questi coefficienti angolari è:

$$m_{medio} \simeq 0.27$$

Dal blog riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto drive.google.com/open?id=0Bxr3OLTGqG7eMC1hSmJmRkxnXOE usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

A questo punto possiamo scrivere l'equazione della retta che approssima la serie di dati in scala logaritmica tenendo conto che ha come coefficiente angolare la media dei coefficienti angolari appena calcolata e come *quota* - ordinata all'origine - l'ordinata del primo punto (così come descritto nel Toolbox):

$$r: y = 0.27 \cdot x + 1.667$$

Il Toolbox - 3. Approssimazione di dati esponenziali a pagina 11 - è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr3OLTGqG7edXIM0XZrNO15MEk.

La retta è tratteggiata in colore azzurro più chiaro ma è quasi invisibile perchè si sovrappone quasi perfettamente alla linea spezzata che unisce i dati in scala logaritmica.

4.3. Confronto dei dati con il modello

Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.

La funzione esponenziale cercata è del tipo:

$$f(x) = a \cdot e^{bx}$$

dove il parametro a corrisponde all'ordinata del primo punto (nel nostro caso la popolazione nel 1800) e il parametro b al coefficiente angolare della retta che approssima i dati in scala logaritmica e che abbiamo appena calcolato. In conclusione la funzione cercata è:

$$f(x) = 5.297 \cdot e^{0.027 \cdot x}$$

La funzione $f(x)$ è tracciata in colore rosso nella figura della pagina precedente.

Il grafico segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla crescita della popolazione? Quale modello di crescita è più adatto

La funzione $f(x)$ approssima abbastanza bene i dati della popolazione degli Stati Uniti tra il 1800 e il 1900, in modo più preciso all'inizio e alla fine del periodo mentre sottostima i dati dopo il 1850 ma ci possiamo ritenere soddisfatti. Possiamo concludere, come già anticipato, che la popolazione è aumentata in modo esponenziale!

Nella figura che si trova sempre nella pagina precedente abbiamo anche tratteggiato in colore più chiaro la funzione ottenuta analizzando con GeoGebra gli stessi dati e scegliendo un modello di regressione esponenziale. Le due curve, quella ottenuta direttamente con GeoGebra e quella costruita da noi, si *somigliano* abbastanza, soprattutto nel primo periodo.

5. Le risorse: il grano

5.1. Sistema di riferimento

Come abbiamo già visto, il primo passo è quello di rappresentare i dati su un piano cartesiano. scegliendo un sistema di riferimento quanto più conveniente.

Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (come già osservato, non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Rappresentiamo sull'asse delle ascisse il tempo facendo coincidere il primo anno della serie, il 1800, con zero (come già in precedenza) e sull'asse delle ordinate la produzione di grano in milioni di tonnellate (10^6 ton, 10^9 kg).

Produzione di grano negli USA				
Anno	Produzione x 10^3 kg	Anno - 1800	Produzione x 10^9 kg	Coeff. angolare
1800	5.297.000	0	5.297	
1810	7.224.000	10	7.224	
1820	9.618.000	20	9.618	
1830	12.901.000	30	12.901	
1840	17.123.000	40	17.123	0.400
1850	23.261.000	50	23.261	0.300
1860	31.513.000	60	31.513	0.900
1870	39.905.000	70	39.905	1.000
1880	50.262.000	80	50.262	2.800
1890	63.056.000	90	63.056	0.200
1900	76.094.000	100	76.094	1.600

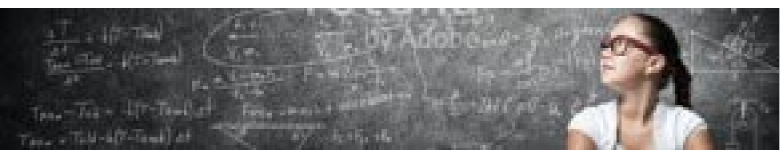
5.2. Rappresentazione dei dati

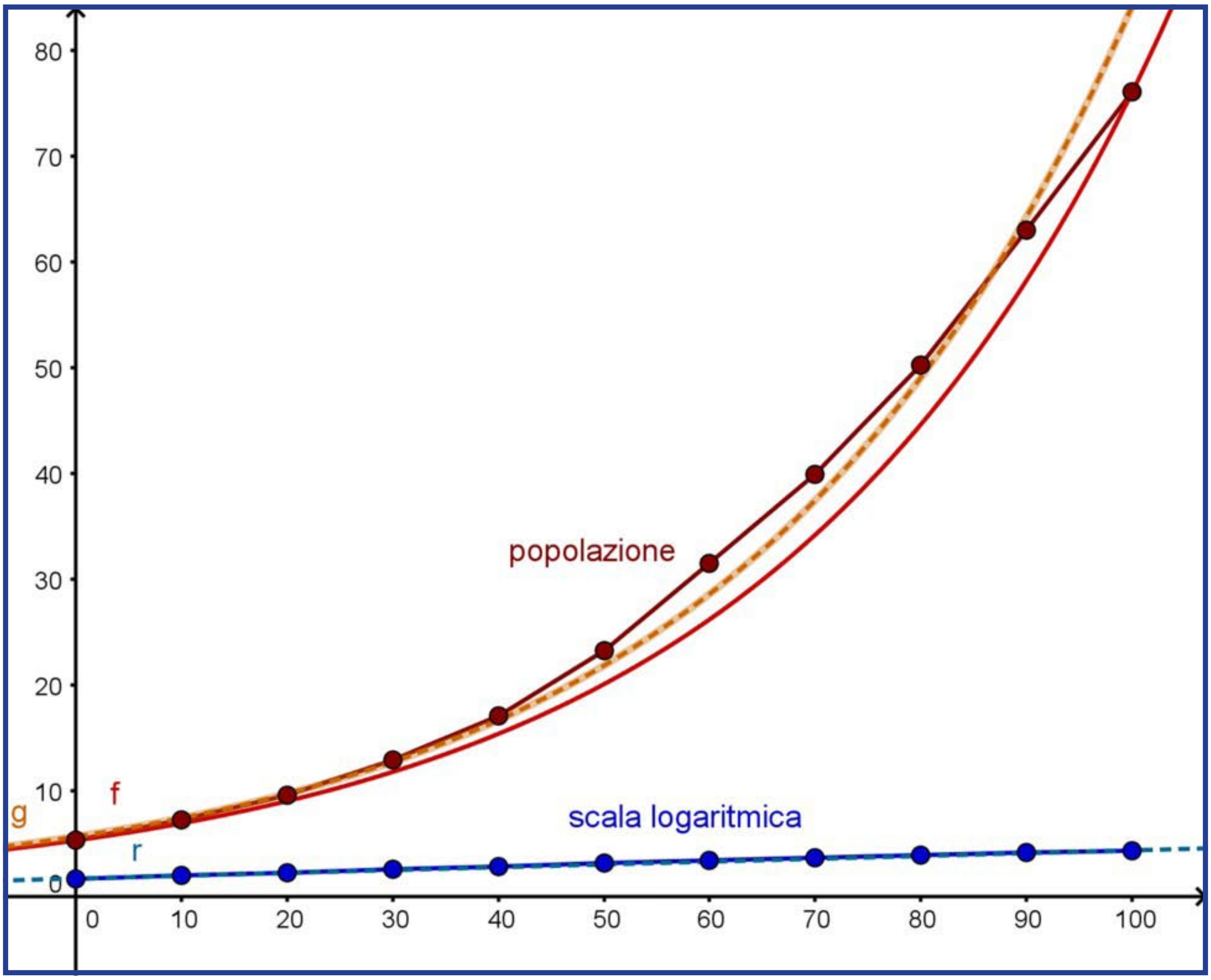
Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. È possibile rappresentare i dati con un'unica funzione? O sarebbe meglio dividere l'intero periodo in due intervalli: uno in cui la produzione è praticamente costante e uno in cui la produzione aumenta? Nel periodo in cui la produzione aumenta, riesci a decidere che tipo di andamento ha?

La figura della pagina successiva mostra in colore rosso più scuro i dati sperimentali e la linea spezzata che unisce i punti corrispondenti. Non si tratta di un andamento omogeneo, si riconoscono fondamentalmente due periodi: il primo, fino al 1830, in cui la produzione rimane praticamente costante e il secondo in cui la produzione aumenta più o meno in modo costante tranne un *salto* nel decennio 1870-1880 in cui c'è un rapido e sensibile aumento della produzione. Per gli scopi che ci siamo prefissi trascuriamo il trentennio iniziale (in cui il principio di Malthus sarebbe più che confermato, visto che la produzione della risorsa in esame non aumenta) e concentriamoci sul periodo che va dal 1830 al 1900.

Il Toolbox - 3. Approssimazione di dati lineari a pagina 7 - è qui: drive.google.com/open?id=0Bxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk.

In questi settanta anni la produzione aumenta in modo abbastanza lineare o meglio, sarebbe lineare se non fosse presente il repentino incremento che abbiamo notato in precedenza.





5.3. Confronto dei dati con il modello

Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.

Se, come detto, la crescita sembra costante, proviamo ad approssimare i dati con una linea retta. Per far questo calcoliamo i coefficienti angolari dei segmenti che uniscono i due punti successivi limitandoci al periodo che abbiamo selezionato (i coefficienti angolari sono riportati nell'ultima colonna della tabella della pagina precedente). La media di questi coefficienti angolari è:

$$m_{medio} = 1.029$$

L'equazione cercata è quella di una retta che passa per il punto corrispondente al 1830 e che ha come coefficiente angolare proprio la media che abbiamo calcolato:

$$y = m_{medio} \cdot (x - x_{1830}) - y_{1830} = 1.029 \cdot x - 24.857$$

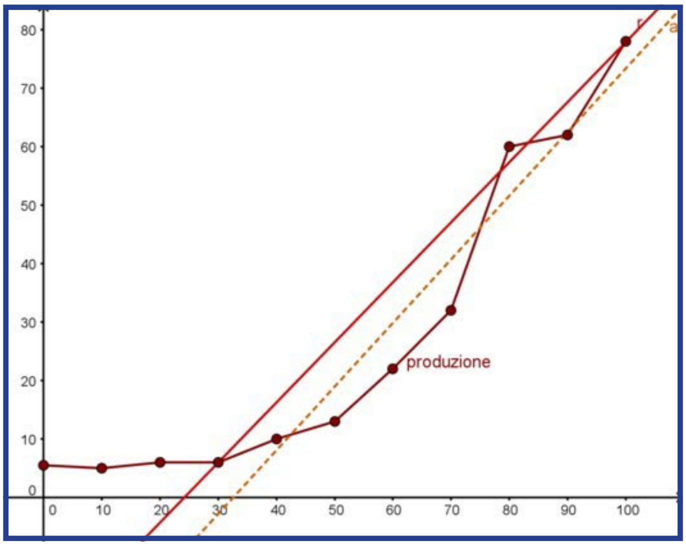
La retta è tracciata in figura in colore più chiaro, in arancione è tratteggiata la retta ottenuta mediante regressione lineare (usando le funzionalità di GeoGebra).

Il grafico segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla crescita della produzione di frumento? Quale modello di crescita è più adatto.

La retta che abbiamo determinato descrive abbastanza bene l'andamento della produzione del

Dal blog riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto
drive.google.com/open?id=0Bxr3OLTGqG7eaVVDUO-FaZEMwbTA
GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/

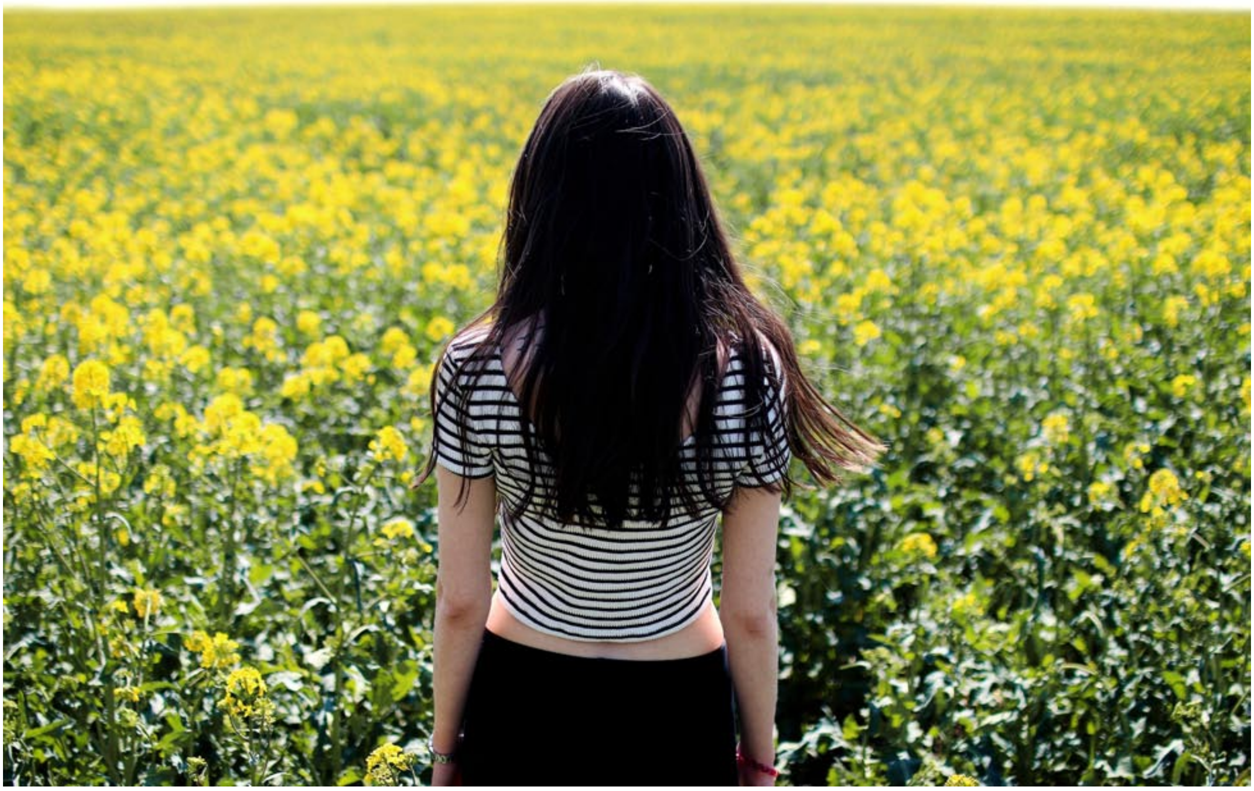
grano negli ultimi trent'anni del XIX secolo, un po' meno nei cinquanta anni precedenti (soprattutto a causa del *salto* che abbiamo già notato) ma è chiaro che, con una certa approssimazione, la crescita è lineare, come dimostra anche la retta di regressione.



5.4. Conclusioni

Possiamo dedurre, in conclusione, che il principio di popolazione enunciato da Malthus, almeno *per gli Stati Uniti del 1800*, sembra abbastanza realistico: l'aumento della popolazione in quel secolo fu decisamente più rapido della crescita delle risorse agricole (un'analisi su altri prodotti come il mais porterebbe a risultati simili).

In realtà il discorso è più complesso di come lo abbiamo trattato qui per svariati motivi che, però, esulano dagli obiettivi di questo laboratorio. Può essere interessante, però, ripetere l'analisi su un paese diverso e su un periodo più recente (per esempio, negli esercizi che seguono si propone, tra le altre cose, di analizzare l'aumento della popolazione italiana nel secolo successivo a quello che abbiamo affrontato in questo laboratorio: le conclusioni saranno totalmente diverse!).



6. Esercizi

6.1. PIL (Prodotto Interno Lordo) USA

Il *Prodotto Interno Lordo* (PIL) misura il valore di tutte le merci prodotte e di tutti i servizi forniti in un paese in un certo periodo. L'aggettivo *interno* specifica che sono esclusi i beni e i servizi prodotti da operatori nazionali all'estero mentre sono inclusi quelli prodotti nel paese da operatori stranieri. Il PIL è spesso utilizzato, a torto o a ragione, come indicatore del benessere di una nazione.

La tabella che segue mostra il PIL degli Stati Uniti nel periodo che va dal 1800 al 1900, si chiede, in modo simile a quanto già fatto in precedenza, di determinare un modello di crescita e confrontarlo con i modelli costruiti per la popolazione e per il frumento.

PIL (Prodotto Interno Lordo) negli USA					
Anno	PIL $	Anno	PIL	Scala logaritmica	Coeff. angolare
1800	480.000.000				
1810	700.000.000				
1820	700.000.000				
1830	1.010.000.000				
1840	1.550.000.000				
1850	2.560.000.000				
1860	4.320.000.000				
1870	7.790.000.000				
1880	10.400.000.000				
1890	15.200.000.000				
1900	20.700.000.000				

6.2. Popolazione in Italia

La tabella che segue riporta la popolazione in Italia rilevata nei censimenti che vanno dal 1901 al 2001.

Determinare una funzione che approssimi la crescita della popolazione italiana nel XX secolo e confrontarla con il modello che descrive l'aumento della popolazione degli USA nel XIX secolo.

Produzione di grano negli USA				
Anno	Popolazione	Anno	Popolazione	Coeff. angolare
1901	32.963.316			
1911	35.841.563			
1921	39.396.757			
1931	41.043.489			
1941	42.398.489			
1951	47.515.537			
1961	50.623.569			
1971	54.136.547			
1981	56.556.911			
1991	56.778.031			
2001	56.995.744			

6.3. Frumento in Italia

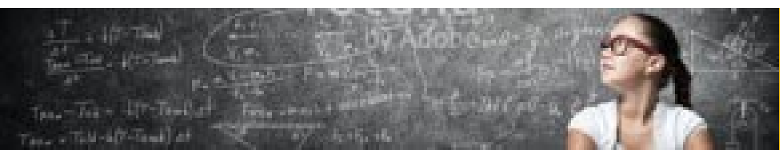
Ancora una tabella che riporta la produzione totale di frumento in Italia nel decennio che va dal 2000 al 2010.

Rappresentare i dati su un piano cartesiano scegliendo opportunamente un sistema di riferimento e costruire un modello che descriva, meglio possibile, l'andamento della produzione di frumento in Italia.

Produzione di frumento in Italia				
Anno	Produzione $\times 10^2$ kg	Anno	Produzione	Coeff. angolare
2000	76.047.829,00			
2001	65.099.728,00			
2002	78.835.212,00			
2003	63.367.584,00			
2004	87.770.818,00			
2005	78.652.636,00			
2006	72.995.105,00			
2007	72.718.221,00			
2008	89.570.498,00			
2009	66.522.222,00			
2010	69.236.676,00			

6.4. Ulteriori esercizi

Sul sito *U.S. Census Bureau* - www.census.gov/population/international/, *EuroStat* - ec.europa.eu/eurostat/data/database, e ISTAT - www.istat.it/it/prodotti/banche-dati, è possibile trovare altri dati per ulteriori esercizi (popolazione, produzione, ... anche di paesi diversi da Stati Uniti e Italia).



LSS G.B. Grassi

liceo scientifico statale G.B. Grassi di LAtina

www.liceograssilatina.org

CNR - IAC

Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone

www.iac.cnr.org

CNR - IFN Roma

Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

www.roma.ifn.cnr.org

CNR - INSEAN

Istituto Nazionale Studi Esperienze e Architettura Navale

www.insean.cnr.org