

Onde gravitazionali

Einstein aveva (un'altra volta) ragione

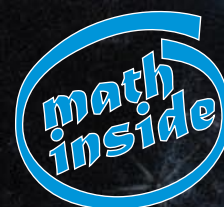
RESEARCH IN ACTION - RIA

RIA-GRASSI.BLOGSPOT.IT

Le recenti scoperte circa le onde gravitazionali provenienti dall'Osservatorio di Onda Gravitazionale di Interferometro Laser (LIGO) hanno portato alla prima prova diretta dell'esistenza di queste perturbazioni. Tali onde gravitazionali sono state prodotte nell'ultima frazione di secondo del processo di fusione di due buchi neri.

Lo scopo di questo laboratorio è quello di individuare e costruire un modello che approssimi adeguatamente uno dei potenziali gravitazionali che hanno determinato la traiettoria dei due buchi neri.

03 Onde gravitazionali - 05.17
Revisione 1 del 28.05.17





RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne dà l'Oxford Living Dictionaries):

A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - www.liceograssilatina.org - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

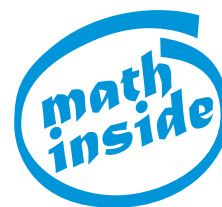
Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi del pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.



La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia (*hi-tech*), come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sulla informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.



Sommario dei contenuti

Onde gravitazionali - Einstein aveva (un'altra volta) ragione

Sommario dei contenuti

1. Effective One Body Model 5

- 1.1. PREREQUISITI 6
- 1.2. OBIETTIVI 6
- IL PROBLEMA DEI DUE CORPI 6

2. Un modello per il potenziale radiale 8

- 2.1. I DATI 8
- 2.2. RAPPRESENTAZIONE DEI DATI E COSTRUZIONE DEL MODELLO 9
- 2.3. SOFTWARE CAS 9
- 2.4. CALCOLO DELL'ERRORE 9

3. Nuovi modelli per i dati 10

- 3.1. MANIPOLIAMO I DATI 10
- 3.2. MANIPOLIAMO LA FUNZIONE 11

4. Un modello per il potenziale radiale 13

- 4.1. I DATI 13
- 4.2. RAPPRESENTAZIONE DEI DATI E COSTRUZIONE DEL MODELLO 13
- 4.3. MANIPOLIAMO I DATI 14
- 4.4. MANIPOLIAMO LA FUNZIONE 15
- 4.5. CONCLUSIONI 16

5. Esercizi 18

- 5.1. UN PASSO AVANTI 18
- 5.2. UN DIVERSO POTENZIALE GRAVITAZIONALE 18



Materiale disponibile per questo laboratorio:

- » il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eV1k1ZmtrN3ZmRkk;
- » il modello in funzione della variabile p rappresentata usando GeoGebra (in formato GGB di circa 15kB): drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eT2hEdXNGQ2tLVUU;
- » il modello in funzione della variabile u rappresentato usando GeoGebra (in formato GGB di circa 15kB): drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7ebXYyd3hQcjd4Q0U;
- » tutti i tre modelli calcolati usando xMaxima (in formato WXM di circa 29kB): drive.google.com/open?id=0Bxr30LTGqG7eSmZtUnpNelJpS1E.



Onde gravitazionali

Einstein aveva (un'altra volta) ragione

1. Effective One Body Model

Questo laboratorio è stato sviluppato con la collaborazione di Donato Bini (CNR-IAC), il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Ist G.B. Grassi)

Le onde gravitazionali sono una deformazione della curvatura spazio-tempo che si espande come un'onda, la cui esistenza, prevista nel 1916 da Albert Einstein come conseguenza della sua teoria della Relatività Generale, è stata confermata sperimentalmente solamente nel settembre 2015.

Tali perturbazioni si propagano alla velocità della luce, ed hanno cominciato a diffondersi a partire dagli istanti successivi al Big Bang. Non si tratta solamente di onde che viaggiano nello spazio, come ad esempio la radiazione elettromagnetica, ma sono in tal caso, la trama stessa dello spazio e del tempo ad oscillare. Queste variazioni sono generate dal moto di sistemi dotati di massa, per cui, tanto più i corpi sono massivi e veloci, tanto più intense sono le onde gravitazionali emesse. È per questo che i fisici preferiscono prendere in considerazione sistemi binari di stelle di neutroni o di buchi neri.

La teoria della gravitazione di Einstein (la Relatività Generale) spiega come la presenza di masse deformi lo spazio. In modo simile a un tappeto elastico, lo spazio è piatto in assenza di materia, ma in sua presenza s'incurva, proprio come il tappeto si deforma se vi poggiamo sopra un oggetto.

Soltanto le recenti scoperte circa le onde gravitazionali provenienti dall'Osservatorio di Onda Gravitazionale di Interferometro Laser (LIGO) hanno portato alla prima prova diretta dell'esistenza di queste perturbazioni, rivelate il 14 settembre 2015, alle 11:50:45. Tali onde gravitazionali sono state prodotte nell'ultima frazione di secondo del processo di fusione di due buchi neri, di massa equivalente a circa 29 e 36 masse solari, unitisi in un unico buco nero ruotante, più massiccio di circa 62 masse solari. Le 3 masse solari mancanti al totale della somma, equivalgono all'energia emessa durante il processo di fusione dei due buchi neri, sotto forma di onde gravitazionali.

Il processo di fusione dei due buchi neri responsabile delle onde gravitazionali rivelate, è un evento accaduto a 410 megaparsec da noi, e risale quindi, a quasi un miliardo e mezzo di anni fa.

PRL 116, 061102 (2016)  Selected for a Viewpoint in Physics
PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending
12 FEBRUARY 2016



Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of 1.0×10^{-21} . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than 5.1σ . The source lies at a luminosity distance of 410^{+160}_{-180} Mpc corresponding to a redshift $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$. In the source frame, the initial black hole masses are $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$ and $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$, and the final black hole mass is $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$, with $3.0^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot} c^2$ radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102



Il testo di Abbott *et al.* con
l'annuncio della scoperta si può
trovare qui:
[physics.aps.org/featured-
article-pdf/10.1103/
PhysRevLett.116.061102](https://physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102)

1.1. PREREQUISITI

Per questo laboratorio è necessario saper:

- » determinare l'espressione di una funzione conoscendone alcune caratteristiche
- » calcolare il margine di errore di una funzione per capire se quest'ultima approssima al meglio una serie di dati

1.2. OBIETTIVI

Lo scopo di questo laboratorio è quello di individuare e costruire un modello, tra le varie opzioni disponibili, per il quale il margine d'errore sia minimo e, quindi, che approssimi adeguatamente i dati forniti, ovvero l'andamento di uno dei potenziali gravitazionali dei due buchi neri, partendo dai dati reali forniti dall'interferometro LIGO nel settembre 2015.

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Dalla *legge di gravitazione universale* formulata da Isaac Newton sappiamo che nell'universo, due corpi di massa m_1 e m_2 , si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale alla somma delle due masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.



Il testo originale di Newton (in latino) si può trovare qui: www.gutenberg.org/files/28233/28233-pdf.pdf (Project Gutenberg) mentre una copia si può sfogliare qui: cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/1 (University of Cambridge Digital Library)

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Tale legge generale, formulata nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, venne pubblicata per la prima volta il 5 luglio 1687 e sostanzialmente derivata per induzione tramite osservazioni empiriche..

Il problema dei due corpi, da cui il titolo di questo paragrafo, riguarda lo studio appunto di due corpi che interagiscono esercitando l'uno con l'altro una forza: la forza di gravità spiegata da Newton. Per la meccanica newtoniana e in seguito anche per la meccanica quantistica, tale difficoltà viene risolta studiando il moto dei due corpi come se fosse il moto del loro centro di massa, e quindi come se fossero un corpo solo.

Infatti l'energia totale del sistema formato dai due corpi è:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 - G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$



o anche

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 - G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

Dove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r_1 e r_2 le intensità dei vettori spostamento che identificano la posizione dei due corpi. Le loro derivate ci danno la velocità con cui i due corpi si stanno spostando. In altre parole, l'energia totale è data dalla somma dell'energia cinetica del primo corpo, dell'energia cinetica del secondo corpo e dell'energia potenziale derivante dall'interazione dei due corpi.

Secondo Newton è possibile calcolare l'energia del sistema dei due corpi trattandola come l'energia generata da un corpo solo di massa M pari alla somma delle masse dei due corpi:



$$E_{TOT} = \frac{1}{2}M|\vec{R}'|^2 + \frac{1}{2}\mu|\vec{r}'|^2 - G\frac{M\cdot\mu}{|\vec{r}|^2}$$

dove M è appunto la somma delle masse dei due corpi ed R il vettore che individua la posizione del baricentro dei due corpi. In pratica si tratta ancora della somma di due energie cinetiche e dell'energia potenziale. I restanti due parametri sono definiti dalle formule che seguono:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{M}$$

che appare sia nella seconda energia cinetica che nell'energia potenziale e

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{cases}$$

che permette di definire il vettore r .

Le equazioni che governano le interazioni gravitazionali di due corpi, dal punto di vista energetico, corrette via via dalle teorie post-newtoniane, sono talmente complesse da essere intrattabili anche con i calcolatori più moderni. Thibault Damour, Alessandro Buonanno e i loro collaboratori, tra cui Donato Bini che ci ha aiutato a realizzare questo laboratorio, hanno sviluppato una teoria di campo *effettivo* - *Effective One Body (EOB) Model* - che permette la manipolazione delle equazioni attraverso una radicale semplificazione delle stesse sfruttando proprio l'idea di analizzare il problema pensando a un solo corpo massivo. Il formalismo introdotto è stato fondamentale per sviluppare gli oltre 250.000 modelli che sono stati usati per studiare e riconoscere i segnali derivanti dalla fusione di due buchi neri.

Il modello di Hamiltoniana introdotto dal EOB Model assume l'aspetto che segue:

$$\hat{H}_{eff} = \sqrt{p_{r^*}^2 + A\left(1 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + z_3 \frac{p_{r^*}^4}{r^2}\right)}$$

dove A è il **potenziale radiale**. È proprio questa componente del modello che vogliamo approssimare in questo laboratorio!

Ricordiamo che in meccanica e in meccanica quantistica l'Hamiltoniana è associata all'energia totale di un sistema (quantistico o meno) e gioca un ruolo cruciale nel determinare l'evoluzione temporale del sistema stesso.



2. Un modello per il potenziale radiale

Per variabile p si intende il *semi-latus rectum*: in una conica corrisponde alla metà della corda parallela alla direttrice che passa attraverso il fuoco (o nel caso dell'ellisse per uno dei due fuochi).

La variabile serve per individuare i punti nello spazio utilizzando, invece delle coordinate cartesiane, le coordinate polari. Le coordinate cartesiane servono, infatti, per determinare la posizione di un punto nello spazio conoscendo le distanze x e y del punto dagli assi, le coordinate polari, invece lo fanno utilizzando la distanza del punto dall'origine r e l'angolo θ che tale direzione forma con il semiasse positivo delle ascisse convenzionalmente considerato positivo se misurato in senso antiorario. Le coordinate cartesiane possono essere scritte come coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Nel piano cartesiano si può scrivere l'equazione dell'ellisse (o in generale di una qualunque conica) in coordinate cartesiane o polari. Nel caso di coordinate cartesiane l'equazione dell'ellisse è una relazione tra le coordinate x e y di un generico punto dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mentre in coordinate polari l'equazione dell'ellisse è una relazione tra le coordinate r e θ di un generico punto dell'ellisse:

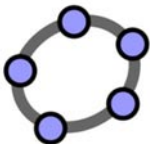
$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta}$$

Come si vede, nel primo caso (coordinate cartesiane) l'equazione dell'ellisse dipende dai 2 parametri a e b mentre nel secondo caso (coordinate polari) l'equazione dell'ellisse dipende ancora da 2 parametri ma ora sono p ed e . Il primo è proprio il *semi-latus rectum* di cui abbiamo parlato in precedenza mentre e è l'eccentricità dell'ellisse, il rapporto tra la distanza focale e l'asse maggiore e fornisce una stima di quanto l'ellisse si discosta da una circonferenza (che infatti ha eccentricità pari a uno).



Nel nostro problema, p indica un punto nello spazio al quale corrispondono un potenziale gravitazionale $a(p)$ e un potenziale gravitazionale $d(p)$. Il nostro obiettivo è costruire un modello che approssimi in parte il potenziale radiale.

2.1. I DATI



Il calcolo numerico di alcune funzioni che fanno parte dell'Effective-One-Body Model hanno prodotto i dati che sono riportati nella tabella della pagina successiva.

Dal blog riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eT2hEdX-NGQ2tLVUU usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

Il primo passo è quello di rappresentare questi dati su un piano cartesiano. Osserva precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e, successivamente, individuare una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Fai riferimento alla prima colonna - p , le ascisse, e alla quarta - $d(p)$, le ordinate. Ignora per ora la seconda e la terza colonna.

2.2. RAPPRESENTAZIONE DEI DATI E COSTRUZIONE DEL MODELLO

Riporta i dati su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata. Puoi usare il piano cartesiano che si trova nella pagina successiva.

Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato?

Se non riconosci un andamento che ti suggerisce una funzione specifica, puoi sempre approssimare i dati con un polinomio.

Determina l'equazione di una funzione $d(p)$ che approssima al meglio i dati. Rappresenta ora la funzione trovata su un piano cartesiano.

Puoi ancora usare il piano cartesiano che trovi nella pagina successiva.

p	$1/p$	$a(p)$	$d(p)$
6.5	0.1538461538	0.01912747008	0.4869936403
7.0	0.1428571429	0.01441264793	0.3827875916
7.5	0.1333333333	0.01112262385	0.3078252156
8.0	0.1250000000	0.008757240491	0.2523982131
8.5	0.1176470588	0.007013586741	0.2104055694
9.0	0.1111111111	0.005700569553	0.1779046763
9.5	0.1052631579	0.004693458379	0.1522760731
10.0	0.1000000000	0.003908444354	0.1317333567
11.0	0.09090909091	0.002790825098	0.1012711338
12.0	0.08333333333	0.002059085408	0.08017072420
13.0	0.07692307692	0.001560706154	0.06497789833
13.5	0.07407407407	0.001370641326	0.05893533322
14.0	0.07142857143	0.001209983056	0.05368923090
15.0	0.06666666667	0.0009562732001	0.04508048140
16.0	0.06250000000	0.0007683675396	0.03837043135
18.0	0.05555555556	0.0005170481503	0.02874250711
20.0	0.05000000000	0.0003639298465	0.02230991431



Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk
suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione di dati sperimentali a pagina 5)

2.3. SOFTWARE CAS

I dati da manipolare per costruire un modello per i potenziali gravitazionali provengono da misure reali per cui non sarà facile effettuare i calcoli necessari a determinare un polinomio interpolatore: *carta e penna* forse non basteranno!

Sarà necessario ricorrere a un'applicazione *CAS* - *Computer Algebra System*, capace di eseguire calcoli simbolici, derivate, e quant'altro sia necessario. Ovviamente è possibile usare una qualsiasi altra applicazione di tipo *CAS*, ma qui suggeriamo di usare *xMaxima* per la sua potenza e la sua relativa facilità d'uso una volta che ci si è impadroniti dei comandi principali. Di questo laboratorio è possibile scaricare anche il file creato con *xMaxima* (il file, oltre alle istruzioni per calcolare il polinomio, contiene commenti e spiegazioni sui comandi e sulla procedura) e il grafico realizzato con GeoGebra.



Dal blog - riaexplorer.blogspot.it - è possibile scaricare l'esercizio svolto usando xMaxima:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eSmZtUnpNeJp51E
xMaxima si può scaricare qui:
maxima.sourceforge.net/

2.4. CALCOLO DELL'ERRORE

Dobbiamo ora cercare di capire se l'approssimazione trovata è accettabile.

Dopo aver determinato l'equazione della funzione, calcola l'errore che si compie approssimando i dati con il modello, con la funzione $d(p)$, costruito.

Tieni conto che possiamo considerare accettabile un errore nell'ordine di 10^2 , in questo caso i dati sono stati approssimati adeguatamente.

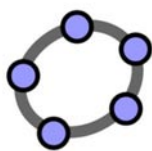


Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk
suggerisce alcuni metodi per il calcolo dell'errore approssimando dati sperimentali (cfr. 1 Il calcolo dell'errore a pagina 5)



3. Nuovi modelli per i dati

Non sempre, analizzando e trattando dati sperimentali, ci si può accontentare di costruire una funzione approssimante esaminando semplicemente i dati e cercando una funzione che *passi* per i punti forniti dall'esperimento. A volte può essere necessario manipolare i dati, metterli in una forma differente, cercare una funzione apparentemente più complessa o meno immediata ma che riesce a spiegare meglio il fenomeno. In questi due paragrafi che seguono vogliamo provare a fare proprio questo: costruire due nuovi modelli per gli stessi dati ma trasformandoli o trasformando la funzione approssimante.



Dal blog
riaexplorer.blogspot.it è
possibile scaricare il laboratorio
svolto:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7ebXYyd3-hQcjg4QOU
usando GeoGebra.
GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/

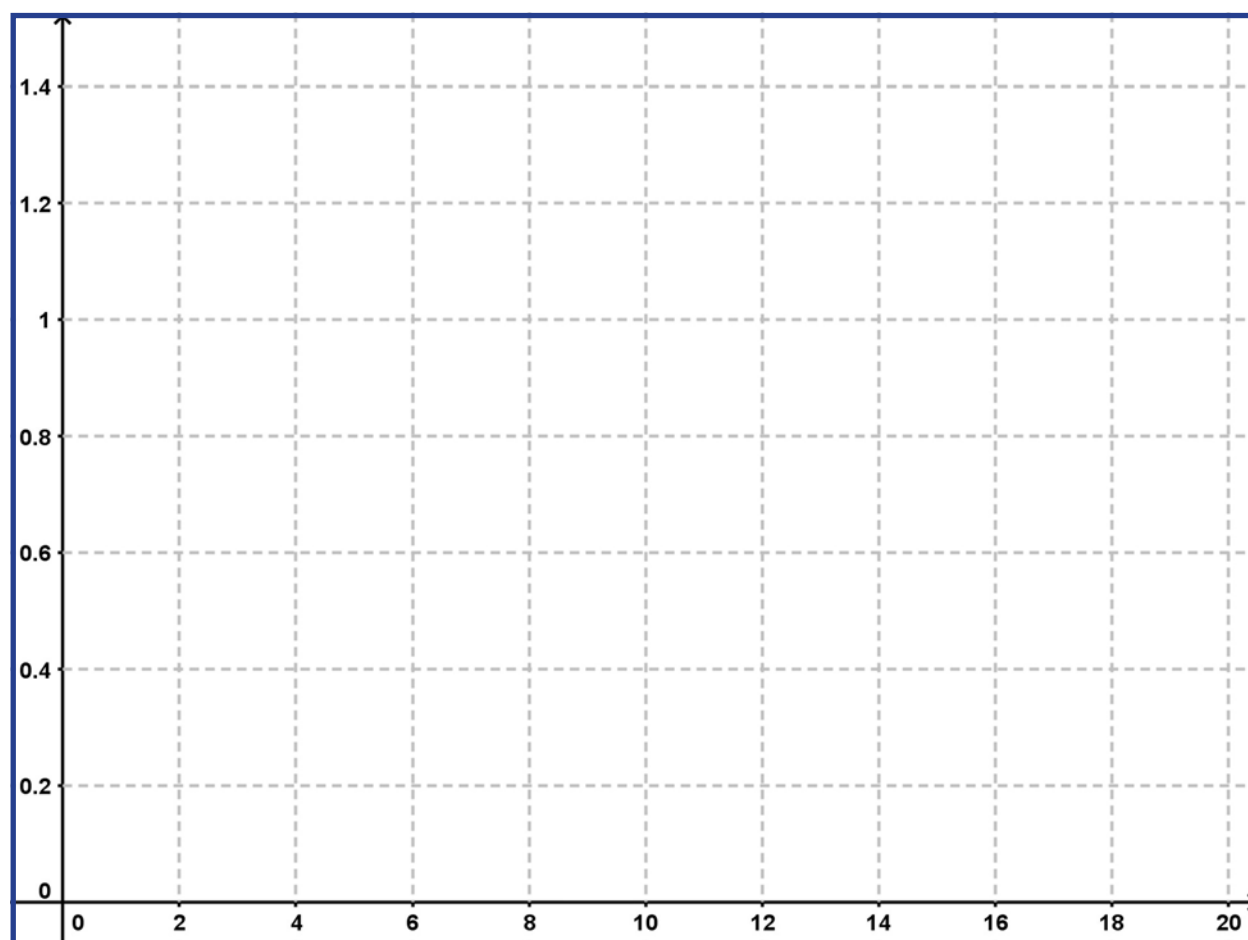
3.1. MANIPOLIAMO I DATI

Nella tabella con i dati sperimentali che si trova a pagina 9 e che abbiamo già usato per costruire il primo modello del potenziale gravitazionale, c'è anche una colonna - la seconda - che contiene il reciproco $1/p$ delle ascisse p che abbiamo usato in precedenza.

Sai dire perchè potrebbe essere utile costruire il modello usando questa rappresentazione (modificando l'ascissa da p a $1/p$)? Rappresenta ora i dati su un piano cartesiano non più in funzione delle ascisse p , ma in funzione di $u = 1/p$.

Come vedi abbiamo una nuova rappresentazione dei dati, diversa dalla precedente. Procediamo come prima per costruire un modello di questa nuova rappresentazione.

Unisci i punti rappresentati, in modo da ottenere una linea spezzata che approssimi il potenziale in funzione di u . In seguito rappresenta la funzione precedentemente individuata in funzione di u . Ora osserva i punti e il nuovo modello costruito, il modello



approssima i punti rappresentati al meglio?

Come in precedenza dobbiamo valutare la qualità del modello e la validità dell'approssimazione che abbiamo ottenuto.

Calcola il margine d'errore del modello che approssima i dati in funzione di u .

Tieni conto che il nuovo modello è accettabile se l'errore appena calcolato è di un ordine di grandezza pari o inferiore a quello ottenuto con l'approssimazione precedente.

3.2. MANIPOLIAMO LA FUNZIONE

A seguito da studi sui dati è emerso che per $u \ll 1$ (dove, come già visto, $u = 1/p$) si hanno dei parametri fissi che permettono di scrivere i primi termini di un polinomio approssimante del tipo:

$$\bar{d}(u) = 6u^2 + 52u^3$$

Si è visto che la struttura di questa funzione è più complessa di quanto possa sembrare a prima vista. Una buona approssimazione si può ottenere con un modello che *mischi* nella stessa funzione polinomi e logaritmi nei termini successivi a u^3 , una funzione del tipo di quello mostrato qui di seguito:

$$\bar{d}(u) = 6u^2 + 52u^3 + [a + b \cdot \ln(u)] \cdot u^4 + [c + d \cdot \ln(u)] \cdot u^5 + e \cdot u^{\frac{11}{2}}$$

Individua i parametri a, b, c, d ed e rappresenta il modello costruito. Visivamente, osservando i dati e il grafico della funzione, come appare ora l'approssimazione?

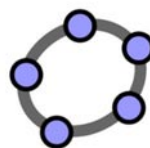
Infine, ancora una volta, valutiamo la qualità dell'approssimazione che abbiamo ottenuto con questo tentativo.

Calcola il margine d'errore del modello misto polinomiale e logaritmico e confrontalo con quelli precedenti. Quale dei due è migliore?

Il modello che ti ha consentito un errore più basso è quello che dovremo fornire al nostro committente come approssimazione del potenziale gravitazionale che stavamo analizzando.



Dal blog - riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare l'esercizio svolto usando xMaxima:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eSmZtUn-pNeJp51E
xMaxima si può scaricare qui:
maxima.sourceforge.net/



Dal blog riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eSmZtUn-pNeJp51E
usando GeoGebra.
GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/





Soluzioni

Einstein aveva (un'altra volta) ragione

4. Un modello per il potenziale radiale

4.1. I DATI

Il primo passo è quello di rappresentare questi dati su un piano cartesiano. Osserva precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e, successivamente, individuare una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario che i due assi abbiano la stessa scala).

Rappresentiamo lo spazio, la variabile p , sull'asse delle ascisse e il potenziale $d(p)$ in centesimi (10^{-2}) sull'asse delle ordinate. Abbiamo scelto gli assi in modo che abbiano un rapporto cento a uno avendo ordinate dei punti sperimentali piuttosto piccole.



Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk
suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali con un polinomio (cfr. 4 Approssimazione mediante polinomi a pagina 13)

4.2. RAPPRESENTAZIONE DEI DATI E COSTRUZIONE DEL MODELLO

Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato?

Osservando i punti inizialmente si potrebbe pensare a una funzione omografica ma, avendo verificato che il margine d'errore è piuttosto grande per il nostro obiettivo, abbiamo ipotizzato un'approssimazione con un polinomio di quarto grado.

Un polinomio di quarto grado presenta cinque parametri, per questo motivo abbiamo impostato un sistema imponendo che il polinomio *passasse* per 5 punti: P_1 di ascissa 6.5, P_5 di ascissa 8.0, P_{10} di ascissa 11.0, P_{15} di ascissa 15.0 e P_{17} di ascissa 18.0. Risolvendo il sistema abbiamo ricavato i 5 parametri che, inseriti nel modello, danno come conseguenza la seguente funzione:

$$d(p) = 1.056 \cdot 10^{-4} \cdot p^4 - 0.006 \cdot p^3 + 0.135 \cdot p^2 - 1.296 \cdot p + 4.740$$

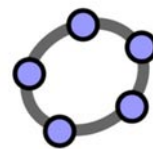
dove abbiamo riportato i coefficienti approssimandoli alla terza cifra decimale.

Rappresenta ora la funzione trovata su un piano cartesiano.

Come si evince anche dal grafico che riportiamo nella pagina seguente, la funzione non passa esattamente per tutti e venti i punti sperimentali, ma ci va molto vicino. È quindi necessario stimare il margine d'errore calcolando la media degli scarti quadratici. A seguito di questo calcolo il margine di errore che è risultato è pari a

$$\bar{S}_n = \frac{\sum_{i=0}^n [p_4(p_i) - y_i]^2}{n+1} = 0.009 \simeq 9 \cdot 10^{-3}$$

Abbiamo quindi un'approssimazione che risponde pienamente ai nostri obiettivi (anche in questo caso abbiamo riportato l'errore approssimandolo alla terza cifra decimale).



Dal blog
riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eT2hEdX-NGQ2tLVUU
usando GeoGebra.
GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/



Dal blog - riaexplorer.blogspot.it - è possibile scaricare l'esercizio svolto usando xMaxima:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7e5mZtUnpNeJp51E
xMaxima si può scaricare qui:
maxima.sourceforge.net/

Ovviamente è possibile fare diversi tentativi anche cambiando i punti e, quindi, i parametri della funzione di quarto grado alla ricerca di un margine d'errore minore e, quindi, un modello più preciso. A ogni modo il risultato trovato è comunque adeguato.

4.3. MANIPOLIAMO I DATI



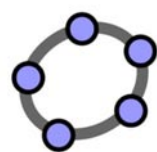
Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk
 suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali con un polinomio (cfr. 4 Approssimazione mediante polinomi a pagina 13)

Sai dire perchè potrebbe essere utile costruire il modello usando questa rappresentazione (modificando l'ascissa da p a $1/p$)? Rappresenta ora i dati su un piano cartesiano non più in funzione delle ascisse p , ma in funzione di $u = 1/p$.

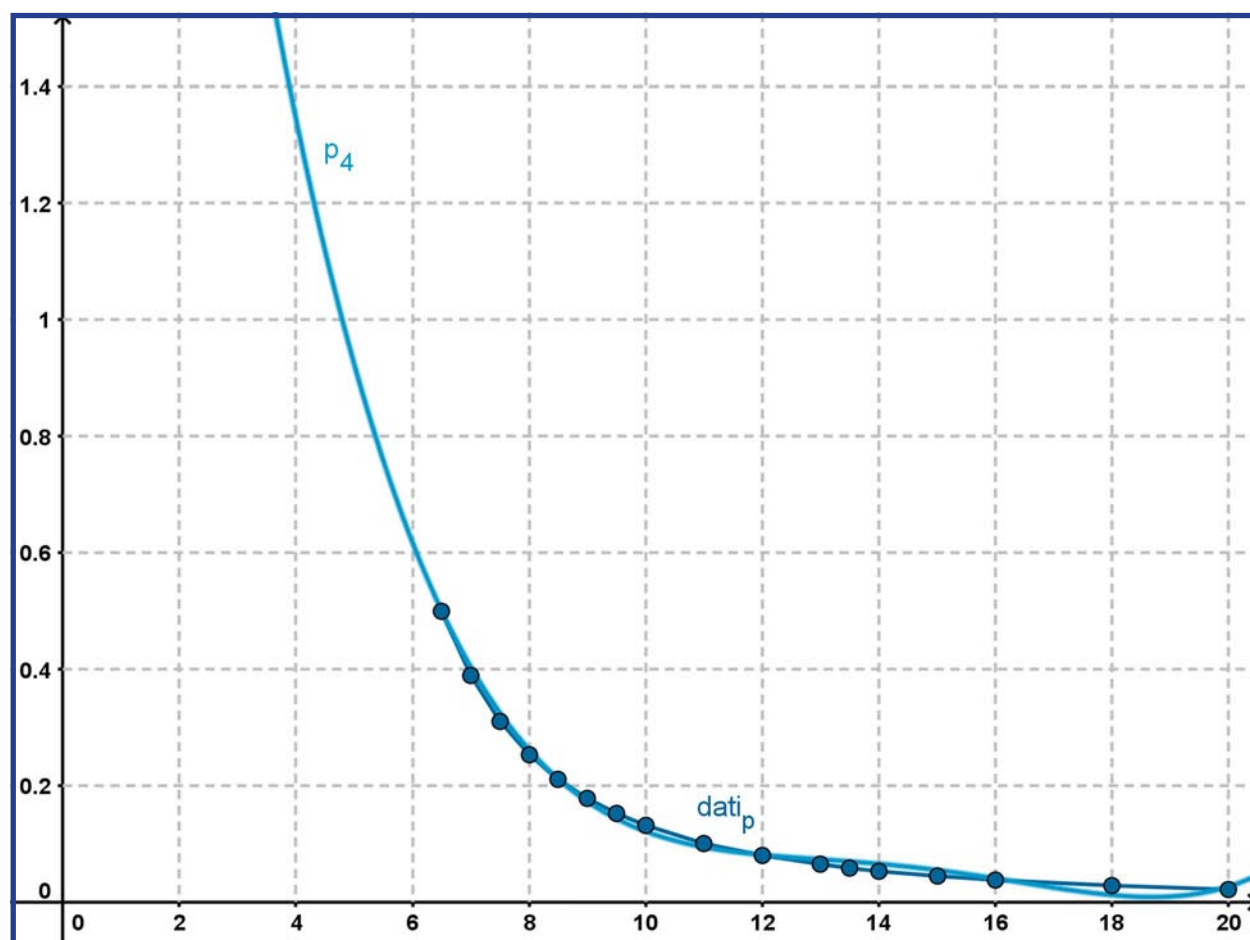
Alle volte manipolare i dati torna utile soprattutto perchè, in questo modo, sono più semplici da trattare. In questo caso utilizzare i dati in funzione di p complica la funzione perchè il dominio della funzione interpolatrice è $P = (0, +\infty)$. Ciò significa avere a che fare con dati che, andando avanti con le rilevazioni e quindi con l'aggiunta di nuove misure, diventano sempre più complessi e sempre più difficili da trattare.

Trasformando i dati in funzione di $u = 1/p$ il dominio diventa $U = (0, 1)$, il codominio resta lo stesso rendendo i dati più semplici da utilizzare e più facili da approssimare. Ovviamente, portando i dati in funzione di u , bisogna costruire un nuovo modello che, stavolta, approssimi i punti in funzione di u .

In questo caso il rapporto tra ascisse e ordinate può essere di 1:1 visto che ora le due serie sono dello stesso ordine di grandezza (questo è un altro, piccolo, vantaggio di questa rappresentazione). I punti sperimentali e la spezzata ottenuta unendo coppie di punti successivi è rappresentata nel grafico che si trova nella pagina successiva in colore rosso scuro.



Dal blog
riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7ebXYyd3-hQcJg4QOU
 usando GeoGebra.
 GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/



Unisci i punti rappresentati, in modo da ottenere una linea spezzata che approssimi il potenziale in funzione di u . In seguito rappresenta la funzione precedentemente individuata in funzione di u . Ora osserva i punti e il nuovo modello costruito, il modello approssima i punti rappresentati al meglio?



Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7edXIMOXZrNO15MEk
 suggerisce alcuni metodi per il calcolo dell'errore commesso approssimando una serie di dati con una funzione (cfr. 1 Calcolo dell'errore a pagina 5)

Anche in questo caso, la nostra scelta è ricaduta su un polinomio di quarto grado, abbiamo quindi scelto di nuovo cinque punti che, per comodità, sono gli i punti corrispondenti a quelli usati in precedenza per costruire il modello in funzione di p e sono i punti U_1 di ascissa 0.15 , U_5 di ascissa 0.118 , U_{10} di ascissa 0.08 , U_{15} di ascissa 0.063 e U_{17} di ascissa 0.06 . Impostando come al solito e risolvendo abbiamo determinato il valore dei parametri per cui il polinomio interpolatore risulta:

$$p_4(u) = 1174.230 \cdot u^4 - 203.393 \cdot u^3 + 31.147 \cdot u^2 - 1.127 \cdot u + 0.019$$

che abbiamo riportato qui arrotondando, come di consueto in questo fascicolo, i coefficienti alla terza cifra decimale.

Il grafico di questo polinomio è tracciato in colore arancione nella figura che si trova in questa stessa pagina, come si vede ricalca quasi perfettamente la spezzata ottenuta dai dati sperimentali.



Dal blog - riaexplorer.blogspot.it - è possibile scaricare l'esercizio svolto usando xMaxima:
drive.google.com/open?id=OBxr3OLTGqG7eSmZtUnpNeJpS1E
 xMaxima si può scaricare qui: maxima.sourceforge.net/

Calcola il margine d'errore del modello che approssima i dati in funzione di u .

Anche se dalla figura non sembra, è opportuno notare che non tutti i punti combaciano quelli della funzione, quindi stimiamo di nuovo il margine d'errore calcolando la media degli scarti quadratici in modo simile a quanto fatto in precedenza. Otteniamo un errore che è di un ordine inferiore del precedente. Un ottimo risultato!

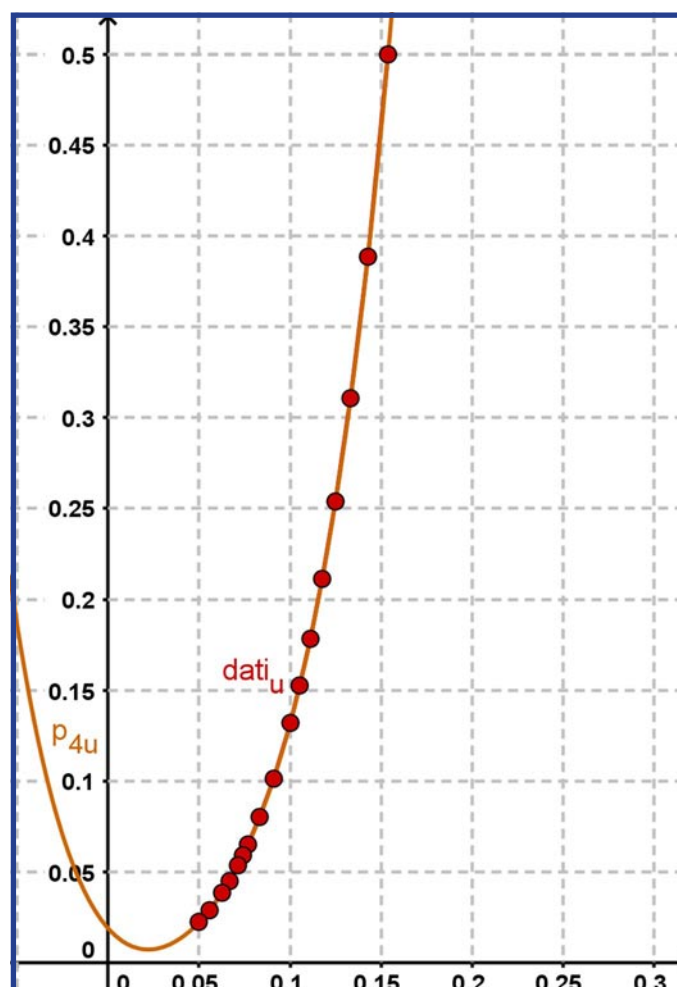
$$\bar{S}_n = 3.025 \cdot 10^{-4}$$

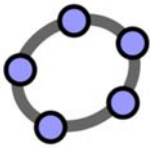
Manipolando i dati, quindi, abbiamo costruito un modello che non solo ci avvantaggia come visto sopra, ma che è anche molto più preciso.

4.4. MANIPOLIAMO LA FUNZIONE

Individua i parametri a, b, c, d ed e rappresenta il modello costruito. Visivamente, osservando i dati e il grafico della funzione, come appare ora l'approssimazione?

La funzione presenta cinque parametri, per cui sono cinque le condizioni da impostare per costruire il modello per cui scegliamo cinque punti tra quelli ricavati dalle osservazioni: U_2 di ascissa 0.143 , U_6 di ascissa 0.111 , U_{11} di ascissa 0.077 , U_{14} di ascissa 0.067 e U_{17} di ascissa 0.050 . Come fatto in precedenza, abbiamo impostato un sistema e, risolvendolo, abbiamo ricavato i parametri che, inseriti nella funzione, ci hanno permesso di costruire





Dal blog
riaexplorer.blogspot.it è
possibile scaricare il laboratorio
svolto:
drive.google.com/open?id=OBxr30LTGqG7ebXYyd3-hQcjg4QOU
usando GeoGebra.
GeoGebra si può scaricare qui:
www.geogebra.org/

una nuova approssimazione usando un modello misto polinomiale e logaritmico. La nuova funzione è la seguente:

$$\bar{d}(u) = u^4 \cdot [-1944.947 \cdot \log(u) - 9961.620] +$$

Il grafico di questa funzione è tracciato in colore marrone nella figura riportata in questa stessa pagina. Già a un'analisi superficiale, a vista, sembra ricalcare perfettamente i dati sperimentali.

Calcola il margine d'errore del modello misto polinomiale e logaritmico e confrontalo con quelli precedenti. Quale dei due è migliore?

Anche in questo caso bisogna ripetere il procedimento per stimare il margine d'errore, che consiste nel calcolo della media degli scarti quadratici. Abbiamo un errore pari a:

$$\bar{S}_n = 1.113 \cdot 10^{-4}$$

Alla luce dei calcoli fatti l'errore minore è quello del modello logaritmico in funzione di u . Errore dello stesso ordine di grandezza del precedente ma comunque più basso.

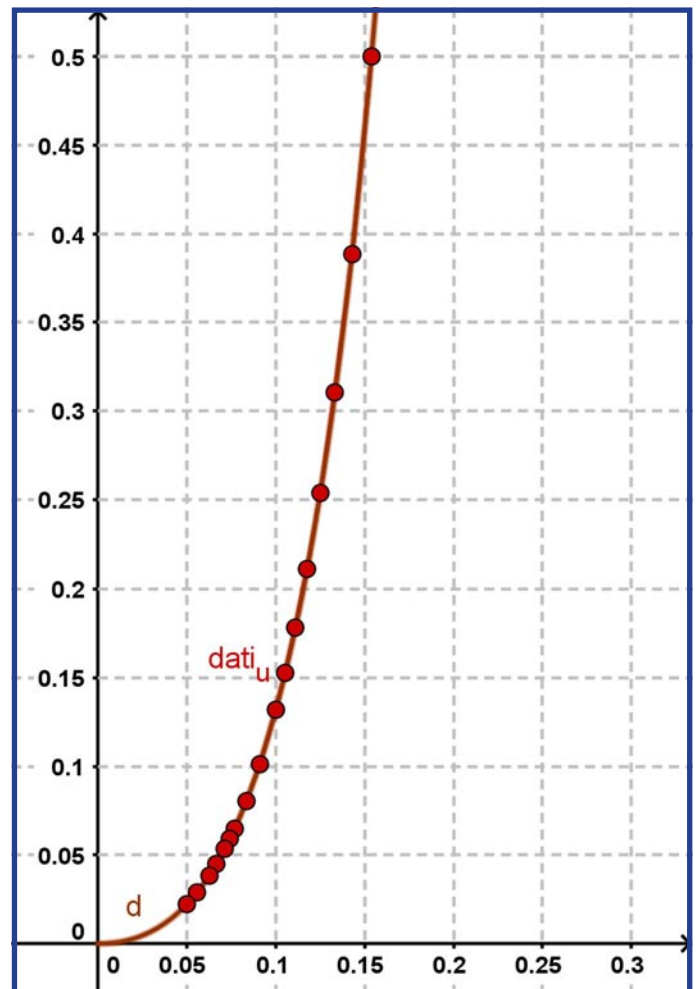


Il Toolbox:
drive.google.com/open?id=OBxr30LTGqG7edXIMOXZrNO15MEK
suggerisce alcuni metodi per il
calcolo dell'errore commesso
approssimando una serie di dati
con una funzione (cfr. 1 Calcolo
dell'errore a pagina 5)

4.5. CONCLUSIONI

Alla luce di quanto fatto l'errore minore si ottiene con una funzione mista polinomiale-logaritmica in funzione della variabile $u = 1/p$.

Abbiamo individuato il miglior modello che approssima il potenziale radiale!





ONDE GRAVITAZIONALI

EINSTEIN AVEVA (UN'ALTRA VOLTA) RAGIONE

5. Esercizi

5.1. UN PASSO AVANTI

Una migliore approssimazione si dovrebbe ottenere espandendo la funzione mista polinomiale-logaritmica che ci ha dato così buoni risultati in questo laboratorio. In particolare potremmo aumentare il grado scegliendo una funzione di questo tipo:

$$\bar{d}(u) = 6u^2 + 52u^3 + [a + b \cdot \ln(u)] \cdot p^4 + [c + d \cdot \ln(u)] \cdot u^5 + e \cdot u^{\frac{11}{2}} + [f + g \cdot \ln(u)] \cdot u^6 + h \cdot u^{\frac{13}{2}}$$

Prova a costruire una nuova funzione approssimante del tipo indicato e valuta l'errore commesso con questa nuova funzione.

Come vedi ci sono tre parametri in più quindi avrai bisogno di usare tre nuovi punti per determinare l'espressione della funzione.

In realtà la conoscenza analitica della funzione $d(p)$ include altri termini, che si conoscono attualmente fino all'ordine $u^{19/2}$, che testimoniano di una struttura trascendente ricca:

$$\begin{aligned} \bar{d}(u) = & 6u^2 + 52u^3 + \\ & + \left[\frac{1184}{15} \gamma - \frac{6496}{15} \ln(2) + \frac{2916}{5} \ln(3) - \frac{23761}{1536} \pi^2 - \frac{533}{45} + \frac{592}{15} \ln(x) \right] x^4 + \\ & + \left[-\frac{2840}{7} \gamma - \frac{120648}{35} \ln(2) - \frac{19683}{7} \ln(3) - \frac{63707}{512} \pi^2 + \frac{294464}{175} - \frac{1420}{7} \ln(x) \right] x^5 + \\ & + \frac{264932}{1575} \pi x^{\frac{11}{2}} + O(x^6) \end{aligned}$$

che include la costante di Eulero *gamma*, il numero pi greco e vari logaritmi.

5.2. UN DIVERSO POTENZIALE GRAVITAZIONALE



In questa pagina abbiamo riportato di nuovo la tabella con i dati che abbiamo già visto a pagina 9 (cfr. 2.2 Rappresentazione dei dati e costruzione del modello), a questa volta useremo anche la terza colonna che riporta i valori di un diverso potenziale gravitazionale $a(p)$ sempre in funzione dell'ascissa p .

Prova ad approssimare questo secondo potenziale usando le stesse meccaniche che abbiamo visto in precedenza.

p	1/p	a(p)	d(p)
6.5	0.1538461538	0.01912747008	0.4869936403
7.0	0.1428571429	0.01441264793	0.3827875916
7.5	0.1333333333	0.01112262385	0.3078252156
8.0	0.1250000000	0.008757240491	0.2523982131
8.5	0.1176470588	0.007013586741	0.2104055694
9.0	0.1111111111	0.005700569553	0.1779046763
9.5	0.1052631579	0.004693458379	0.1522760731
10.0	0.1000000000	0.003908444354	0.1317333567
11.0	0.09090909091	0.002790825098	0.1012711338
12.0	0.08333333333	0.002059085408	0.08017072420
13.0	0.07692307692	0.001560706154	0.06497789833
13.5	0.07407407407	0.001370641326	0.05893533322
14.0	0.07142857143	0.001209983056	0.05368923090
15.0	0.06666666667	0.0009562732001	0.04508048140
16.0	0.06250000000	0.0007683675396	0.03837043135
18.0	0.05555555556	0.0005170481503	0.02874250711
20.0	0.05000000000	0.0003639298465	0.02230991431







LSS G.B. GRASSI

LICEO SCIENTIFICO STATALE G.B. GRASSI DI LATINA

WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG

CNR - IAC

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO MAURO PICONE

WWW.IAC.CNR.ORG

CNR - IFN ROMA

ISTITUTO DI FOTONICA E NANOTECNOLOGIE

WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG

CNR - INSEAN

ISTITUTO NAZIONALE STUDI ESPERIENZE E ARCHITETTURA NAVALE

WWW.INSEAN.CNR.ORG