# Dilatazione lineare

## Scopriamo insieme una legge fisica!

RESEARCH IN ACTION - RIA

RESEARCHINACTION.IT

I corpi modificano le proprie dimensioni quando cambia la loro temperatura o meglio, quando viene loro sottratto o ceduto calore.

Se una delle dimensioni del corpo è molto maggiore delle altre due, come nel caso di un filo elettrico, un binario o un'asticella lunga e sottile, si parla di dilatazione lineare perchè l'aumento è apprezzabile solo per la dimensione maggiore.

In questo laboratorio cercheremo di determinare una legge che descriva la dilatazione lineare di un'asta partendo da dati sperimentali.

05 Dilatazione lineare -11.19
Revisione 0.3 del 09.01.21

# RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

## Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

# Sommario dei contenuti

## Dilatazione lineare - Scopriamo insieme una legge fisica!

**Sommario dei contenuti**


## 1. La dilatazione 5

1.1. Prerequisiti 5
1.2. Obiettivi 5

## 2. Un modello per la dilatazione lineare 6

## 3. Un primo esperimento 7

3.1. Il sistema di riferimento 7
3.2. Rappresentazione dei dati 8
3.3. Confronto dei dati con il modello 8
3.4. Stima dell'errore 9
3.5. Come possiamo fare meglio? 9

## 4. Riproviamo 10

4.1. Rappresentazione dei dati 10
Riproviamo ancora 11

## 5. Una legge per la dilatazione lineare 12

Il coefficiente di dilatazione lineare 12

## 6. Un primo esperimento 13

6.1. Il sistema di riferimento 13
6.2. Rappresentazione dei dati 14
6.3. Confronto dei dati con il modello 14
6.4. Stima dell'errore 16

## 7. Riproviamo 17

7.1. Rappresentazione dei dati 17
Riproviamo ancora 19

## 8. Una legge per la dilatazione lineare 21

Il coefficiente di dilatazione lineare 21

## 9. Esercizi 22

9.1. Stima dell'errore 22
9.2. Alluminio 22

## 10. La retta di regressione 23

## Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/05-Dilatazione-lineare.pdf**;

» l'intero laboratorio (tutti e tre gli esperimenti) usando GeoGebra (in formato GGB di circa 32kB) raccolti in un file compresso: **http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip**.

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/**. In particolare, sul canale YouTube, è presente un breve videocorso introduttivo all'uso di xMaxima.

# Dilatazione lineare

## Scopriamo insieme una legge fisica!

## 1. La dilatazione

Una breve spiegazione sul comportamento di queste leghe si può trovare sul sito Scienza per tutti all'indirizzo: scienzapertutti.lnf.infn.it/index.php?option=com_content&view=article&id=1185:0216-esiste-un-metallo-che-quando-si-riscalda-si-restringe&catid=142&Itemid=347

I corpi modificano le proprie dimensioni quando cambia la loro temperatura o meglio, quando ad essi viene sottratto o ceduto calore. In particolare se la temperatura aumenta (il corpo assorbe calore) il volume si estende, se la temeratura diminuisce (il corpo cede calore) il volume si riduce. Fanno eccezione a questo comportamento l'acqua allo stato liquido tra 0°C e 4°C circa e alcune moderne leghe in cui l'energia ceduta al corpo sottoforma di calore, vedi di seguito, non va a incrementare (almeno non completamente) l'energia cinetica delle molecole. Il comportamento dell'acqua e di queste leghe esula dagli scopi di questo laboratorio per cui non ce ne occuperemo.

Riscaldare un corpo significa aumentare energia cinetica alle molecole del corpo stesso. Infatti l'energia cinetica delle molecole è proporzionale alla temperatura assoluta del corpo secondo la formula:

$$E_c = \frac{n}{2} k_B T$$

dove $E_c$ è l'energia cinetica media delle molecole, $n$ il numero di gradi di libertà delle molecole, $k_B$ la costante di Boltzmann e $T$, per l'appunto, la temperatura assoluta. La dilatazione (o la contrazione) è sostanzialmente dovuta all'aumento (o alla diminuzione) dell'energia cinetica delle molecole del corpo che si trasforma in una richiesta di *maggiore spazio* per oscillare attorno alla posizione di equilibrio di ciascuna molecola *costringendo*, per così dire, il corpo ad aumentare le sue dimensioni per soddisfare questa esigenza.

Se una delle dimensioni del corpo è molto maggiore delle altre due, come nel caso di un filo elettrico, un binario, o in generale un'asticella sottile e lunga, si parla di dilatazione lineare perchè l'aumento è sensibile, apprezzabile, solo per la dimensione maggiore. In questo laboratorio cercheremo di determinare un modello, una legge, che descriva la dilatazione (o la contrazione) lineare di un'asta partendo da dati sperimentali. Ci occuperemo quindi della dilatazione lineare di un solido.

### 1.1. Prerequisiti

Per questo laboratorio è necessario conoscere:

- la geometria analitica della retta;
- la matematica minima per *manipolare* formule fisiche;
- almeno un metodo per approssimare una serie di dati lineari.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione di dati lineari a pagina 7 e seguenti)

### 1.2. Obiettivi

Costruire un modello per la dilatazione lineare a partire da dati sperimentali. Dedurre quindi la legge di dilatazione lineare dei solidi e calcolare il coefficiente di dilatazione lineare di alcuni materiali.

# 2. Un modello per la dilatazione lineare

Per il nostro laboratorio abbiamo bisogno di un apparato sperimentale che, in sostanza, ci permetta di riscaldare o raffreddare un'asticella metallica misurando nello stesso tempo la sua temperatura e la variazione della sua lunghezza: un dilatometro, un misuratore della dilatazione di un solido. In pratica l'apparecchio potrebbe essere costruito come mostrato nella figura in basso in questa stessa pagina.

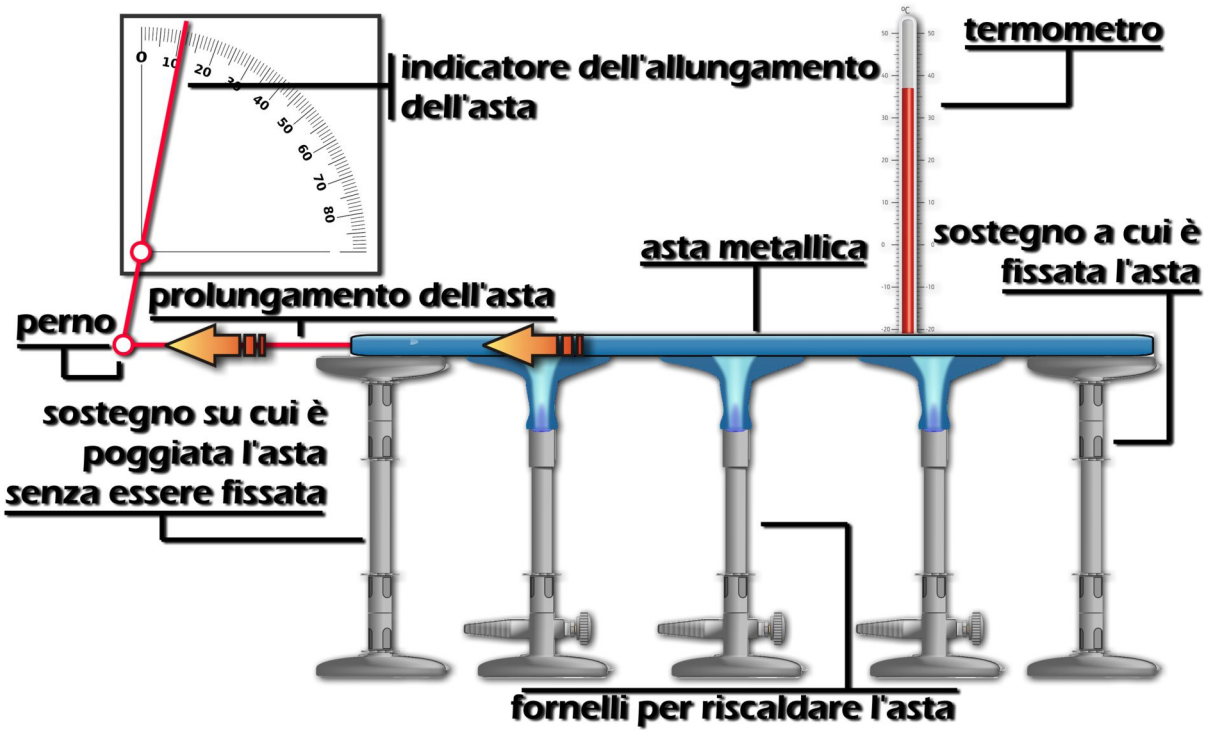
L'asta metallica di cui dobbiamo studiare la dilatazione è fissata a un sostegno (quello più a destra in figura) e posata, potendo scorrere liberamente, su un secondo sostegno (quello più a sinistra). I due montanti sostengono l'asta su tre fornelli che la riscaldano (sono questi fornelli che forniranno all'asta il calore, l'energia cinetica, necessaria alla dilatazione). Infine un termometro misura la temperatura dell'asta.

L'asta è prolungata fino a un perno che fa ruotare una lancetta (in figura, in senso orario se l'asta si allunga) che misura l'allungamento dell'asticella per effetto del riscaldamento. Prolungamento dell'asta, perno e lancetta hanno il solo scopo di amplificare la variazione di lunghezza altrimenti difficile da misurare a causa delle piccole variazioni di lunghezza in corrispondenza di varazioni di temperatura anche elevate.

Ci sono apparati sperimentali simili che utilizzano al posto dell'asta un tubo metallico (il cui diametro è molto piccolo rispetto alla lunghezza) all'interno del quale viene spinta acqua bollente che, riscaldando in tal modo il tubicino, ne provoca l'allungamento. Il resto dell'apparato (termometro, sostegni, indicatore della variazione della lunghezza) rimane inalterato così come rimane la stessa l'analisi dei dati. Le freccie colorate indicano la direzione della dilatazione e la direzione in cui si sposta il prolungamento dell'asta.

Ovviamente, lasciando raffreddare l'asta (o il tubicino) si ottiene una diminuzione della lunghezza e quindi si può studiare la contrazione lineare piuttosto che la dilatazione.

In ogni caso, se non si ha a disposizione un apparato del genere sarà comunque possibile lavorare alla costruzione del modello ed eseguire l'esperienza: il fascicolo fornirà tutti i dati sperimentali necessari.



# 3. Un primo esperimento

L'esperimento è stato eseguito su una barretta di ferro (Fe) la cui lunghezza iniziale, misurata a una temperatura di 27°C, era pari a 10cm (le altre due dimensioni sono trascurabili rispetto alla lunghezza). Nella tabella che segue sono riportati i valori di allungamento della barretta all'aumentare della temperatura. Come indicato, le temperature sono misurate in gradi centigradi (°C) e l'allungamento in metri (m).

| Ferro (Fe) | |
|---|---|
| Temperatura °C | Allungamento m |
| 27,0 | 0,0000000 |
| 32,0 | 0,0000067 |
| 37,0 | 0,0000137 |
| 42,0 | 0,0000168 |
| 47,0 | 0,0000213 |
| 52,0 | 0,0000304 |
| 57,0 | 0,0000342 |
| 62,0 | 0,0000366 |
| 67,0 | 0,0000507 |
| 72,0 | 0,0000495 |
| 77,0 | 0,0000547 |
| 82,0 | 0,0000685 |
| 87,0 | 0,0000680 |
| 92,0 | 0,0000822 |

## 3.1. Il sistema di riferimento

Appare chiaro per quanto detto nell'introduzione e osservando i dati della tabella, che stiamo lavorando su due grandezze: la temperatura dell'asta e la sua lunghezza (o il suo allungamento).

**Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario ovviamente che i due assi abbiano la stessa scala).**

Prima di tutto decidi quale grandezza sarà rappresentata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate. Per ragioni di comodità è preferibile rappresentare sull'asse delle ordinate la variabile dipendente: la grandezza il cui cambiamento dipende dal cambiamento dell'altra grandezza in gioco. Per cui se la variazione della lunghezza dell'asta è provocata dall'aumento di temperatura dovresti riportare la temperatura sull'asse delle ascisse e la lunghezza sull'asse delle ordinate. Se, invece, ritieni che l'allungamento provoca l'aumento di temperatura, questa va sull'asse delle ordinate e la lunghezza su quello delle ascisse.

In secondo luogo decidi come rappresentare le due grandezze. Nel nostro caso puoi scegliere di concentrare l'attenzione sulla lunghezza o sulla variazione di essa, sulla temperatura o sul cambiamento (sull'aumento) di temperatura.

Una volta fatte queste scelte, precisa la scala più opportuna. In particolare, l'allungamento dell'asta è nell'ordine dei millesimi di millimetro (dei milionesimi di metro - $10^{-6}m$) e quindi usare come unità di misura il metro sul piano cartesiano può essere un problema. Sarà meglio scegliere un'unità di misura più *piccola*.

**Infine, completa la tabella in cui sono le misure sperimentali riportando nella terza e quarta colonna i dati che ti servono (lunghezza o allungamento, temperatura o sua variazione) indicando la scala usata nell'intestazione della colonna.**

## 3.2. Rappresentazione dei dati

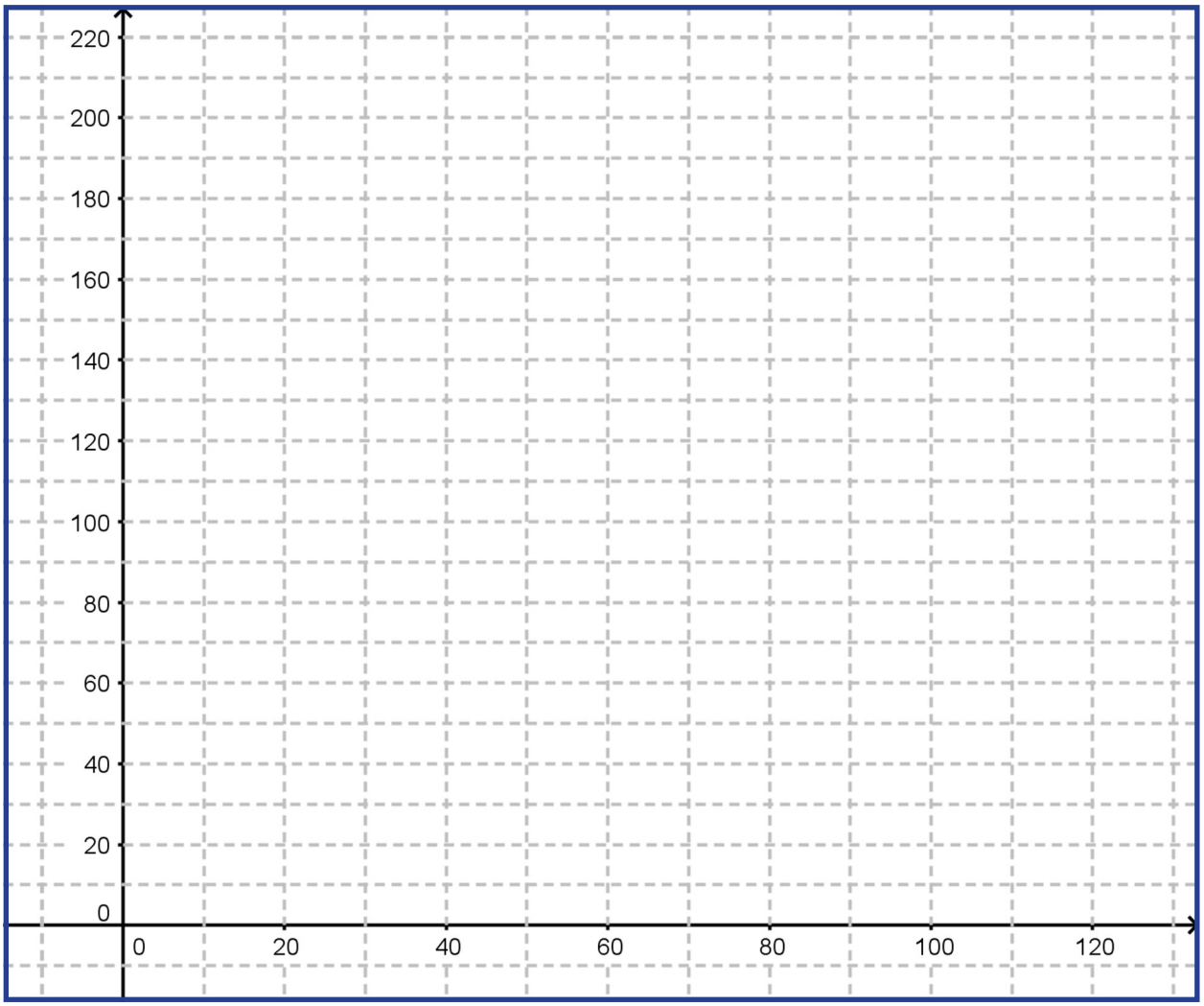
Riporta i dati sul piano cartesiano che hai scelto. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata. Puoi usare il piano cartesiano che trovi in questa pagina, può darsi che l'asse delle ordinate sia più ampio di quanto ti serva in questo momento, non ti preoccupare, sarà utile in seguito.

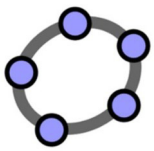
**Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato (una retta, una parabola, una curva esponenziale, ...)?**

Tieni conto che si tratta di un esperimento e le misure sono quindi soggette a un errore che può essere anche piuttosto sensibile per cui i punti sul piano cartesiano non riprodurranno esattamente una curva o una retta ma, con qualche approssimazione, dovresti essere in grado di riconoscere comunque l'andamento della grandezza che hai scelto.

## 3.3. Confronto dei dati con il modello

Un modello in questo caso altro non è che una funzione il cui grafico ricalchi il più possibile l'andamento della linea spezzata che abbiamo costruito. Si tratta ora di determinare l'equazione di





Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

questa funzione, una funzione che approssimi al meglio i dati.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione di dati lineari a pagina 7 e seguenti)

**Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati, ricorda che anche una retta è una funzione. Traccia il grafico di questa funzione nello stesso piano cartesiano in cui hai rappresentato i dati.**

Per rispondere a questa richiesta cerca innazitutto di esplicitare a parole la dipendenza tra la due variabili che descrivono il fenomeno, di esprimere in modo chiaro come una delle grandezze dipenda dall'altra. Per esempio, due variabili sono direttamente proporzionali l'una all'altra se il grafico ottenuto dalle misure sperimentali è approssimativamente una retta obliqua che passa per l'origine. Oppure una *dipende linearmente* dall'altra se la retta che approssima i dati è una retta obliqua che però non passa per l'origine. O ancora, la variabile rappresentata sull'asse delle ordinate dipende dal quadrato dell'ascissa se i punti sul piano cartesiano si possono approssimare bene con una parabola. E così via. Una volta precisata la tipologia di dipendenza cerca l'equazione della curva (retta, parabola, …) che approssima al meglio i dati.

Per i calcoli intermedi puoi usare la penultima colonna della tabella che trovi nella pagina precedente (quella in cui erano riportate le misure sperimentali), indica nell'intestazione della colonna il contenuto e l'unità di misura usata.

**Il grafico della funzione segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla variazione della lunghezza dell'asta? Quale modello di crescita è più adatto?**

Cerca di scrivere l'equazione di una funzione che leghi la temperatura (o la sua variazione) con la lunghezza o l'allungamento dell'asta. In realtà, se hai analizzato bene la tua risposta alla domanda precedente, dovresti già avere tutto quello che ti serve!

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. Il calcolo dell'errore a pagina 5)

## 3.4. Stima dell'errore

Un esperimento non si conclude con i risultati, in questo caso la legge che descrive il fenomeno, ma si deve fornire anche una misura della qualità del lavoro fatto (misure e calcoli).

**Stima l'errore che si compie calcolando l'allungamento (o la lunghezza) della barra a una certa temperatura usando la funzione che hai trovato rispetto ai valori sperimentali.**

Tieni conto che un errore nell'ordine di $10^{-6}$ … $10^{-5}$ è sicuramente un buon risultato.

## 3.5. Come possiamo fare meglio?

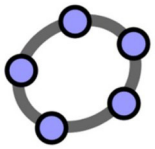
A questo punto, se tutto è andato bene, hai *scoperto* una legge che descrive il fenomeno della dilatazione lineare. Conviene forse leggere ora le soluzioni per questa prima parte per confrontare il tuo lavoro con quello che il fascicolo propone **(cfr. Soluzioni a pagina 13)**.

La legge, la funzione, si può sicuramente migliorare perchè nel nostro esperimento abbiamo usato una barretta con una determinata lunghezza iniziale ma pare molto probabile che modificando questa lunghezza iniziale si abbiamo risultati differenti.

Nel prosieguo di questo fascicolo cercheremo di precisare se e come la dilatazione possa dipendere dalla lunghezza iniziale. Preparati, sarà un lavoro lungo e difficile che richiederà non solo l'abilità di gestire numeri e fare calcoli, come questa prima parte, ma anche di manipolare le leggi fisiche perchè abbiano un aspetto più chiaro ed evidente.

# 4. Riproviamo

Come detto, vogliamo cercare di comprendere come la lunghezza iniziale della barra metallica influisce sui risultati dell'esperimento. Ripetiamo quindi l'esperienza con una barretta, sempre di ferro (Fe), la cui lunghezza iniziale, misurata a una temperatura di 27°C, era pari a 20cm (il doppio rispetto alla precedente). Nella tabella che segue sono riportati i valori di allungamento della barretta all'aumentare della temperatura. Come in precedenza, le temperature sono misurate in gradi centigradi (°C) e l'allungamento in metri (m).



Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: http://researchi-naction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

| Ferro (Fe) | |
|---|---|
| Temperatura °C | Allungamento m |
| 27,0 | 0,0000000 |
| 32,0 | 0,0000106 |
| 37,0 | 0,0000251 |
| 42,0 | 0,0000378 |
| 47,0 | 0,0000449 |
| 52,0 | 0,0000677 |
| 57,0 | 0,0000764 |
| 62,0 | 0,0000933 |
| 67,0 | 0,0001072 |
| 72,0 | 0,0001053 |
| 77,0 | 0,0001303 |
| 82,0 | 0,0001264 |
| 87,0 | 0,0001393 |
| 92,0 | 0,0001785 |

## 4.1. Rappresentazione dei dati

Usando lo stesso sistema di riferimento, con le stesse scelte che hai già fatto, riporta i dati sul piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata. Puoi usare il piano cartesiano **che trovi a pagina 8**.

**Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato?**

Osservando i dati procedi come nell'esperimento precedente.

**Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.**

Confronta i due grafici e i due modelli (le due funzioni che hai ottenuto)

**Ci sono peculiarità comuni nei due esperimenti? Ci sono caratteristiche che sono cambiate tra il primo esperimento e il secondo? Quale misura, quale grandezza, quale dato ha influito sul risultato?**

Tieni conto i due esperimenti sono stati eseguiti praticamente allo stesso modo e quasi tutte le condizioni iniziali erano identiche quindi, se c'è un risultato diverso, la differenza deve dipendere dall'unica condizione iniziale modificata!

**Cerca di esprimere il legame tra il coefficiente che hai calcolato, quello presente**

**nell'espressione della funzione che modellizza il fenomeno, in funzione della grandezza che ha provocato il cambiamento.**

Modifica l'espressione della funzione (in altre parole, modifica il modello) per tenere conto di quanto hai scoperto in questo secondo esperimento. Tieni conto che, come già detto in precedenza, le misure sono influenzate da errori e quindi non ti devi aspettare risultati precisi ma piuttosto un *comportamento*, una tendenza. Se ancora non ti è chiaro cosa è successo e come la lunghezza iniziale della sbarra ha influito sull'esperimento, prova ad analizzare, allo stesso modo, i dati di un nuovo esperimento.

### Riproviamo ancora

I dati di questo terzo esperimento sono stati ottenuti ripetendo il procedimento ma su una sbarra di ferro lunga questa volta 30cm (il triplo di quella originale) a 27°C. La tebella che segue riporta le misure di temperatura e allungamento.

| Ferro (Fe) | |
|---|---|
| Temperatura °C | Allungamento m |
| 27,0 | 0,0000000 |
| 32,0 | 0,0000194 |
| 37,0 | 0,0000337 |
| 42,0 | 0,0000523 |
| 47,0 | 0,0000723 |
| 52,0 | 0,0000794 |
| 57,0 | 0,0001047 |
| 62,0 | 0,0001093 |
| 67,0 | 0,0001582 |
| 72,0 | 0,0001837 |
| 77,0 | 0,0001948 |
| 82,0 | 0,0002082 |
| 87,0 | 0,0001909 |
| 92,0 | 0,0002140 |

**Determina l'equazione di una funzione che approssimi al meglio i dati, dopo averli rappresentati su un piano cartesiano, in modo simile a quanto fatto nei due esperimenti precedenti.**

Puoi usare di nuovo il piano cartesiano **che trovi a pagina 8**.

**Ci sono caratteristiche comuni nei tre esperimenti? Ci sono caratteristiche che sono cambiate tra il primo esperimento, il secondo e quest'ultimo? Quale dato iniziale ha influito sul risultato? Cerca di esprimere il legame tra il coefficiente che hai calcolato, quello presente nell'espressione della funzione che modellizza il fenomeno, in funzione della grandezza che ha provocato il cambiamento.**

Modifica l'espressione della funzione (modifica il modello) per tenere conto di quanto hai scoperto in questo terzo esperimento. In altre parole, cerca di far in modo che nell'espressione della funzione appaia esplicitamente il dato che modifica i risultati nei tre esperimenti.

Probabilmente devi scrivere in modo diverso il coefficiente che hai inserito nel modello, questo coefficiente, plausibilmente, contiene in sè la lunghezza iniziale della barretta e devi cercare di rendere esplicita questa presenza.

# 5. Una legge per la dilatazione lineare

La funzione che hai ricavato è in realtà una legge, la legge che descrive come si modifica all'aumentare della temperatura la lunghezza della barra di ferro sulla quale è stato eseguito l'esperimento. Probabilmente nella formula che hai ricavato appaiono sia l'allungamento della barretta che la sua lunghezza iniziale. Questo perchè, se è andato tutto bene, dovresti aver preferito lavorare sull'allungamento piuttosto che sulla lunghezza vera e propria quando hai iniziato l'analisi dei dati del primo esperimento.

**Prova a riscrivere il modello, l'espressione della funzione, cercando di far apparire solo la lunghezza della barra di ferro e non l'allungamento della stessa. Probabilmente dovrai esplicitare la lunghezza della barretta a una determinata temperatura che è *nascosta* nell'allungamento (visto che l'allungamento è proprio la differenza tra la lunghezza a una certa temperatura e lunghezza iniziale della sbarra di ferro).**

Si deve tenere conto del fenomeno della dilatazione lineare quando si costruisce una linea ferroviaria, i binari infatti non hanno sempre la stessa lunghezza ma sono sensibili alla temperatura.
Per consentire ai binari di dilatarsi senza problemi nella posa si lascia un certo spazio tra un binario e il successivo, spazio che tiene conto proprio della dilatazione nelle giornate calde.
Il classico rumore di un treno è dato proprio dal passaggio delle ruote sulle giunzioni tra un binario e l'altro, giunzioni che volutamente non combaciano perfettamente.

La formula che hai scritto è proprio la legge di dilatazione lineare che stavamo cercando!

### Il coefficiente di dilatazione lineare

Nella letteratura (e anche sul tuo libro di testo con ogni probabilità) la legge di dilatazione lineare è riportata nella forma:

$$L_t = L_0(1 + \lambda \Delta t)$$

dove abbiamo usato la notazione $L_t$ per specificare in modo evidente che la lunghezza della barra dipende dalla temperatura $t$ mentre $L_0$ sarebbe la lunghezza iniziale. Il termine $\lambda$ invece indica il coefficiente di dilatazione lineare che, in prima approssimazione, dipende dalla sostanza, dal materiale, con cui è costruita la barretta.

**Determina il coefficiente di dilatazione lineare del ferro in base ai dati sperimentali confrontando la legge di dilatazione lineare mostrata qui sopra con il modello che hai costruito in precedenza. Quale può essere inoltre l'unità di misura di questo coefficiente.**

Osserva che l'unità di misura del coefficiente $\lambda$, in un certo senso, è determinata dall'espressione in cui appare.

Il nostro laboratorio termina qui. Il percorso ci ha condotto a determinare una legge che descrive un fenomeno naturale, un modello che interpreta e *da forma*, in un certo senso, a una o più serie di dati sperimentali e che, nella realtà, ora permeterebbe di fare previsioni, verificabili a loro volta con altri esperimenti, sulla dilatazione lineare.

# Soluzioni

## Dilatazione lineare - Scopriamo insieme una legge fisica!

# 6. Un primo esperimento

Nella seconda parte - questa - del fascicolo ripercorreremo l'intera esperienza rispondendo ai quesiti e fornendo una possibile soluzione al problema che ti è stato proposto in precedenza.

## 6.1. Il sistema di riferimento

**Scegli un sistema di riferimento precisando quale informazione sarà riportata sull'asse delle ascisse e quale sull'asse delle ordinate e individua una scala conveniente per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate (non è necessario ovviamente che i due assi abbiano la stessa scala).**

Appare evidente, anche osservando il dilatometro, che riscaldando una barra metallica questa modifica le sue dimensioni e quindi la lunghezza della sbarra dipende dalla temperatura di quest'ultima. Scegliamo allora un sistema di riferimento sulle cui ascisse riporteremo la differenza di temperatura $\Delta t$ tra la temperatura $t$ a un certo istante e la temperatura iniziale $t_0$. Sulle ordinate riporteremo l'allungamento della sbarra di ferro $\Delta L$ misurata in millesimi di millimetro ($10^{-6}m$).

**Infine, completa la tabella in cui sono le misure sperimentali riportando nella terza e quarta colonna i dati che ti servono (quelli che hai scelto in precedenza) indicando la scala usata nell'intestazione della colonna.**

La tabella qui di seguito riporta, nella terza e quarta colonna, ascisse e ordinate del sistema di riferimento scelto. Ogni coppia $(\Delta t, \Delta L)$ rappresenta le coordinate di un punto sul piano cartesiano che abbiamo scelto e che è mostrato nella pagina seguente (le informazioni nella quinta e sesta colonna ci saranno utili nel seguito).

| | Ferro (Fe) | $\Delta t$ | $\Delta L$ | $m_i$ | $[y(\Delta t_i)-\Delta L_i]^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura | Allungamento | Variazione di temperatura | Allungamento | coefficienti angolari | scarto quadratico medio |
| °C | m | °C | $10^{-6}$ m | $10^{-6}$ m/°C | $10^{-12}$ m$^2$ |
| 27,0 | 0,0000000 | 0,0 | 0,0 | | 0,00 |
| 32,0 | 0,0000067 | 5,0 | 6,7 | 1,34 | 0,14 |
| 37,0 | 0,0000137 | 10,0 | 13,7 | 1,40 | 1,11 |
| 42,0 | 0,0000168 | 15,0 | 16,8 | 0,62 | 4,71 |
| 47,0 | 0,0000213 | 20,0 | 21,3 | 0,90 | 15,94 |
| 52,0 | 0,0000304 | 25,0 | 30,4 | 1,82 | 1,48 |
| 57,0 | 0,0000342 | 30,0 | 34,2 | 0,76 | 13,98 |
| 62,0 | 0,0000366 | 35,0 | 36,6 | 0,48 | 58,7 |
| 67,0 | 0,0000507 | 40,0 | 50,7 | 2,82 | 0,01 |
| 72,0 | 0,0000495 | 45,0 | 49,5 | -0,24 | 54,87 |
| 77,0 | 0,0000547 | 50,0 | 54,7 | 1,04 | 72,77 |
| 82,0 | 0,0000685 | 55,0 | 68,5 | 2,76 | 1,11 |
| 87,0 | 0,0000680 | 60,0 | 68,0 | -0,10 | 62,05 |
| 92,0 | 0,0000822 | 65,0 | 82,2 | 2,84 | 0,00 |

## 6.2. Rappresentazione dei dati

**Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato (una retta, una parabola, una curva esponenziale, ...)?**

I punti appaiono abbastanza allineati, soprattutto inizialmente, e quindi possiamo pensare di approssimarli con una retta passante per l'origine degli assi.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione di dati lineari a pagina 7 e seguenti)

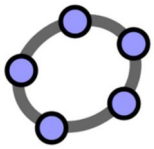
## 6.3. Confronto dei dati con il modello

**Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione nello stesso piano cartesiano in cui hai rappresentato i dati.**

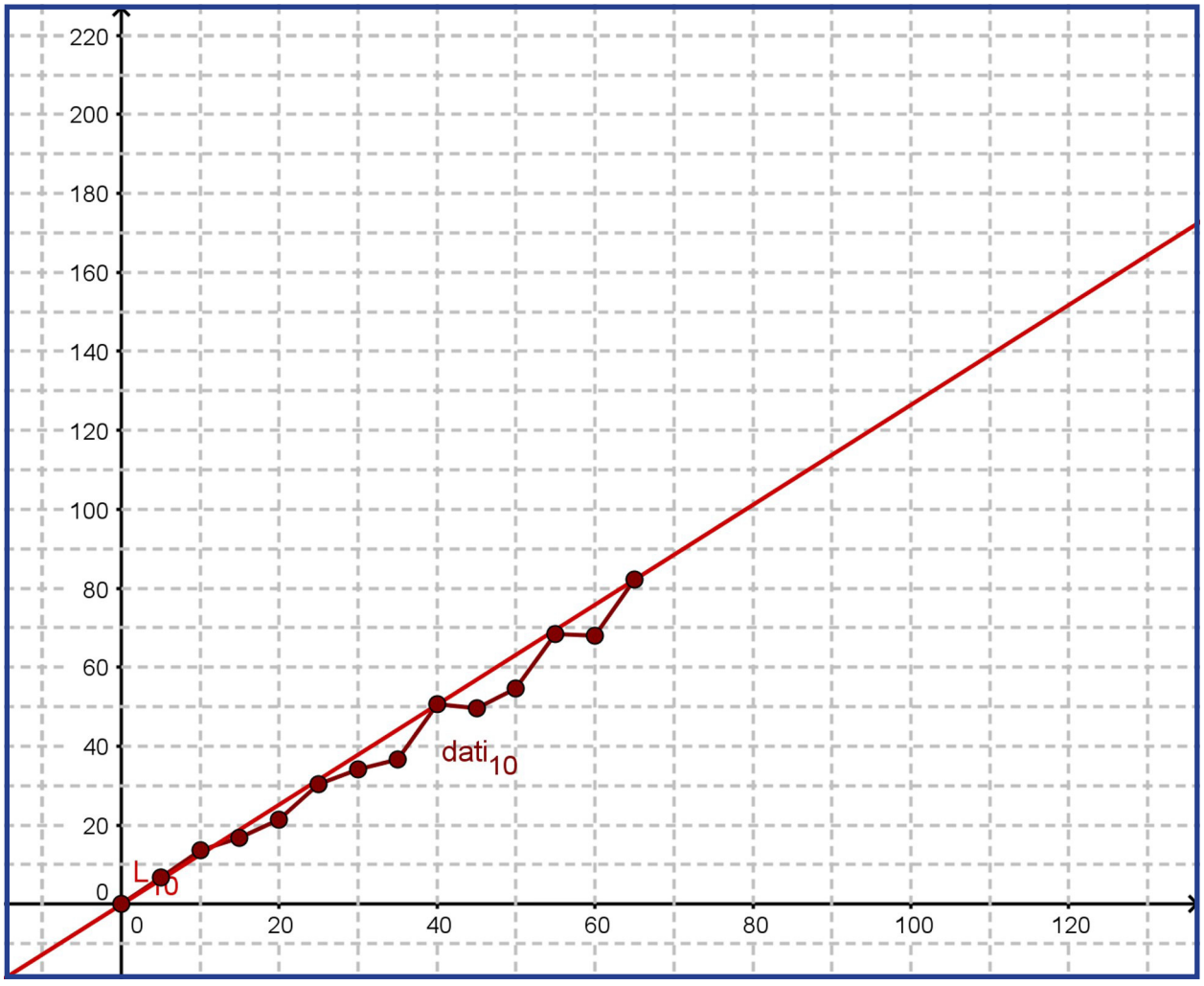
È chiaro che l'allungamento della barretta metallica è direttamente proporzionale alla variazione della temperatura della stessa barra per cui cerchiamo di determinare l'equazione della retta che meglio approssima la nostra serie di dati sperimentali.

Dato per assodato che la quota di questa retta è nulla (la retta, come abbiamo detto, passerà per l'origine), calcoliamo il coefficiente angolare come media dei coefficienti angolari dei segmenti che uniscono due punti successivi sul piano cartesiano. Questi coefficienti angolari sono riportati nella tabella della pagine precedente, nella quinta colonna.

In questo contesto, il coefficiente angolare del segmento che unisce due punti successivi misura



Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/



la *rapidità* con cui cambia la lunghezza della barra metallica, la velocità con cui si allunga. Infatti, per ogni coppia di punti successivi $i$, ognuno di questi coefficienti angolari è dato da:

$$m_i = \frac{\Delta L_i}{\Delta t_i}$$

che, per l'appunto, rapporta l'allungamento della sbarra con la variazione della temperatura. Detto questo, può apparire strano che alcuni dei coefficienti angolari (due per la precisione) siano negativi: un coefficiente angolare negativo indica un'accorciamento della barretta conseguente a un aumento di temperatura, il che sembra contraddire quanto ci siamo detti nell'introduzione **(cfr. 1. La dilatazione a pagina 5)**. In realtà, come abbiamo già fatto notare, le misure sperimentali sono viziate da errori ma, nel complesso, la nostra serie di dati mostra un allungamento della barra.

A questo punto possiamo calcolare la media dei coefficienti angolari:

$$m_{medio} = \frac{1.34 + 1.40 + \ldots + 2.84}{13} \simeq 1.26$$

per cui la retta che cerchiamo ha equazione:

$$y = 1.26 \cdot x$$

o meglio, tenendo conto delle grandezze fisiche che abbiamo riportato sull'asse delle ordinate (l'allungamento della bara $\Delta L$) e sull'asse delle ascisse (la variazione di temperatura $\Delta t$):

$$\Delta L = 1.26 \cdot \Delta t$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf definisce la retta di regressione e suggerisce un metodo per calcolarla (cfr. 2.2 Retta di regressione a pagina 8)

La corrispondente retta è tracciata nel piano cartesiano che si trova nella pagina precedente. Sembra approssimare abbastanza bene la serie di misure sperimentali, forse le sopravvaluta un poco perchè, per ogni valore della variazione della temperatura, l'ordinata della retta è maggiore o uguale al corrispondente valore sperimentale. Probabilmente avremmo ottenuto un'approssimazione migliore cercando la retta di regressione.

**Il grafico della funzione segue lo stesso andamento, tenendo conto degli inevitabili errori, dei dati? Che cosa possiamo dire riguardo alla variazione della lunghezza dell'asta? Quale modello di crescita è più adatto?**

Come già suggeriva il testo **(cfr. Quale modello di crescita è più adatta a pagina 9)**, in realtà abbiamo già fatto tutto il lavoro. Per quanto risulta da questo esperimento l'allungamento di una barra di ferro è direttamente proporzionale alla variazione della temperatura della barra stessa e, almeno in questo specifico caso, il coefficiente di proporzionalità è pari proprio al coefficiente angolare della retta trovata.

Conviene ricordare, però, che abbiamo misurato l'allungamento in millesimi di millimetro $(10^{-6})$ e quindi, in realtà la legge dovrebbe avere l'aspetto che segue (in cui il coefficiente è moltiplicato proprio per $10^{-6}$):

$$\Delta L = 1.26 \cdot 10^{-6} \Delta t$$

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. Il calcolo dell'errore a pagina 5)

e quindi il valore della costante di proporzionalità è $1.26\ 10^{-6}$.

Questa costante caratterizza la particolare dilatazione che abbiamo studiato quindi, in modo ancora un po' oscuro, deve dipendere dalla particolare barretta scelta e dal materiale di cui è composta.

## 6.4. Stima dell'errore

**Stima l'errore che si compie calcolando l'allungamento della barra a una certa temperatura con la funzione che hai trovato rispetto ai valori sperimentali.**

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. Il calcolo dell'errore a pagina 5)

Per una stima dell'errore, calcoliamo la radice quadrata della media degli scarti quadratici.

Ogni scarto quadratico è il quadrato della differenza tra la funzione approssimante $\Delta L$ calcolata in un determinato punto (e quindi per una certa variazione di temperatura) e l'ordinata dello stesso punto $\Delta L_i$. Con le notazioni che abbiamo introdotto nella pagina precedente lo scarto quadratico è:

$$[\Delta L(\Delta t_i) - \Delta L_i]^2 = (1.26 \cdot \Delta t_i - \Delta L_i)^2$$

dove $\Delta L(\Delta t_i)$ indica il valore della funzione per la variazione di temperatura $\Delta t_i$ (in altre parole, il valore della retta per l'ascissa $\Delta t_i$).

Lo scarto quadratico per ciascun valore sperimentale è riportato nella tabella **che si trova a pagina 13**, nell'ultima colonna.

Lo scarto quadratico medio è la radice quadrata della media degli scarti quadratici:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1.26 \cdot \Delta t_i - \Delta L_i)^2}{14}} = \sqrt{\frac{0.00 + 0.14 + \ldots + 0.00}{14}} \simeq 4.53$$

Tenendo conto che abbiamo misurato l'allungamento (sia quello sperimentale che quello teorico) in millesimi di millimetro $(10^{-6})$, abbiamo un errore (uno scarto quadratico medio) pari a $4.53\ 10^{-6}$. Un buon risultato!

I cavi elettrici sono un classico esempio di dilatazione lineare, infatti la lunghezza del cavo è decisamente superiore al diametro. In figura si può notare come i cavi siano particolarmente laschi, allungati, prova di una temperatura esterna elevata.

# 7. Riproviamo

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce alcuni metodi per la stima dell'errore (cfr. Il calcolo dell'errore a pagina 5)

Per cercare di comprendere come la lunghezza iniziale della barretta metallica influisca sulla legge che abbiamo scoperto, sul fenomeno che stiamo analizzndo, ripetiamo l'esperimento con una lunghezza iniziale diversa. Scegliamo le stesse unità di misura e lo stesso sistema di riferimento scelto in precedenza per confrontare i risultati finali. Quindi completiamo la tabella: nella terza e quarta colonna riportiamo i dati nella rappresentazione (nella scala) che abbiamo scelto.

| | Ferro (Fe) | $\Delta t$ | $\Delta L$ | $m_i$ | $[y(\Delta t_i)-\Delta L_i]^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura | Allungamento | Variazione di temperatura | Allungamento | coefficienti angolari | scarto quadratico medio |
| °C | m | °C | $10^{-6}$ m | $10^{-6}$ m/°C | $10^{-12}$ m$^2$ |
| 27,0 | 0,0000000 | 0,0 | 0,0 | | |
| 32,0 | 0,0000106 | 5,0 | 10,6 | 2,12 | |
| 37,0 | 0,0000251 | 10,0 | 25,1 | 2,90 | |
| 42,0 | 0,0000378 | 15,0 | 37,8 | 2,54 | |
| 47,0 | 0,0000449 | 20,0 | 44,9 | 1,42 | |
| 52,0 | 0,0000677 | 25,0 | 67,7 | 4,56 | |
| 57,0 | 0,0000764 | 30,0 | 76,4 | 1,74 | |
| 62,0 | 0,0000933 | 35,0 | 93,3 | 3,38 | |
| 67,0 | 0,0001072 | 40,0 | 107,2 | 2,78 | |
| 72,0 | 0,0001053 | 45,0 | 105,3 | -0,38 | |
| 77,0 | 0,0001303 | 50,0 | 130,3 | 5,00 | |
| 82,0 | 0,0001264 | 55,0 | 126,4 | -0,78 | |
| 87,0 | 0,0001393 | 60,0 | 139,3 | 2,58 | |
| 92,0 | 0,0001785 | 65,0 | 178,5 | 7,84 | |

## 7.1. Rappresentazione dei dati

**Osserva la disposizione dei punti sul piano cartesiano e la forma della linea spezzata. Quale funzione potrebbe approssimare al meglio l'andamento dei dati che abbiamo rappresentato?**

I punti sperimentali sono rappresentati nel piano cartesiano che si trova nella pagina successiva in colore verde. Si tratta, come in precedenza, di una proporzonalità diretta approssimabile quindi con una retta passante per l'origine degli assi del sistema di riferimento.

**Ricava l'equazione di una funzione che secondo te approssima al meglio i dati. Traccia il grafico di questa funzione.**

Usando ancora il metodo del coefficiente angolare medio (i coefficienti angolari di ogni segmento che unisce due punti successivi nel piano cartesiano sono riportati nella quinta colonna della tabella che si trova in questa stessa pagina). A questo punto calcoliamo la media dei coefficienti angolari per ottenere il coefficiente angolare della retta approssimante:

$$m_{medio} = \frac{2.12 + 2.90 + \ldots + 7.84}{13} \simeq 2.75$$

retta che quindi ha equazione:

$$y = 2.75 \cdot x$$

O meglio, tenendo conto della notazione che abbiamo introdotto in precedenza e dell'unità di

misura che abbiamo usato anche in questo secondo esperimento:

$$\Delta L = 2.75 \cdot 10^{-6} \Delta t$$

In conclusione, abbiamo un coefficiente angolare, una costante di proporzionalità, che risulta uguale a $2.75\ 10^{-6}$.

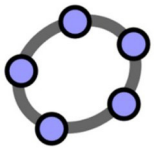
I dati sperimentali e la retta che li approssima sono tracciati nel grafico che si trova in questa stessa pagina in colore verde (più scura la spezzata ottenuta unendo i punti, più chiara la retta approssimante). Nello stesso piano cartesiano sono riportati dati e retta approssimante per il primo esperimento, in colore rosso, per consentire un confronto tra i due.

Anche in questo caso la retta *sopravvaluta* un po' i dati infatti i punti della spezzata si trovano sempre *sotto* o *sulla* retta approssimante.

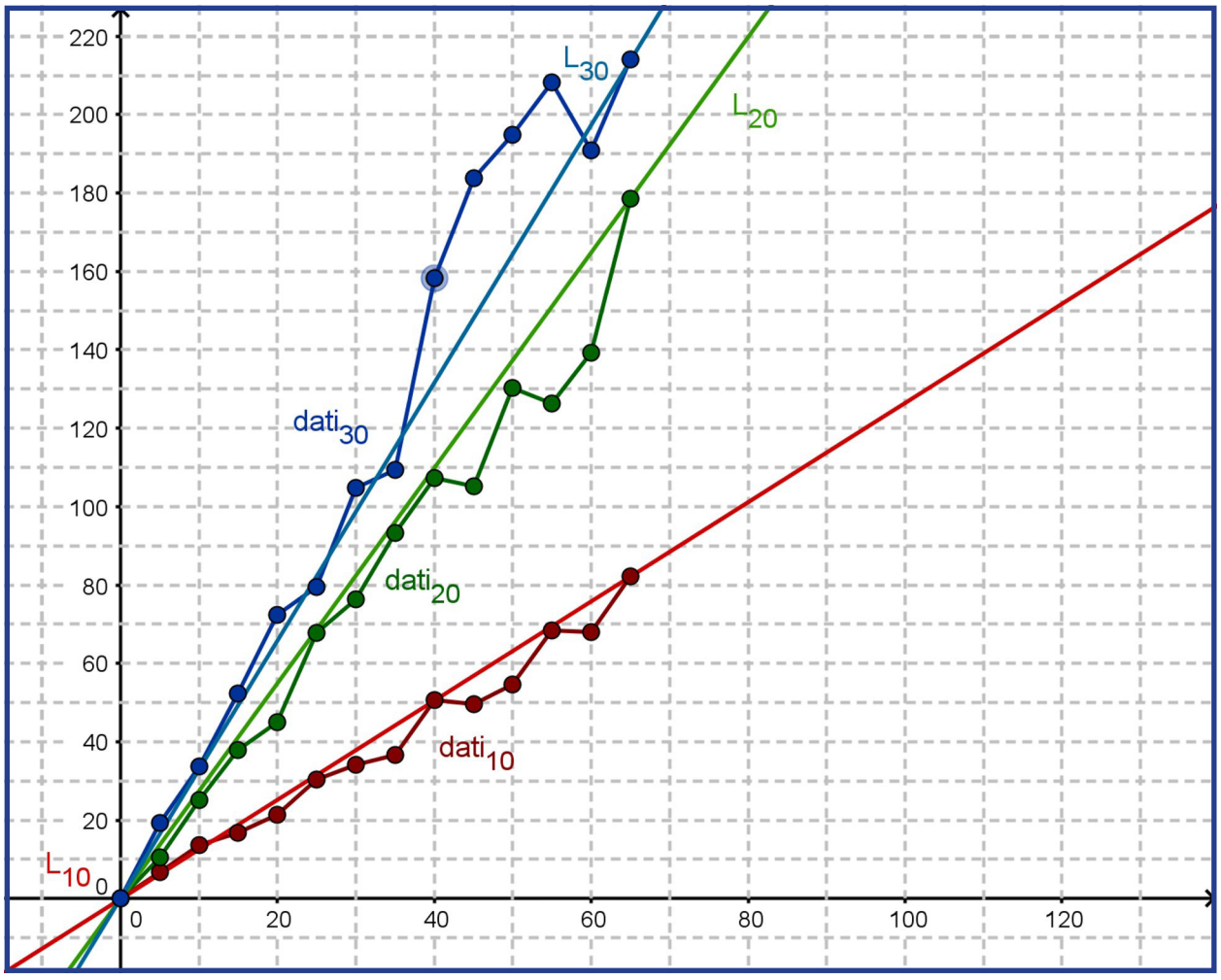
**Ci sono caratteristiche comuni nei due esperimenti? Ci sono caratteristiche che sono cambiate tra il primo esperimento e il secondo? Quale misura, quale grandezza, quale dato ha influito sul risultato?**

È chiaro, come era lecito aspettarsi, che la legge ricavata in questo secondo esperimento somiglia molto a quella precedente. È comunque una proporzionalità diretta. L'unica differenza è nel valore del coefficiente di proporzionalità.

**Cerca di esprimere il legame tra il coefficiente che hai calcolato, quello presente nell'espressione della funzione che modellizza il fenomeno, in funzione della grandezza che ha provocato il cambiamento.**



Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/



La differenza sta nel coefficiente di proporzionalità (la pendenza della retta) che in questo secondo caso è un po' più del doppio del coefficiente precedente. E questo avendo raddoppiato la lunghezza iniziale della sbarra! Prima di rispondere a questo quesito, però, analizziamo un terzo esperimento ...

### Riproviamo ancora

A questo punto proviamo ancora una volta, con una barretta di lunghezza tripla rispetto a quella originale. Completiamo la tabella come già fatto in precedenza per ben due volte.

| Temperatura | Ferro (Fe) Allungamento | $\Delta t$ Variazione di temperatura | $\Delta L$ Allungamento | $m_i$ coefficienti angolari | $[y(\Delta t_i)-\Delta L_i]^2$ scarto quadratico medio |
|---|---|---|---|---|---|
| °C | m | °C | $10^{-6}$ m | $10^{-6}$ m/°C | $10^{-12}$ m$^2$ |
| 27,0 | 0,0000000 | 0,0 | 0,0 | | |
| 32,0 | 0,0000194 | 5,0 | 19,4 | 3,88 | |
| 37,0 | 0,0000337 | 10,0 | 33,7 | 2,86 | |
| 42,0 | 0,0000523 | 15,0 | 52,3 | 3,72 | |
| 47,0 | 0,0000723 | 20,0 | 72,3 | 4,00 | |
| 52,0 | 0,0000794 | 25,0 | 79,4 | 1,42 | |
| 57,0 | 0,0001047 | 30,0 | 104,7 | 5,06 | |
| 62,0 | 0,0001093 | 35,0 | 109,3 | 0,92 | |
| 67,0 | 0,0001582 | 40,0 | 158,2 | 9,78 | |
| 72,0 | 0,0001837 | 45,0 | 183,7 | 5,10 | |
| 77,0 | 0,0001948 | 50,0 | 194,8 | 2,22 | |
| 82,0 | 0,0002082 | 55,0 | 208,2 | 2,68 | |
| 87,0 | 0,0001909 | 60,0 | 190,9 | -3,46 | |
| 92,0 | 0,0002140 | 65,0 | 214,0 | 4,62 | |

**Determina l'equazione di una funzione che approssimi al meglio i dati, dopo averli rappresentati su un piano cartesiano, in modo simile a quanto fatto nei due esperimenti precedenti.**

I punti sperimentali sono rappresentati nel piano cartesiano che si trova nella pagina precedente in colore blu. Ancora una volta si tratta di una proporzionalità diretta che possiamo approssimare con una retta passante per l'origine il cui coefficiente angolare si può determinare calcolando la media dei coefficienti angolari dei segmenti che uniscono due punti successivi (coefficienti angolari che sono mostrati nella tabella qui sopra).

Otteniamo una retta, tenendo conto della notazione introdotta in precedenza e delle unità di misura, di equazione:

$$\Delta L = 3.29 \cdot 10^{-6} \Delta t$$

il cui coefficiente angolare, che corrisponde al coefficiente di proporzionalità, è $3.29\ 10^{-6}$. Circa tre volte il primo valore *lavorando* su una barra metallica di lunghezza iniziale tripla!

**Ci sono caratteristiche comuni nei due esperimenti? Ci sono caratteristiche che sono cambiate tra il primo esperimento, il secondo e quest'ultimo? Quale dato iniziale ha influito sul risultato? Cerca di esprimere il legame tra il coefficiente che hai calcolato, quello presente nell'espressione della funzione che modellizza il fenomeno, in funzione della grandezza che ha provocato il cambiamento.**

Viene da pensare che la legge, l'equazione della retta, che abbiamo scritto in prima istanza **(cfr.**

**Confronto dei dati con il modello a pagina 14)** e che riportiamo qui di seguito per comodità di lettura

$$\lambda = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta t$$

abbia un coefficiente di angolare che è direttamente proporzionale alla lunghezza iniziale della barra metallica e che quindi questo coefficiente si possa scrivere proprio come il prodotto tra la lunghezza iniziale e una nuova costante che chiameremo λ:

$$\Delta L = L_0 \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

dove abbiamo posto $L_0 = 1.26$ nel caso del primo esperimento, *2.75* nel secondo e *3.29* nel terzo e ultimo. Per cui possiamo calcolare λ dividendo la costante di proporzionalità per la lunghezza iniziale meglio, facendo la media dei tre valori. Più precisamente, nel primo esperimento la costante di proporzionalità è pari a *1.26*, per cui possiamo stimare il valore della costante lambda come:

$$\lambda = \frac{1.26 \cdot 10^{-6}}{0.10} \cdot \frac{m/°C}{m} \simeq 1.26 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$$

Procedendo allo stesso modo possiamo stimare il valore di λ usando i risultati del secondo esperimento:

$$\lambda = \frac{2.75 \cdot 10^{-6}}{0.20} \cdot \frac{m/°C}{m} \simeq 1.38 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$$

E infine possiamo calcolare una terza stima per lo stesso valore utilizzando i risultati dell'ultimo esperimento:

$$\lambda = \frac{3.29 \cdot 10^{-6}}{0.30} \cdot \frac{m/°C}{m} \simeq 1.10 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$$

Viene quasi naturale allora, come detto, valutare λ come la media di questi tre valori:

$$\lambda = \frac{1.26 \cdot 10^{-5} + 1.38 \cdot 10^{-5} + 1.10 \cdot 10^{-5}}{3} \frac{1}{°C} \simeq 1.25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$$

A questo punto possiamo ri-scrivere la nostra legge di dilatazione lineare tenendo conto delle novità che abbiamo introdotto:

$$\Delta L = 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot L_0 \cdot \Delta t$$

# 8. Una legge per la dilatazione lineare

**Prova a riscrivere il modello, l'espressione della funzione, cercando di far apparire solo la lunghezza della barra di ferro e non l'allungamento della stessa. Probabilmente dovrai esplicitare la lnghezza della barretta a una determinata temperatura che è *nascosta* nell'allungamento (visto che l'allungamento è proprio la differenza tra la lunghezza a una certa temperatura e lunghezza iniziale della sbarra di ferro).**

Ricordiamo che possiamo definire l'allungamento della barra $\Delta L$ come $\Delta L = L_t - L_0$, dove $L_t$ indica la lunghezza della barra a una certa temperatura $t$ e $L_0$ la lunghezza iniziale della stessa barra. Sostituendo nell'equazione che è riportata nella pagina precedente (il nostro modello per la dilatazione lineare) questa espressione per l'allungamento otteniamo:

$$L_t - L_0 = 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot L_0 \cdot \Delta t$$

che si può scrivere anche come:

$$L_t = L_0 + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot L_0 \cdot \Delta t$$

Molto meglio, più chiara. Se sei arrivato fin qui hai fatto davvero un ottimo lavoro!

### Il coefficiente di dilatazione lineare

La legge che abbiamo scritto si può semplicare raccogliendo il termine $L_0$ diventando:

$$L_t = L_0 (1 + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta t)$$

che somiglia moltissimo alla legge che si trova sui libri di testo:

$$L_t = L_0 (1 + \lambda \Delta t)$$

È praticamente la stessa dove però appare il simbolo λ al posto del valore $1.25\ 10^{-5}$. Ma allora abbiamo davvero scoperto la legge di dilatazione lineare!

**Determina il coefficiente di dilatazione lineare del ferro in base ai dati sperimentali confrontando la legge di dilatazione lineare mostrata qui sopra con il modello che hai costruito in precedenza. Quale può essere inoltre l'unità di misura di questo coefficiente.**

Ormai è chiaro che la costante che abbiamo calcolato nella pagina precedente e il coefficiente di dilatazione lineare del ferro sono esattamente la stessa cosa per cui possiamo affermare che, almeno per quanto riguarda il ferro:

$$\lambda = 1.25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$$

Il coefficiente di dilatazione del ferro riportato sul libro di testo o trovato online è $1.2\ 10^{-5}$ al grado centigrado, il nostro risultato è quasi lo stesso. Ottimo lavoro!

Il nostro laboratorio termina qui. Il percorso ci ha condotto a determinare una legge che descrive un fenomeno naturale, un modello che interpreta e *da forma*, in un certo senso, a una o più serie di dati sperimentali e che, nella realtà, ora permetterebbe di fare previsioni, verificabili a loro volta con altri esperimenti, sulla dilatazione lineare.

# 9. Esercizi

## 9.1. Stima dell'errore

Calcola l'errore commesso nel secondo e nel terzo esperimento per valutare la qualità delle misure. Puoi usare l'ultima colonna delle tabelle che si trovano a pagina 17 e 19.

Quale dei tre esperimenti è il più preciso?

## 9.2. Alluminio

La tabella che segue riporta i dati di tre esperimenti realizzati con il dilatometro che hai già visto su una barretta di alluminio (Al). Usando lo stesso procedimento che abbiamo visto in questo laboratorio, determina una stima del coefficiente di dilatazione lineare per l'alluminio.

La lunghezza della barra iniziale e la temperatura di partenza sono diverse in ciascuna esperienza, in particolare la lunghezza iniziale della barretta di alluminio è riportata nella prima riga della tabella.

| $L_0 = 0{,}10$ m | | $L_0 = 0{,}13$ m | | $L_0 = 0{,}15$ m | |
|---|---|---|---|---|---|
| temperatura | allungamento | temperatura | allungamento | temperatura | allungamento |
| °C | m | °C | m | °C | m |
| 26,0 | 0,000000000 | 20,0 | 0,000000000 | 23,0 | 0,000000000 |
| 31,0 | 0,000013075 | 25,0 | 0,000013017 | 28,0 | 0,000019661 |
| 36,0 | 0,000025936 | 30,0 | 0,000030574 | 33,0 | 0,000034194 |
| 41,0 | 0,000038597 | 35,0 | 0,000043677 | 38,0 | 0,000055699 |
| 46,0 | 0,000050764 | 40,0 | 0,000058536 | 43,0 | 0,000073507 |
| 51,0 | 0,000064253 | 45,0 | 0,000078589 | 48,0 | 0,000086839 |

Una volta terminato il laboratorio confronta il risultato ottenuto con il coefficiente di dilatazione lineare dell'alluminio che si può trovare sul libro di testo oppure online.

Il fenomeno della dilatazione lineare è particolarmente evidente nei viadotti. La strada è realizzata in sezioni con un breve intervallo l'una dall'altra per consentire Al nastro di asfalto di dilatarsi di più rispetto al viadotto che, essendo in cemento, ha una dilatazione minore.

# 10. La retta di regressione

Dobbiamo dire, per completezza, che altri metodi di approssimazione lineare possono fornire risultati più precisi, in particolare la retta di regressione è, per definizione, la retta per la quale è minima la somma degli scarti quadratici e quindi quella che darebbe l'errore più basso.

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf suggerisce un metodo per il calcolo dell'equazione della retta di regressione (cfr. 2.2 Retta di regressione a pagina 8)

Qui svolgiamo il laboratorio in breve approssimando per ciascuno degli esperimenti la serie di misure con la corrispondente retta di regressione. Nella tabella che segue riportiamo i risultati per i tre esperimenti contemporaneamente, nell'ordine: l'equazione della retta di regressione e la stima del coefficiente di dilatazione lineare per il ferro calcolato, come già visto, dividendo il coefficiente di proporzionalità per la lunghezza della sbarra metallica.

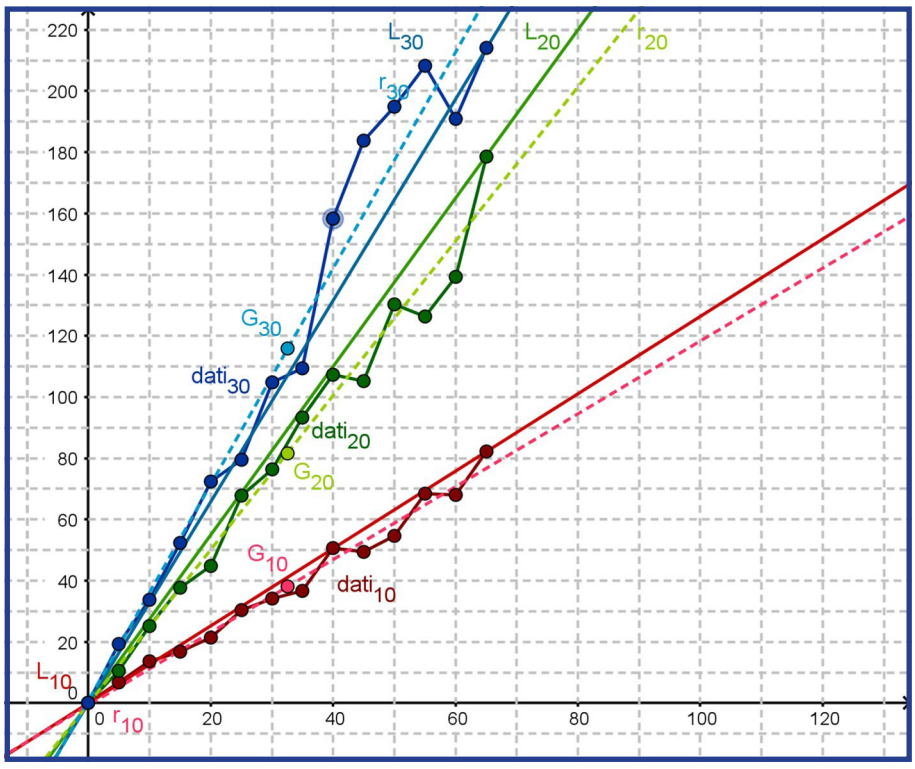
| Primo esprimento $L_0 = 0.1\,m$ | Secondo esprimento $L_0 = 0.2\,m$ | Terzo esprimento $L_0 = 0.3\,m$ |
|---|---|---|
| $r_{10}: \Delta L = 1.19 \cdot \Delta t + 0.58$ | $r_{20}: \Delta L = 2.52 \cdot \Delta t - 0.27$ | $r_{30}: \Delta L = 3.53 \cdot \Delta t + 1.05$ |
| $\lambda = \frac{1.19 \cdot 10^{-6}}{0.10} \simeq 1.19 \cdot 10^{-5}$ | $\lambda = \frac{2.52 \cdot 10^{-6}}{0.20} \simeq 1.26 \cdot 10^{-5}$ | $\lambda = \frac{3.53 \cdot 10^{-6}}{0.30} \simeq 1.17 \cdot 10^{-5}$ |

A questo punto possiamo calcolare il coefficiente di dilatazione come media dei valori ottenuti nei tre esperimenti, abbiamo:

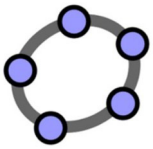
$$\lambda = \frac{1.19 \cdot 10^{-5} + 1.26 \cdot 10^{-5} + 1.17 \cdot 10^{-5}}{3} \simeq 1.21 \cdot 10^{-5}$$

più vicino (con una differenza minore) a quanto si può trovare online o nella letteratura grazie alla migòiore approssimazione data dalla retta di regressione.

Nel grafico qui di seguito sono mostrate le tre serie di dati (rispettivamente in rosso, verde e blu) con le relative rette approssimanti che abbiamo determinato in precedenza (stessi colori, tratto continuo) ma sono tratteggiate anche le tre rette di regressione $r_{10}$, $r_{20}$, $r_{30}$, e indicati i baricentri $G_{10}$, $G_{20}$ e $G_{30}$ delle tre serie di misure.




Si può notare, per esempio per le prime due serie, come la retta di regressione non mostri quel fenomeno di *sovrastima* che abbiamo osservato con il metodo di approssimazione utilizzato. Le tre rette di regressione, infatti, passano *in mezzo* ai punti sperimentali dando, anche solo visivamente, l'idea di una migliore approssimazione.



Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/05-Dilatazione-lineare.zip usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

Marine Technology Research Institute
INSEAN

## LSS G.B. Grassi

LICEO SCIENTIFICO STATALE G.B. GRASSI DI LATINA
WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG

## CNR - IAC

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO MAURO PICONE
WWW.IAC.CNR.ORG

## CNR - IFN Roma

ISTITUTO DI FOTONICA E NANOTECNOLOGIE
WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG

## CNR - INSEAN

ISTITUTO NAZIONALE STUDI ESPERIENZE E ARCHITETTURA NAVALE
WWW.INSEAN.CNR.ORG