

La cassetta degli attrezzi

Strumenti matematici e non solo



RESEARCH IN ACTION - RIA

RESEARCHINACTION.IT

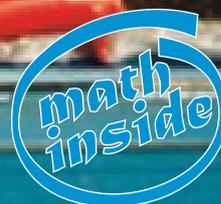


Nella cassetta degli attrezzi un artigiano ripone tutti gli strumenti che possono risultare utili alla sua attività: alcuni di questi attrezzi saranno usati più spesso, altri solo eccezionalmente, ma senza di essi non gli sarebbe possibile affrontare il problema.

Questo fascicolo vuole essere a sua volta una raccolta di strumenti matematici capaci di aiutare il lettore ad argomentare, congetturare, dimostrare, misurare, risolvere problemi e modellizzare situazioni reali.

Va tenuto a portata di mano mentre si esplorano i laboratori di Research in Action!

00 Toolbox - 05.11
Revisione 3.1 del 21.05.23



#6559



RiA - Research in Action

La parola ría in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne dà l'*Oxford Living Dictionaries*):

A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - www.liceograssilatina.org - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

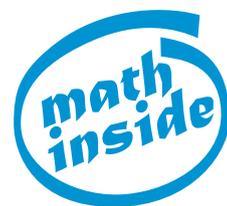
Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi del pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

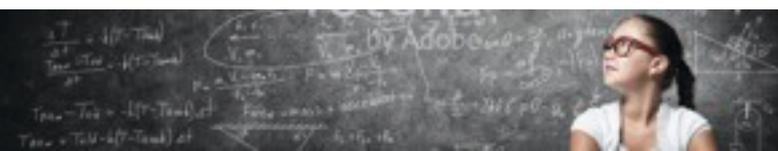


La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia (*hi-tech*), come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.



» <https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/>
» <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/>



Sommario dei contenuti

La cassetta degli attrezzi - Toolbox

Sommario dei contenuti

1. Il calcolo dell'errore 5

1.1. LA SOMMA DEGLI SCARTI QUADRATICI 5
UN ESEMPIO 6

2. Approssimazione di dati lineari 7

2.1. COEFFICIENTE ANGOLARE MEDIO 7
FACCIAMO UN POCO MEGLIO 8
2.2. RETTA DI REGRESSIONE 8
ESEMPIO 9
2.3. UN ESERCIZIO DI APPROSSIMAZIONE LINEARE 10
SOLUZIONI 10

3. Approssimazione di dati esponenziali 11

3.1. SCALA LOGARITMICA 11
ESEMPIO 12

4. Approssimazione mediante polinomi 13

4.1. PREMessa 13
4.2. METODO CLASSICO 13
UN ESEMPIO DEL METODO CLASSICO 14
4.3. DIFFERENZE DIVISE E POLINOMIO DI NEWTON 15
ESEMPIO 15
4.4. POLINOMI DI LAGRANGE 16
ESEMPIO 17
4.5. APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE CON XMAXIMA 18
ESEMPIO 18

5. Introduzione alla topologia 20

5.1. GRAFI 20
UN PRIMO ESEMPIO 20
ALCUNI ESEMPI 20
MULTIGRAFI, GRAFI E GRAFI SEMPLICI 21
ALCUNI GRAFI PARTICOLARI 21
5.2. QUALCHE TEOREMA 21
5.3. CAMMINI E CIRCUITI 22
5.4. GRAFI PESATI 23
MULTIGRAFI PESATI 23

6. Algoritmi 24

6.1. UNA DEFINIZIONE DI ALGORITMO 24
6.2. UN ESEMPIO DI PROCEDURA (ALGORITMO): LA TANGENTE A UNA PARABOLA 24
6.3. UN SECONDO ESEMPIO: IL MINIMO COMUNE MULTIPLO 25
6.4. QUALCHE SUGGERIMENTO 28

7. Equazioni differenziali 29

7.1. DERIVATE E DIFFERENZIALI CON GLI IPERREALI 29
7.2. DERIVATA, COEFFICIENTE ANGOLARE E ANGOLI 29
7.3. INCREMENTI 30
UN ESEMPIO 30
7.4. EQUAZIONI DIFFERENZIALE: VERIFICA DELLA SOLUZIONE 31
VERIFICA DELLA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI CAUCHY 31

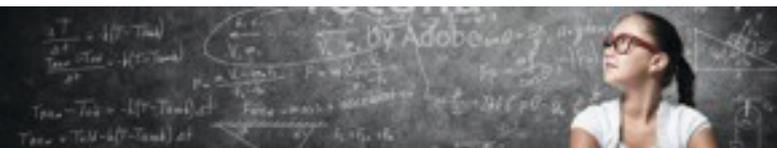


Materiale disponibile per questo laboratorio

- » il fascicolo (in formato PDF di circa 8.1MB): <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/11/00-Toolbox.pdf>;
- » calcolo dell'errore su un'approssimazione di dati lineari usando GeoGebra (in formato GGB di circa 12kB), un primo esempio di approssimazione di dati lineari usando GeoGebra (in formato GGB di circa 11kB), un secondo esempio di approssimazione di dati lineari usando GeoGebra (in formato GGB di circa 14kB) raccolti in un file compresso: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip>;
- » un videotutorial con un esempio di approssimazione di dati lineari con GeoGebra: <https://youtu.be/ct6AexNqSBc>;
- » un videotutorial con un esempio di approssimazione di dati lineari con xMaxima: <https://youtu.be/x0OlgRnSKLo>;
- » un videotutorial con un esempio di approssimazione di dati con una funzione polinomiale, usando xMaxima: https://youtu.be/_RJnDdd4Sps;

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: <http://researchinaction.it/download/>.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA>. In particolare, sul canale YouTube, è presente un breve videocorso introduttivo all'uso di xMaxima.



Approssimazione di dati sperimentali

Dati, misure e modelli

1. Il calcolo dell'errore

Il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (IIS G.B. Grassi)

I dati sono misure, informazioni elementari, che descrivono un particolare aspetto di un fenomeno. Per esempio, se somministriamo a una coltura di batteri un antibiotico, il numero di batteri presenti in certi istanti di tempo è una delle informazioni necessarie per comprendere se e come l'antibiotico è efficace contro quel particolare tipo di batterio.

Il passaggio fondamentale che avvicina la comprensione del fenomeno analizzando i dati è la costruzione di un modello, di una funzione, che consenta di comprendere l'andamento della grandezza (del fenomeno) da cui sono stati estratti i dati e prevedere il valore della stessa grandezza in istanti o punti di cui non abbiamo misure. Molti dei laboratori proposti in questo progetto - riaexplorer.blogspot.it/ - hanno l'obiettivo di costruire un modello che approssimi al meglio i dati e le misure sperimentali da usare successivamente per una più efficace comprensione del fenomeno. In altre parole, abbiamo la necessità di determinare una funzione $y = f(x)$ che approssimi in modo soddisfacente una serie di dati (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, n$.

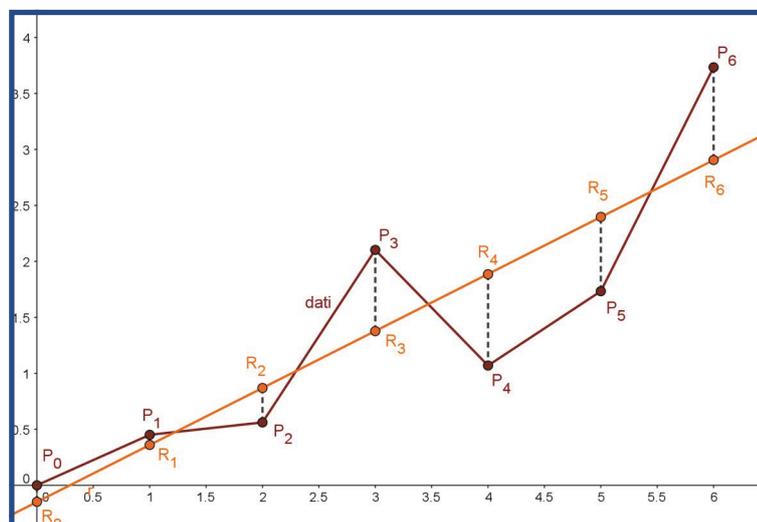
Un passo imprescindibile nel percorso che porta dai dati al modello è il calcolo dell'errore, la stima di quanto il modello si discosti dalla realtà (o almeno, da quella realtà che possiamo conoscere attraverso la misura che abbiamo eseguito).

1.1. LA SOMMA DEGLI SCARTI QUADRATICI

Calcolare l'errore significa, in termini semplici, misurare quanto si discosta il valore sperimentale dal valore che la funzione approssimante ha per la stessa ascissa. Per esempio, nella figura qui di seguito, la spezzata in colore rosso più scuro è stata ottenuta rappresentando sul piano cartesiano una serie di dati sperimentali e collegando coppie di punti successivi $P_i = (x_i, y_i)$ con un segmento. La retta r , tracciata in arancione, è stata ottenuta con un metodo di regressione lineare (ne parleremo più avanti, **cf. 2.2 Retta di regressione a pagina 8**). I punti R_0, \dots, R_n sono i punti sulla retta r che hanno ciascuno la stessa ascissa dei punti P_i . I segmenti tratteggiati in grigio mostrano quanto la retta si discosta dal valore sperimentale.

Un modo per misurare la bontà dell'approssimazione è quello di calcolare, per ciascun punto, la distanza tra due punti corrispondenti P_i e R_i come differenza delle loro ordinate ed elevare al quadrato questo valore. La somma di questi quadrati - **la somma degli scarti quadratici** - può fornire la stima che stiamo cercando.

La necessità del quadrato è abbastanza ovvia: senza questa operazione le differenze delle ordinate potrebbero essere positive o nega-



Un'introduzione sui dati, sul loro significato e sulla loro analisi si può trovare in *Introduzione all'analisi di dati sperimentali* (Università di Roma 2 Tor Vergata):

www.uniroma2.it/didattica/Sensori_ed_applic_2/deposito/dispensa_statistica.pdf



tive e sommandole effetti opposti si potrebbero compensare a vicenda dando un piccolo errore anche in presenza di forti discordanze tra dati sperimentali e teorici.

Quindi, in sostanza, se $f(x)$ è la funzione approssimante e $P_i(x_i, y_i)$ sono i punti sperimentali, l'errore può essere calcolato come la somma degli scarti quadratici:

$$S_n^2 = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - y_i]^2$$

tanto più questo valore è piccolo, tanto migliore è l'approssimazione.

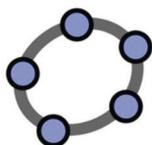
In alcune situazioni si può ricorrere alla media degli scarti quadratici, definita come:

$$\bar{S}_n^2 = \frac{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - y_i]^2}{n + 1}$$

o anche alla radice quadrata della media degli scarti quadratici:

$$\sqrt{\bar{S}_n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - y_i]^2}{n + 1}}$$

che rispetto alle altre due formule ha il vantaggio di avere la stessa unità di misura delle ordinate dei dati sperimentali.



UN ESEMPIO

Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto - <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/OO-Toolbox.zip> - usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/

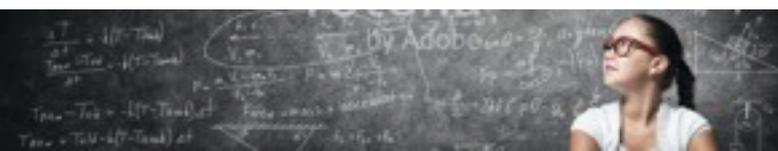
Come esempio calcoliamo una stima dell'errore commesso approssimando i dati mostrati nella figura della pagina precedente con la retta r tracciata, nella stessa figura, in colore arancione di equazione $y = 0.509x - 0.151$. La tabella qui accanto mostra, nelle prime due colonne, i dati sperimentali che nel grafico sono rappresentati dalla spezzata di colore rosso più scuro.

x_i	y_i	$[y_i - r(x_i)]^2$
0.00	0.00	0.023
1.00	0.45	0.008
2.00	0.56	0.094
3.00	2.10	0.524
4.00	1.07	0.664
5.00	1.73	0.441
6.00	3.73	0.684
Somma degli scarti quadratici		2.439
Media degli scarti quadratici		0.348



Nella terza colonna calcoliamo gli scarti quadratici (ovvero, il quadrato della differenza tra l'ordinata y_i del punto P_i con l'ordinata del punto della retta corrispondente alla stessa ascissa x_i).

Nelle due ultime righe abbiamo calcolato (ed evidenziato in rosso) la somma degli scarti quadratici e la media degli stessi scarti quadratici.



2. Approssimazione di dati lineari

Il caso più semplice di approssimazione si ha quando i dati, se rappresentati su un piano cartesiano, risultano più o meno allineati. In questo caso possiamo cercare di approssimare i dati con una retta. In questo paragrafo presenteremo due metodi: il primo più semplice e rapido, il secondo più preciso. Applicheremo entrambi i metodi alla stessa serie di dati, riportati nelle prime due colonne della tabella qui accanto.

x_i	y_i	m_i
0.00	1.17	
1.00	1.53	0.36
2.00	1.66	0.13
3.00	1.74	0.09
4.00	2.16	0.41
5.00	2.54	0.38
6.00	2.60	0.06

In ogni caso il primo passo è quello di rappresentare i dati su un piano cartesiano e verificare che i punti corrispondenti siano abbastanza allineati. La figura in questa pagina mostra la spezzata (in colore rosso) ottenuta rappresentando i punti su un piano cartesiano e unendo punti successivi con un segmento di retta. Si può osservare che, più o meno, i punti risultano allineati.

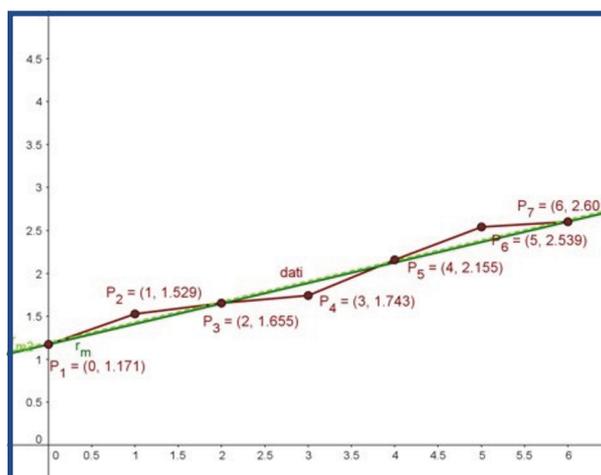
2.1. COEFFICIENTE ANGOLARE MEDIO

L'obiettivo, come visto, è quello di determinare l'equazione di una retta che approssimi al meglio la serie di dati, per far questo abbiamo bisogno di calcolare il coefficiente angolare m e l'ordinata all'origine (o *quota*) q della retta. Il metodo è piuttosto semplice:

- » per determinare il coefficiente angolare calcoleremo la media dei coefficienti angolari dei segmenti che uniscono due punti successivi;
- » una volta calcolato il coefficiente angolare imporrò che la retta passi per il primo punto della serie.

Ricordiamo che il coefficiente angolare m della retta (segmento) che unisce due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ sul piano cartesiano si può calcolare come:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



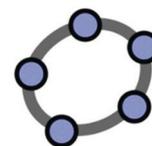
Nella tabella posta a inizio pagina, nella terza colonna - m_i - riportiamo i coefficienti angolari di ogni coppia di punti (ovviamente la prima riga è vuota perchè il primo coefficiente angolare si ottiene calcolando il rapporto della differenza di ordinate e ascisse del secondo e del primo punto).

La media si ottiene sommando tutti i coefficienti angolari appena calcolati e dividendo per il numero degli stessi coefficienti:

$$m_{medio} = \frac{m_1 + \dots + m_n}{n} = \frac{0.36 + 0.13 + 0.09 + 0.41 + 0.38 + 0.06}{6} \simeq 0.24$$

A questo punto possiamo imporre che la retta passi per il primo punto della serie sostituendo ascissa e ordinata del punto nell'equazione della retta $y=mx+q$. Contemporaneamente sostituiamo anche il coefficiente angolare trovato:

$$1.17 = 0.24 \cdot 0 + q$$



Dal blog researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto - <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> - usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/ Un video in cui è svolto l'esercizio si può trovare qui: <https://youtu.be/ct6Aex-Nq5Bc>

da cui, facilmente, ricaviamo il valore del parametro q che cercavamo e di conseguenza l'equazione della retta:

$$y = 0.24 \cdot x + 1.17$$

Nella figura della pagina precedente la retta ottenuta è stata tracciata in colore verde.

FACCIAMO UN POCO MEGLIO

Un risultato (un poco) migliore si può ottenere imponendo che la retta passi per il baricentro G dei punti (e non per il primo punto della serie). Ricordiamo che il baricentro di una serie di punti $P_1(x_1, y_1) \dots P_n(x_n, y_n)$ si può calcolare con la formula:

$$G = \left(\frac{x_0 + \dots + x_n}{n + 1}, \frac{y_0 + \dots + y_n}{n + 1} \right)$$

Nel nostro caso otteniamo $G = (3.00, 1.91)$ per cui sostituendo queste coordinate, unitamente al coefficiente angolare trovato in precedenza, nell'equazione della retta otteniamo $q = 1.19$ e quindi l'equazione della retta è:

$$y = 0.24 \cdot x + 1.19$$

Di poco diversa dalla precedente. La retta è tratteggiata nella figura della pagina precedente in colore verde più chiaro (la differenza è davvero minima).

2.2. RETTA DI REGRESSIONE

Un miglioramento più evidente lo possiamo ottenere calcolando la **retta di regressione**, si tratta infatti della retta per la quale è minima la somma degli scarti quadratici di cui abbiamo parlato in precedenza. Ci sono vari metodi per determinare la retta di regressione, qui di seguito ne illustriamo uno tra quelli possibili.

Data la serie di dati sperimentali $(x_0, y_0), \dots (x_n, y_n)$, si tratta, come appena detto, di determinare una retta $r: y = mx + q$ per cui è minima la somma degli scarti quadratici:

$$S_n(m, q) = \sum_{i=0}^n (mx_i + q - y_i)^2$$

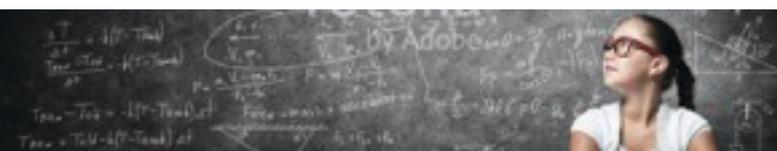


Calcoliamo il baricentro dei punti $(x_0, y_0), \dots (x_n, y_n)$ con la formula

$$G = \left(\frac{x_0 + \dots + x_n}{n + 1}, \frac{y_0 + \dots + y_n}{n + 1} \right)$$

La retta di regressione deve necessariamente passare per il baricentro G e quindi sostituiamo le coordinate del baricentro nell'equazione della retta e ricaviamo il parametro $q = q(m)$ in funzione di m .

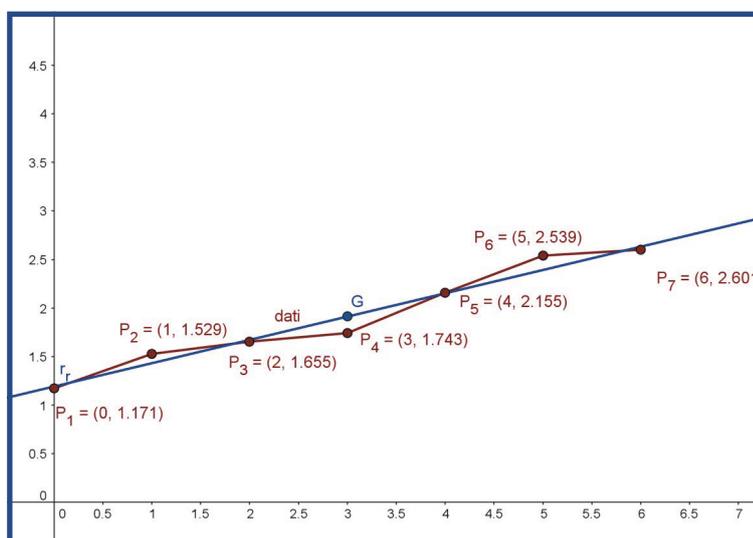
Sostituiamo questa espressione nella formula $S_n(m, q)$ che ci permette di calcolare la somma degli scarti quadratici. In questo modo la somma dipende ora solo dal parametro m (infatti al parametro q abbiamo sostituito la sua espressione in funzione di m) e si presenta come un polinomio di secondo grado, in altre parole una parabola.



Possiamo determinare facilmente il minimo di questa parabola, che ha la concavità verso l'alto, come ascissa del vertice:

$$m_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

L'ascissa del vertice è il valore di m cercato. Il valore di q si trova sostituendo m_{\min} nell'espressione $q(m)$ calcolata in precedenza. La retta di regressione è fatta!



ESEMPIO

Applichiamo questo metodo alla serie di dati che abbiamo usato in precedenza e che riportiamo nella tabella seguente (nelle prime due colonne):

x_i	y_i	$(mx_i + q - y_i)^2$	$[mx_i + q(m) - y_i]^2$
0.00	1.17	$(q - 1.17)^2$	$(0.74 - 3 \cdot m)^2$
1.00	1.53	$(q + 1.0 \cdot m - 1.53)^2$	$(0.38 - 2.0 \cdot m)^2$
2.00	1.66	$(q + 2.0 \cdot m - 1.66)^2$	$(0.25 - 1.0 \cdot m)^2$
3.00	1.74	$(q + 3.0 \cdot m - 1.74)^2$	0.03
4.00	2.16	$(q + 4.0 \cdot m - 2.16)^2$	$(1.0 \cdot m - 0.25)^2$
5.00	2.54	$(q + 5.0 \cdot m - 2.54)^2$	$(2.0 \cdot m - 0.63)^2$
6.00	2.60	$(q + 6.0 \cdot m - 2.6)^2$	$(3.0 \cdot m - 0.69)^2$

Nella terza colonna della tabella calcoliamo gli scarti quadratici per ciascuna riga della tabella con la formula (ovviamente gli scarti quadratici calcolati saranno in funzione dei parametri m e q):

$$(m \cdot x_i + q - y_i)^2$$

Eliminiamo ora il parametro q dall'espressione degli scarti quadratici. Imponiamo che la retta di regressione passi per il baricentro della serie $G = (3.00, 1.91)$ sostituendo le sue coordinate nell'equazione della retta:

$$1.91 = m \cdot 3.00 + q$$

e ricavando il valore di q in funzione di m :

$$q = 1.91 - 3.00 \cdot m$$

a questo punto sostituiamo l'espressione trovata per q negli scarti quadratici. Gli scarti quadratici in funzione del solo parametro m sono riportati nell'ultima colonna della tabella (sono approssimati alla seconda cifra decimale). Notare che nella quarta riga, casualmente, la sostituzione ha eliminato il parametro m .

La somma degli scarti quadratici, dopo qualche semplificazione, risulta:

$$S_n(m) = 28.00 \cdot m^2 - 13.66 \cdot m + 1.72$$

come previsto è espressa da un polinomio di secondo grado funzione del parametro m . Il valore del parametro per cui l'espressione assume il valore minimo si può determinare immaginando



Dal blog
researchinaction.it è
possibile scaricare un esempio
di approssimazione mediante la
retta di regressione:
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/100-Toolbox.zip>
svolto usando xMaxima.
xMaxima si può scaricare qui:
maxima.sourceforge.net/



che sia una parabola (cosa che effettivamente è) il cui minimo si trova nel vertice, la cui ascissa è:

$$m_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-13.66}{2 \cdot 28.00} \simeq 0.24$$

Una volta calcolato il valore del parametro m possiamo sostituirlo nell'espressione che avevamo ricavato per q :

$$q = 1.91 - 3.00 \cdot m = 1.91 - 3.00 \cdot 0.24 = 1.19$$

Questi valori sono proprio i coefficienti della retta di regressione, infatti sono stati scelti in modo da rendere minima la somma degli scarti quadratici medi. L'equazione cercata è quindi:

$$y = 0.24 \cdot x + 1.19$$

Nella figura mostrata nella pagina precedente, la serie di dati è in colore rosso mentre la retta di regressione è in colore blu, il punto G , anch'esso di colore blu, è il baricentro della serie di dati. Come si vede subito, la retta di regressione passa per il baricentro dei dati.

Il risultato ottenuto è paragonabile all'approssimazione determinata usando la media dei coefficienti angolari, la differenza è solo uno 0.02 nella quota. D'altra parte, con questo metodo abbiamo ricavato la stessa retta che è stata calcolata nel paragrafo **Facciamo un poco meglio a pagina 8** (il cui coefficiente angolare è stato calcolato come media dei coefficienti angolari imponendo poi che la retta passasse poi per il baricentro della serie).

2.3. UN ESERCIZIO DI APPROSSIMAZIONE LINEARE

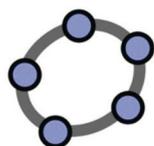
Approssimate con una retta la serie di dati riportata nella tabella qui sotto con i tre metodi mostrati in precedenza e confrontate i risultati ottenuti tra loro. Notate che i dati sono *meno allineati* della serie precedente. Puoi usare le tre colonne vuote per i calcoli intermedi.

x_i	y_i	m_i	$(mx_i+q-y_i)^2$	$[mx_i+q(m)-y_i]^2$
0.00	0.00			
1.00	0.45			
2.00	0.56			
3.00	2.10			
4.00	1.07			
5.00	1.73			
6.00	3.73			



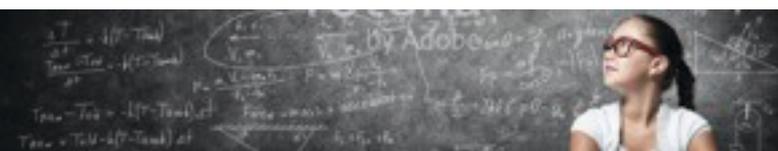
SOLUZIONI

Approssimando i dati si ottiene:



- » con il metodo del coefficiente angolare medio passante per il primo punto della serie una retta di equazione $r_m: y = 0.622x$;
- » con il metodo del coefficiente angolare medio passante baricentro della serie una retta di equazione $r_G: y = 0.622x - 0.488$;
- » la retta di regressione risulta $r_r: y = 0.591x - 0.396$.

Dal blog researchinaction.it è possibile scaricare l'esercizio svolto: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/



3. Approssimazione di dati esponenziali

In questo paragrafo ci occupiamo di determinare una funzione che approssimi al meglio una serie di dati nel caso in cui questi dati, una volta rappresentati su un piano cartesiano, abbiano un andamento esponenziale.

3.1. SCALA LOGARITMICA

La **scala logaritmica** è una rappresentazione grafica di una serie di dati costruita in modo che al posto delle ordinate è considerato il logaritmo di ciascuna delle ordinate stesse. In altre parole, dato il punto $P_i(x_i, y_i)$, rappresentiamo su un piano cartesiano il punto corrispondente che ha la stessa ascissa ma per ordinata il logaritmo della y_i : $P'_i(x_i, \ln(y_i))$ oppure $P''_i(x_i, \log(y_i))$ a seconda che si prenda in considerazione il logaritmo naturale o quello in base 10.

Una proprietà interessante della scala logaritmica, quella che ci interessa nello specifico e che deriva direttamente dalle proprietà dei logaritmi, è che i punti appartenenti al grafico di una funzione esponenziale, in scala logaritmica appaiono allineati. Infatti, sia (qui dimostriamo la proprietà per una funzione esponenziale in base e ma la dimostrazione per un esponenziale qualsiasi è del tutto simile):

$$y = a \cdot e^{bx}$$

una funzione esponenziale, se passiamo al logaritmo, applichiamo le proprietà dei logaritmi e ricordiamo che il logaritmo naturale del numero e è pari a uno, abbiamo:

$$\ln y = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx \ln e = \ln a + bx$$

In conclusione, sostituendo $Y = \ln(y)$, l'espressione:

$$Y = \ln a + bx$$

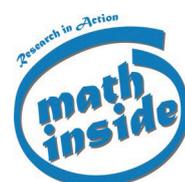
rappresenta, come si vede subito, una retta di ordinata all'origine (quota) $\ln(a)$ e coefficiente angolare b . In altre parole, il coefficiente angolare della retta in scala logaritmica è uguale al coefficiente presente a esponente nella funzione esponenziale.

Per quello che ci riguarda questa proprietà è importante più di quanto possa sembrare a una prima lettura, infatti per approssimare una serie di dati che descrive un fenomeno di crescita o decrescita esponenziale, cioè determinare una funzione del tipo

$$y = a e^{bx}$$

dobbiamo procedere come segue:

- » rappresentare i dati in scala logaritmica (il loro allineamento fornirà una conferma dell'andamento dei dati originali) e approssimarli con una retta usando uno dei metodi descritti in precedenza;
- » determinare il valore del parametro a imponendo che la funzione *passi* per il primo punto della serie originale, il valore del parametro b è dato dal coefficiente angolare della retta che approssima i



Ricordiamo che una delle proprietà dei logaritmi permette di trasformare il logaritmo di un prodotto in una somma di logaritmi:
 $\log_c(HK) = \log_c(H) + \log_c(K)$
mentre un'altra proprietà consente moltiplicare il logaritmo per l'esponente dell'argomento:
 $\log_c(H^n) = n \log_c(H)$

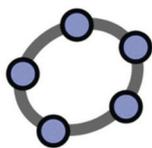


dati in scala logaritmica.

ESEMPIO

Consideriamo la serie di dati mostrata nella tabella che si trova nella pagina successiva (nella prima e seconda colonna). Riportiamo i dati su un piano cartesiano (nella figura che si trova nella pagina successiva è la spezzata di colore rosso più scuro), l'andamento sembra proprio quello di una funzione esponenziale e quindi cerchiamo una funzione esponenziale, del tipo indicato in precedenza, che approssimi i dati.

x_i	y_i	$\ln(y_i)$	m_i
0.000	3.200	1.163	
1.000	4.200	1.435	0.272
2.000	5.200	1.649	0.214
3.000	7.000	1.946	0.297
4.000	8.600	2.152	0.206
5.000	11.500	2.442	0.291
6.000	14.500	2.674	0.232



Dal blog riaexplorer.blogspot.it è possibile scaricare il laboratorio svolto - <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> - usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/ Un video con l'esercizio svolto e commentato è qui: <https://youtu.be/PtYO1XFjHOo>

A questo scopo calcoliamo i logaritmi delle ordinate di ciascun punto (i valori corrispondenti sono riportati nella terza colonna della tabella) e rappresentiamo le coppie $(x_i, \ln(y_i))$ su un piano cartesiano (per comodità abbiamo usato lo stesso piano cartesiano mostrato in questa stessa pagina, i dati in scala logaritmica sono in colore grigio), il fatto che siano praticamente allineati conferma la nostra ipotesi di un andamento esponenziale.

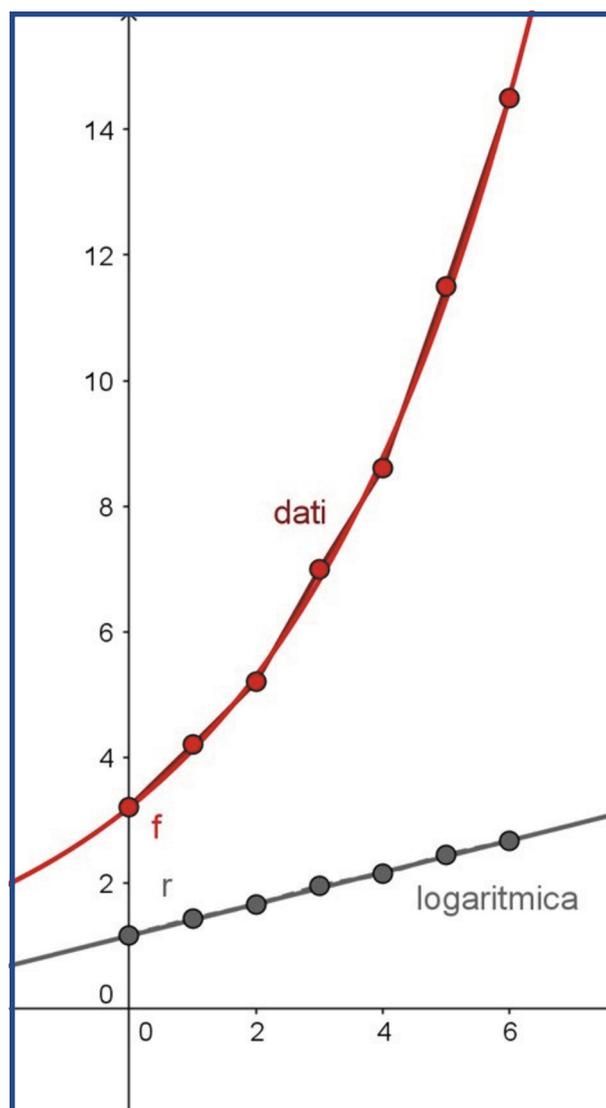
Approssimiamo i dati in scala logaritmica con una retta (utilizzando il metodo del coefficiente angolare medio). Per far questo calcoliamo il coefficiente angolare di ciascun segmento ottenuto collegando due punti successivi (i valori di questi coefficienti angolari sono riportati nella quarta colonna della tabella). La media di questi coefficienti angolari è $m = 0.252$ (non abbiamo bisogno, in realtà, di determinare l'equazione della retta, l'unica cosa veramente necessaria è il coefficiente angolare).

A questo punto il gioco è fatto. Il parametro b della funzione esponenziale che stiamo cercando ha lo stesso valore del coefficiente angolare medio, quindi $b = 0.252$. Per determinare il valore del coefficiente a imponiamo che la funzione passi per il primo punto da cui $a = 3.200$. In conclusione, la funzione cercata è:

$$y = 3.200 \cdot e^{0.252 \cdot x}$$



In figura il grafico della funzione è tracciato in colore rosso. Si può osservare come questo grafico ricalchi in modo molto preciso l'andamento della spezzata ottenuta con i dati originali. Per chiarezza, nella stessa figura, è tracciata in colore grigio la retta che approssima i dati in scala logaritmica.



4. Approssimazione mediante polinomi

L'approssimazione mediante polinomi è una delle idee più antiche dell'analisi numerica e tuttavia una delle più usate ... i polinomi sono facili da calcolare, implicando solo potenze a esponente intero. Ma anche le loro derivate e integrali si trovano senza difficoltà, e sono ancora polinomi. (Scheid, F. – *Analisi numerica* – 1975, Gruppo editoriale Fabbri).

4.1. PREMESSA

Data una serie di punti

$$(x_i, y_i) \text{ per } i = 0, \dots, n$$

provenienti per esempio da misure sperimentali si tratta di determinare un polinomio di grado opportuno che *passi* per ciascuno dei punti, in altre parole per ogni punto vogliamo che

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

Un polinomio con questa caratteristica – un polinomio che passa per i punti dati – è detto **polinomio interpolatore**.

Anche se in questa breve trattazione ci occuperemo solamente di alcuni metodi per approssimare dati sperimentali, gli stessi metodi possono essere usati per approssimare una funzione $y = f(x)$ di cui sono noti i valori $y_i = f(x_i)$ in alcuni punti x_i . Per quello che ci interessa non fa nessuna differenza se le coppie (x_i, y_i) provengono da misure sperimentali o da valori calcolati a partire da una funzione.

Un'ulteriore precisazione va fatta sul termine interpolazione. Se chiamiamo x_{MIN} il più piccolo degli x_i e con x_{MAX} il più grande, l'**interpolazione** è l'approssimazione di valori compresi nell'intervallo (x_{MIN}, x_{MAX}) mentre l'approssimazione di valori esterni a quest'intervallo è detta **estrapolazione** (e presenta alcuni problemi che non affliggono l'interpolazione).

4.2. METODO CLASSICO

Il metodo classico, il più semplice da spiegare, è quello di scegliere un generico polinomio $p_n(x)$ e imporre che i parametri soddisfino le $n+1$ equazioni

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$$

A questo proposito è bene notare che un generico polinomio di grado n è identificato da $n+1$ parametri, infatti si ha

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

per cui, per soddisfare le $n+1$ condizioni imposte dal problema, cerchiamo un polinomio di grado n . Si imposta quindi un sistema con $n+1$ equazioni nelle $n+1$ incognite a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i parametri che definiscono il polinomio cercato.



Dal blog
researchinaction.it
it: è possibile scaricare un esempio di approssimazione polinomiale con il metodo classico: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> svolto usando xMaxima.
xMaxima si può scaricare qui: maxima.sourceforge.net/
C'è anche un video con l'esercizio svolto e commentato: https://youtu.be/_Rjnd44Sps



Ricordiamo che il rango di una matrice è l'ordine della sottomatrice più grande che ha il determinante diverso da zero. Se i punti sono tutti diversi le righe della matrice sono tutte differenti e questo garantisce che il determinante è diverso da zero.

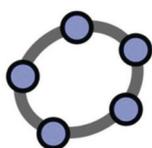
La matrice, allora, è essa stessa la sottomatrice più grande con determinante non nullo e quindi il rango della matrice è $n+1$ (pari al numero delle incognite). Questo garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema!

La soluzione è unica se i valori x_i , come ci si aspetta, sono tutti diversi tra di loro. Infatti la matrice dei coefficienti del sistema, detta anche **matrice di Cauchy-Vandermonde** (ricordiamo che le incognite sono i parametri del polinomio a_0, a_1, \dots, a_n) è:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

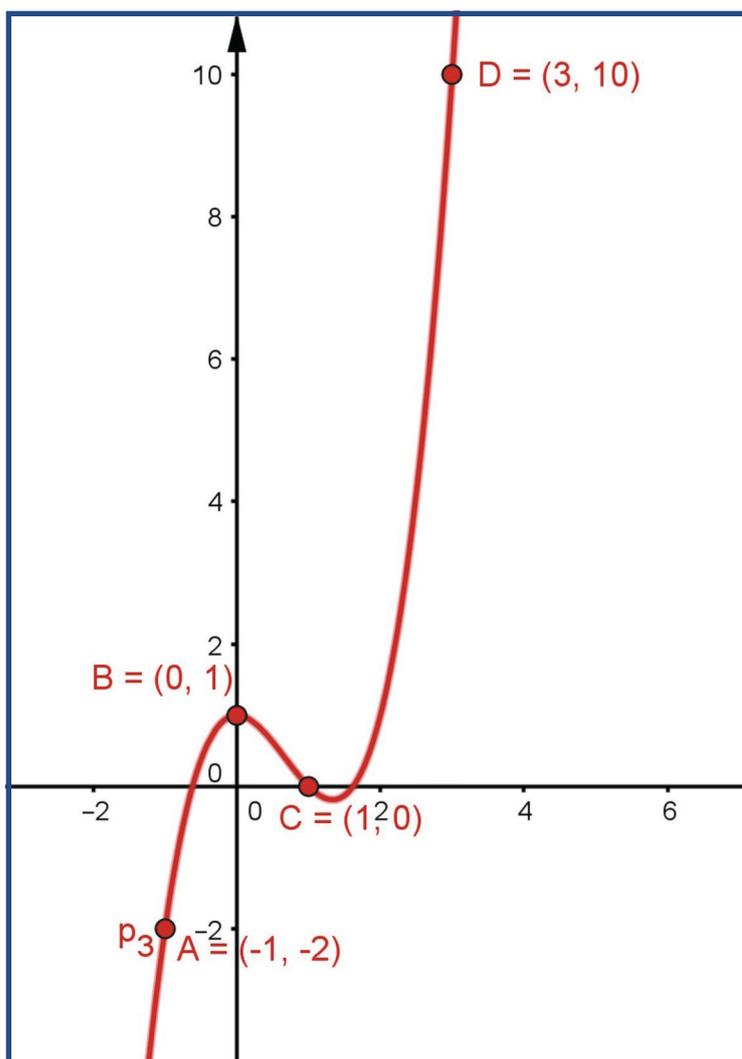
per cui il rango di questa matrice è $n+1$ quando, come già detto, gli x_i sono diversi tra loro. Ne consegue che il rango della matrice completa del sistema è anch'esso $n+1$ e quindi il sistema è determinato. Questo implica chiaramente che la soluzione è unica e quindi è unico anche il polinomio interpolatore.

UN ESEMPIO DEL METODO CLASSICO



Vogliamo determinare un polinomio che approssimi al meglio i dati sperimentali $A(-1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$ e $D(3, 10)$. Visto che abbiamo quattro punti, dobbiamo cercare un polinomio di terzo grado (un polinomio di questo tipo, infatti, ha quattro parametri e i quattro punti che abbiamo ci forniscono quattro condizioni/equazioni)

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



i cui quattro parametri a , b , c e d saranno le incognite da determinare. Impostiamo il sistema con quattro equazioni imponendo il passaggio di $p_3(x)$ per i quattro punti (in altre parole, sostituiamo le coordinate di ciascun punto nell'espressione del polinomio):

$$\begin{cases} -a + b - c + d = -2 \\ d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 10 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è

$$a = 1, b = -2, c = 0, d = 1$$

per cui il polinomio interpolatore è

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

È facile verificare questo polinomio passa per i punti A , B , C e D . Nella figura qui accanto, in colore rosso, è tracciato il polinomio interpolatore appena calcolato.

Dal blog researchinaction.it è possibile scaricare il laboratorio svolto - <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> - usando GeoGebra. GeoGebra si può scaricare qui: www.geogebra.org/



4.3. DIFFERENZE DIVISE E POLINOMIO DI NEWTON

Proviamo ora un nuovo modo per calcolare il polinomio interpolatore. innanzitutto definiamo le **differenze divise** nel modo seguente: le differenze divise di ordine zero sono i valori y_i : $f[x_i] = y_i$. Le differenze divise del primo ordine sono il rapporto tra la *differenza* delle differenze divise di ordine zero e l'incremento della variabile indipendente:

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f[x_i] - f[x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}$$

Le differenze divise di secondo ordine sono, ancora, il rapporto tra la *differenza* delle differenze divise di primo ordine e l'incremento corrispondente della variabile indipendente:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

e così via.

Una volta calcolate le differenze divise il polinomio interpolatore è:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]$$

È facile verificare che $p_n(x_0) = y_0$, infatti tutti i termini del polinomio di Newton si annullano perché contengono il fattore $(x - x_0)$ tranne il primo, il termine noto, e quindi

$$p_n(x_0) = f[x_0] = y_0$$

Calcoliamo allora $p_n(x_1)$, in questo caso si annullano tutti i termini tranne i primi due, gli unici che non contengono il fattore $(x - x_0)$ per cui si ha, ricordando la definizione di differenze divise:

$$p_n(x_1) = f[x_0] + (x_1 - x_0)f[x_0, x_1] = y_0 + (x_1 - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y_0 + y_1 - y_0 = y_1$$

Procedendo allo stesso modo si può dimostrare che $p_n(x_i) = y_i$ per $i=0, \dots, n$

ESEMPIO

Vogliamo determinare un polinomio che approssimi al meglio i dati sperimentali che abbiamo già usato in precedenza $A(-1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$ e $D(3, 10)$. Innanzitutto costruiamo la tabella delle differenze divise.

x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
-1	-2	$\frac{1+2}{0+1} = 3$	$\frac{-1-3}{1+1} = -2$	$\frac{1+2}{2+1} = 1$
0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{1+1}{2-0} = 1$	$\frac{4-1}{3-0} = 1$
1	0	$\frac{1-0}{2-1} = 1$	$\frac{9-1}{3-1} = 4$	
2	1	$\frac{10-1}{3-2} = 9$		
3	10			



Dal blog
researchinaction.it è
 possibile scaricare un esempio di
 approssimazione polinomiale con
 il metodo di Newton:
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2013/12/OO-Toolbox.zip>
 svolto usando xMaxima.
 xMaxima si può scaricare qui:
maxima.sourceforge.net/



A questo punto possiamo costruire il polinomio interpolatore (useremo, come specificato dalla definizione del polinomio di Newton, le differenze divise della prima riga):

$$p_3(x) = -2 + 3 \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 1)x + 1 \cdot (x + 1)x(x - 1)$$

che
volta semplificato diventa

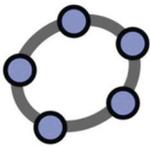
$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

una

È bene notare che le differenze divise di terzo ordine sono entrambe uguali a uno per cui, come è facile prevedere, le differenze divise successive (dal quarto ordine in poi) saranno tutte nulle. Questo è un modo per conoscere il grado del polinomio interpolatore, infatti, nella formula di Newton, ogni termine successivo a quello di grado tre, nel nostro esempio, sarà moltiplicato per un coefficiente nullo e quindi il nostro polinomio sarà di terzo grado.

4.4. POLINOMI DI LAGRANGE

C'è ancora un terzo modo per determinare un polinomio di grado n che passi per gli $n+1$ punti $P_i(x_i, y_i)$: il **metodo di Lagrange**. Il polinomio di Lagrange è definito come:



$$p_n(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot L_j(x)$$

dove gli $L_j(x)$ sono a loro volta dei polinomi ottenuti come segue:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)}$$

o anche, in maniera più sintetica:

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

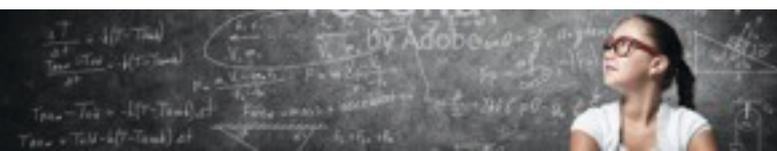
In altre parole, ciascun polinomio $L_j(x)$ è il rapporto di due prodotti. Al numeratore c'è il prodotto dei binomi del tipo $(x - x_i)$ escluso però il termine corrispondente all'indice j (lo stesso indice che identifica il polinomio). Al denominatore appare il prodotto delle quantità $(x_j - x_i)$ escluso, anche in questo caso, il termine corrispondente all'indice j . L'insieme dei polinomi $L_j(x)$ per $j=0, \dots, n$ è detto **base di polinomi**.



È facile verificare che i polinomi $L_j(x)$ si annullano se calcolati in un punto che ha indice diverso da quello del polinomio (infatti in questo caso uno dei termini $x - x_i$ che appaiono al numeratore vale zero), mentre valgono esattamente uno se calcolati nel punto che ha lo stesso indice del polinomio (perché in questo caso i termini al numeratore sono tutti esattamente uguali a quelli al denominatore). Quindi, in termini un po' più formali, abbiamo che:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Chiarito questo punto, possiamo ora dimostrare che il polinomio di Lagrange *passa* per tutti i punti P_i . Infatti:



$$p_n(x_j) = y_0 L_0(x_j) + y_1 L_1(x_j) + \dots + y_j L_j(x_j) + \dots + y_n L_n(x_j) = y_j$$

perchè tutti i polinomi $L_j(x)$ si annullano se calcolati in x_j , a eccezione del polinomio L_j che vale uno, per cui, come detto $p_n(x_j) = y_j$.

ESEMPIO

Ancora una volta cerchiamo un polinomio in grado di approssimare gli stessi dato già visti, cioè i punti $A(-1,-2)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$ e $D(3,10)$, ma questa volta useremo il metodo suggerito da Lagrange. Per prima cosa costruiamo la base di polinomi, nel numeratore del primo polinomio della base non appare il binomio $(x+1)$ ottenuto dal primo punto della serie:

$$L_0(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{(-1-0) \cdot (-1-1) \cdot (-1-3)} = -\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x$$

Nel secondo polinomio non c'è il binomio $(x-0)$ ottenuto utilizzando il secondo punto:

$$L_1(x) = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{(0+1) \cdot (0-1) \cdot (0-3)} = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{3} + 1$$

Non calcoliamo il terzo polinomio perchè nel polinomio di Lagrange sarà moltiplicato per zero (l'ordinata del punto P_2). Infine nell'ultimo polinomio non appare $(x-3)$ visto che 3 è l'ascissa dell'ultimo punto:

$$L_3(x) = \frac{(x+1) \cdot (x-0) \cdot (x-1)}{(3+1) \cdot (3-0) \cdot (3-1)} = \frac{x^3}{24} - \frac{x}{24}$$

A questo punto possiamo costruire il polinomio di Lagrange:

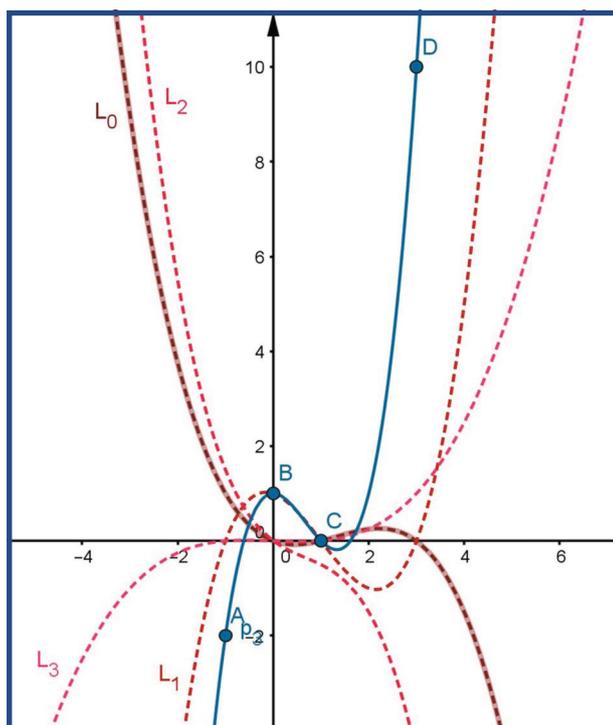
$$p_3(x) = -2 \left(-\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x \right) + 1 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{3} + 1 \right) + 10 \left(\frac{x^3}{24} - \frac{x}{24} \right)$$

dove abbiamo moltiplicato ogni polinomio della base per l'ordinata del punto con lo stesso indice.

Sviluppando e semplificando diventa semplicemente:

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

Ancora una volta abbiamo ottenuto lo stesso polinomio ma, come detto in precedenza, il polinomio interpolatore è unico. Il polinomio interpolatore di Lagrange è tracciato in colore blu nella figura qui accanto, nella stessa figura sono tratteggiati in colore rosso i quattro polinomi della base.



Dal blog researchinaction.it è possibile scaricare un esempio di approssimazione polinomiale con il metodo di Lagrange: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> svolto usando xMaxima. xMaxima si può scaricare qui: maxima.sourceforge.net/



4.5. APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE CON xMAXIMA

In molti casi, nei laboratori proposti da *RiA - Research in Action*, i dati da manipolare provengono da esperimenti reali e misure concrete, effettuate in veri esperimenti. Per cui non sarà facile effettuare i calcoli necessari a determinare un polinomio interpolatore: *carta e penna* non basteranno! Sarà necessario ricorrere a un'applicazione *CAS - Computer Algebra System*, capace di eseguire calcoli simbolici, derivate, e quant'altro sia necessario. In questa serie di laboratori abbiamo usato *xMaxima* - maxima.sourceforge.net/ - un'applicazione *open source* abbastanza semplice da usare.



Dal blog researchinaction.it è possibile scaricare l'esercizio svolto - <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2018/12/00-Toolbox.zip> - usando xMaxima. xMaxima si può scaricare qui: maxima.sourceforge.net/

Ovviamente è possibile usare una qualsiasi altra applicazione di tipo *CAS*, la nostra scelta è caduta su *xMaxima* per la sua potenza e la sua relativa facilità d'uso una volta che ci si è impadroniti dei comandi principali ma anche perchè gli studenti familiarizzino con applicazioni a *riga di comando*. Se non avete familiarità con applicazione del genere vi consigliamo di seguire il breve video che illustra l'approssimazione polinomiale di una serie di dati, eseguendo le operazioni passo passo e commentando ogni istruzione. Di questo esempio è possibile scaricare anche il file creato con *xMaxima* (il file, oltre alle istruzioni per calcolare il polinomio, contiene commenti e spiegazioni sui comandi e sulla procedura) e il grafico realizzato con *GeoGebra*.

ESEMPIO

Qui di seguito illustriamo il calcolo di un polinomio interpolatore usando *xMaxima*.



Ogni blocco (istruzioni - input - più risultati - output) in xMaxima è definito cella. Ogni cella è definita, delimitata, dal simbolo che si trova a sinistra delle istruzioni. Per esempio, la definizione delle due liste qui accanto e le corrispondenti due linee di output sono una cella.

Innanzitutto definiamo due liste per i dati: la lista (il vettore) X contiene le ascisse dei punti, la lista (il vettore) Y le ordinate. Memorizzare i dati in una lista ha due vantaggi: permette di modificare i dati e ripetere la procedura senza dover modificare le istruzioni e facilita la scelta dei punti da usare per l'approssimazione indicando solo l'indice e non il valore. Il carattere ':' (due punti) definisce, se necessario, una variabile e le assegna il valore dell'espressione che si trova a destra del simbolo stesso. La lista è delimitata dalle parentesi quadre e gli elementi della lista sono separati da virgole. L'applicazione *risponde* con le due liste appena definite: le linee di *output* etichettate con (X) e (Y) . Una volta definita la lista si può accedere a ogni elemento direttamente, per esempio $X[3]$ è il terzo elemento della lista X .

```
--> X: [0.00, 2.10, 3.89, 6.24, 7.69, 10.45, 12.23, 13.67, 15.87, 18.05];
      Y: [0.02, 13.14, 16.47, 17.09, 17.05, 16.74, 15.53, 13.37, 7.66, 0.55];
(X)  [0.0, 2.1, 3.89, 6.24, 7.69, 10.45, 12.23, 13.67, 15.87, 18.05]
(Y)  [0.02, 13.14, 16.47, 17.09, 17.05, 16.74, 15.53, 13.37, 7.66, 0.55]
```



Scegliamo di determinare un polinomio di quinto grado. Un polinomio di quinto grado ha sei parametri quindi possiamo usare solo sei punti tra quelli forniti. L'operatore ':=' (due punti seguito da uguale) definisce una funzione la cui espressione si trova a destra dell'operatore. L'*output* di *xMaxima* è l'espressione della funzione appena definita.

```
--> p_n(x) := a*x^5+b*x^4+c*x^3+d*x^2+e*x+f;
(%o36) p_n(x) := a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f
```

Ogni equazione impone che il polinomio *passi* per il punto scelto. In altre parole, imponiamo che il valore del polinomio calcolato nell'ascissa del punto sia uguale all'ordinata dello stesso punto. Le equazioni sono contenute nella stessa *cella* di *xMaxima* in modo che possano essere valutate tutte insieme con un solo comando. Ogni equazione ha un'etichetta (un nome) - *eq'n* - per rendere più leggibile il resto del calcolo. Una volta eseguita l'istruzione l'applicazione *risponde* mostrando le sei equazioni corrispondenti per esteso.



```

--> eq1: p_n(X[1])=Y[1];
      eq3: p_n(X[3])=Y[3];
      eq4: p_n(X[4])=Y[4];
      eq5: p_n(X[5])=Y[5];
      eq6: p_n(X[6])=Y[6];
      eq9: p_n(X[9])=Y[9];
(eq1)  f=0.02
(eq3)  f+3.89 e+15.1321 d+58.863869000000001 c+228.98045041 b+890.7339520949001 a=16.47
(eq4)  f+6.24 e+38.9376 d+242.970624 c+1516.13669376 b+9460.692969062402 a=17.09
(eq5)  f+7.69 e+59.136100000000001 d+454.75660900000001 c+3497.078323210001 b+26892.53230548491 a=
17.05
(eq6)  f+10.45 e+109.2025 d+1141.166125 c+11925.18600625 b+124618.1937653125 a=16.74
(eq9)  f+15.87 e+251.8569 d+3996.969002999999 c+63431.89807760999 b+1006664.22249167 a=7.66

```

Risolviamo il sistema ottenuto dalle sei equazioni che abbiamo impostato con il comando *linsolve* e contestualmente trasformiamo le soluzioni in numero decimali (con *float*). Nella corrispondente linea di *output* xMaxima mostra le soluzioni del sistema (i valori trovati per i sei parametri) raccolte in una lista.

```

--> float(linsolve([eq1,eq3,eq4,eq5,eq6,eq9],[a,b,c,d,e,f]));
(%o44) [a=2.473941366036687 10^-4, b=-0.01312143372945891, c=0.2531960994586852, d=-2.307814859142594
, e=10.09053281453959, f=0.02]

```

Sostituiamo i valori trovati per i parametri *a*, *b*, *c*, *d* ed *f* con l'istruzione *subst*. Le soluzioni del sistema sono elencate in una lista (notare le parentesi quadre nella linea di *output* %044) quindi in un colpo solo possiamo sostituire tutti i parametri con i rispettivi valori. La linea di *output* %036 è quella che contiene l'equazione del polinomio (vedi la pagina precedente).

Dopo la sostituzione ri-definiamo il polinomio e otteniamo l'equazione con i coefficienti trovati (e non più i parametri).

```

--> subst(%o44,%o36);
(%o51) p_n(x):=2.473941366036687 10^-4 x^5-0.01312143372945891 x^4+0.2531960994586852 x^3-
2.307814859142594 x^2+10.09053281453959 x+0.02
--> p_n(x):=2.473941366036687*10^-4*x^5-0.01312143372945891*x^4+0.2531960994586852*x^3-
2.307814859142594*x^2+10.09053281453959*x+0.02;
(%o55) p_n(x):=2.473941366036687 10^-4 x^5-0.01312143372945891 x^4+0.2531960994586852 x^3+
(-2.307814859142594) x^2+10.09053281453959 x+0.02

```

Al termine della procedura calcoliamo anche la media della somma degli scarti quadratici per avere una stima dell'errore. La funzione *sum* esegue la sommatoria dei termini specificati (*i* è l'indice della sommatoria e 1 e *length(X)* gli estremi - gli indici del primo e l'ultimo elemento della somma), la funzione *length* restituisce la lunghezza di una lista, nel nostro caso la lunghezza della lista equivale al numero degli elementi che contiene e quindi al numero dei punti sperimentali.

```

--> sum((p_n(X[i])-Y[i])^2, i, 1, length(X))/length(X);
(%o61) 0.001384172290411664

```

L'*output* di questa istruzione è la somma appena calcolata, l'errore che cercavamo.



Teoria dei grafi

Grafi, cammini, percorsi

5. Introduzione alla topologia

5.1. GRAFI

Un **multigrafo** G , formalmente, è una tripla $G = (V, E, f)$ dove V (che non può essere vuoto) è l'insieme dei **nodi** o **vertici** del grafo, E è l'insieme degli archi o **lati** del grafo. Ogni elemento di E è una coppia (v, w) con v e w appartenenti a V e rappresenta il collegamento tra il vertice v e il vertice w , i due vertici si dicono **estremi** dell'arco. Un arco che ha per vertice un nodo v si dice **incidente** al nodo v . Notare che la definizione non esclude che esista più di un collegamento tra la stessa coppia di nodi. Infine f è una funzione che associa, per l'appunto, un elemento di E a un elemento di $V \times V = V^2$. Un grafo è detto **completo** se $E = V \times V = V^2$, cioè se ogni nodo è collegato a ogni altro nodo.

Spesso, per brevità, si ignora la funzione f nella definizione e si definisce semplicemente un **multigrafo** come $G = (V, E)$ dove, come in precedenza, V è l'insieme dei vertici ed E l'insieme degli archi.

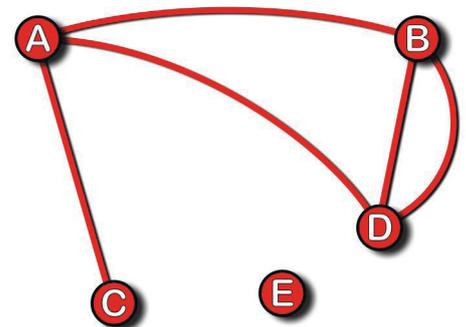
Il numero di archi incidenti un nodo v si dice **grado** o **valenza** del nodo e si indica con $d(v)$. Un nodo v per cui si ha $d(v)=0$ (il nodo non ha archi incidenti, non è estremo di nessun arco) è detto **isolato**.

Un grafo è detto **orientato** o **diretto** (in inglese directed graph o *digraph*) se le coppie (v, w) sono considerate ordinate e quindi la coppia (v, w) è diversa dalla coppia (w, v) : la prima rappresenta un collegamento che va dal vertice v al vertice w mentre la seconda un collegamento che, al contrario, va da w a v . Nell'arco (v, w) il vertice v è detto **vertice iniziale** dell'arco (v, w) e il nodo w è detto **finale**.

UN PRIMO ESEMPIO

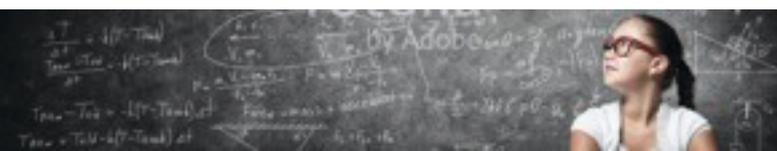


La figura qui accanto mostra un multigrafo nella sua forma più comune in cui i nodi o vertici sono rappresentati da punti (o circoletti, come in questo caso) e gli archi da linee, non necessariamente segmenti di retta. L'insieme dei vertici è $V=\{A, B, C, D, E\}$, l'insieme degli archi è $E=\{(A,B), (A,C), (A,D), (B,D), (B,D)\}$. Il nodo E è isolato, infatti non ha collegamenti con nessun altro vertice del grafo per cui abbiamo $d(E)=0$. Per quanto riguarda il grado degli altri nodi si ha, per esempio, $d(A)=3$ e $d(B)=3$.

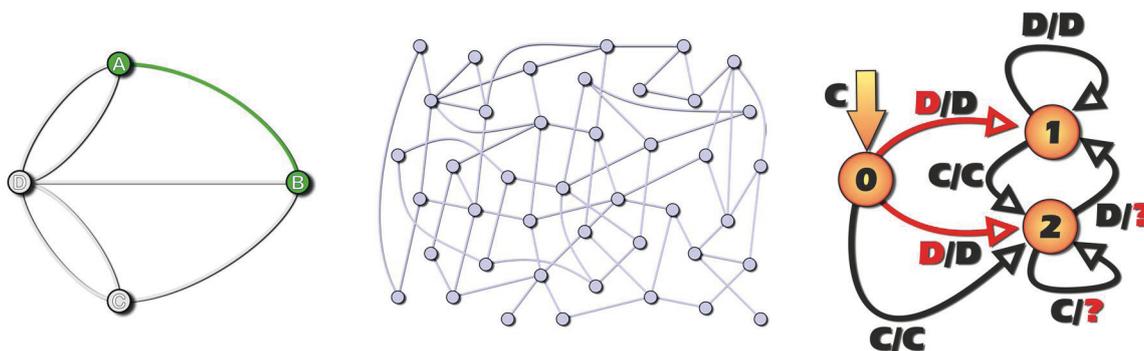


ALCUNI ESEMPI

Di seguito alcuni altri esempi. La figura più a sinistra mostra un grafo piuttosto semplice (ma anche abbastanza famoso, vedere il laboratorio **Quattro passi in centro**), l'arco evidenziato in colore verde è **incidente** ai nodi A e B , che sono gli **estremi** dell'arco. Il **grado** del nodo A è pari a tre perchè tre sono gli archi incidenti questo nodo. La figura al centro mostra un grafo più comples-



so che, malgrado l'apparenza, non è *connesso* (a questo proposito, vedere più avanti). Infine, sulla destra, un grafo *orientato* usato per rappresentare un automa cellulare a stati finiti, una struttura utilizzata per simulare processi decisionali; in questo grafo, in alcuni casi, esistono più archi tra la stessa coppia di nodi (per esempio, tra il nodo 0 e il nodo 2)..



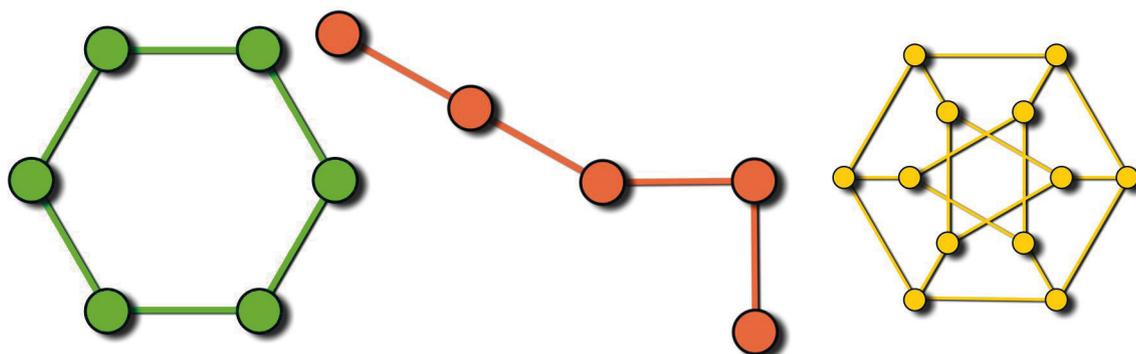
MULTIGRAFI, GRAFI E GRAFI SEMPLICI

Un **grafo** è un grafo in cui la funzione f , che associa un arco a una coppia di nodi, è iniettiva. In altre parole, in un grafo semplice per ogni coppia di vertici esiste al più un solo collegamento.

La notazione usata in letteratura è a volte ambigua. In particolare su alcuni testi un **grafo** è un grafo in cui sono ammessi più collegamenti tra la stessa coppia di archi (quello che qui abbiamo chiamato *multigrafo*). Mentre un **grafo semplice** ha al più un solo collegamento per ogni coppia di nodi (oggetto che qui abbiamo definito *grafo*).

ALCUNI GRAFI PARTICOLARI

Un **ciclo di lunghezza n** , un **n -ciclo**, spesso indicato con C_n , è un grafo i cui nodi corrispondono ai vertici del poligono regolare con n lati e gli archi sono i lati del poligono stesso (nella figura qui sopra, in colore verde, è mostrato il ciclo di lunghezza 6: C_6). Mentre un **cammino di lunghezza n** , indicato con P_n , è un grafo di $n+1$ vertici e n lati in cui ogni vertice è collegato solo con il successivo (sempre nella figura precedente, in colore arancione, è mostrato il cammino di lunghezza 4: P_4). Infine, in colore giallo, il grafo di Petersen con $n = 6$.



5.2. QUALCHE TEOREMA

È facile dedurre che se $G=(V, E)$ è un grafo allora la somma del grado di tutti i nodi è pari al doppio degli archi, in termini più formali:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$



Un corso introduttivo, rigoroso e formale, sulla teoria dei grafi, può essere consultato online qui: http://web.math.unifi.it/users/casolo/dispense/Teoria_Grafi.pdf opera di Carlo Casolo e Francesco Fumagalli, dipartimento di matematica Ulisse Dini, Università degli studi di Firenze

dove la somma è estesa a tutti i nodi v appartenenti all'insieme V mentre $|E|$ indica il numero di elementi di E (in altre parole, la cardinalità di E). Infatti ogni arco ha esattamente due estremi e quindi sommando il grado di ciascun nodo *contiamo* gli archi due volte.

Un grafo si dice **connesso** se per ogni coppia di nodi v e w esiste un cammino da v a w . Per un grafico connesso si ha

$$|E| \geq |V| - 1$$

cioè, la cardinalità di E (il numero di archi) è maggiore o uguale alla cardinalità di V (il numero di nodi) diminuita di uno. Infatti se il grafo è connesso deve essere almeno un cammino, cioè ogni nodo deve essere collegato ad altri due nodi a eccezione del primo e dell'ultimo. Ma in questo caso il numero degli archi è inferiore di uno al numero dei vertici (e quindi la disuguaglianza qui sopra è soddisfatta) e ogni altro arco non fa che aumentare il numero dei lati del grafo mantenendo costante il numero dei vertici.

5.3. CAMMINI E CIRCUITI

Un **cammino** in un grafo è un insieme ordinato di vertici $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ tale che esista un arco che ha per estremi v_1 e v_2 , un arco che ha per estremi v_2 e v_3 , e così via ... in modo da costruire un percorso che va dal primo nodo all'ultimo usando tutti archi diversi. In altri termini, la definizione richiede che i lati, gli archi, usati per costruire il cammino siano tutti differenti, non ci siano ripetizioni. Questo non è vero per i nodi, in un cammino lo stesso nodo si può presentare più volte. Il cammino invece si dice **semplice** se anche i nodi dell'insieme, a eccezione al più del primo e dell'ultimo, sono tutti diversi, cioè il percorso non passa per lo stesso vertice due o più volte. Il numero dei lati che compongono il cammino è detto **lunghezza del cammino**. Infine, un cammino $\{v_0, v_2, \dots, v_n\}$ è un **circuito** se il nodo iniziale v_0 e il nodo finale v_n coincidono. Anche in questo caso, se i nodi sono tutti differenti il circuito è detto **semplice**.

Un cammino $\{v_0, v_2, \dots, v_n\}$ i cui nodi sono collegati dagli archi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ si dice **cammino euleriano** se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = E$. In altre parole, se abbiamo un cammino che riesce a usare tutti gli archi del grafo una e una sola volta (infatti, nella definizione di *cammino*, gli archi non possono ripetersi). In modo simile, un circuito $\{v_0, v_2, \dots, v_n\}$ è detto **circuito euleriano** quando si riesce a costruire un percorso che passa per tutti gli archi una e una sola volta ritornando alla fine al nodo di partenza, in termini più formali se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = E$. Un grafo nel quale esiste un *circuito euleriano* è un **grafo euleriano**.



Nella storia Paperino e i ponti di Quackenberg (pubblicata su Topolino n. 3252, Editore PANINI SpA) è Pico de Paperis che veste i panni di Leonhard Euler e, dopo aver studiato il problema, si rende conto che si tratta sicuramente di un problema di geometria ma diverso dai soliti, che richiede un approccio del tutto nuovo. ©Disney

Proviamo ora, nelle richieste appena fatte, a scambiare di posto vertici e archi. Un cammino semplice $\{v_0, v_2, \dots, v_n\}$ si dice **cammino hamiltoniano** se $\{v_0, v_2, \dots, v_n\} = V$, cioè il cammino passa per tutti i nodi del grafo una e una sola volta. Analogamente un circuito semplice è chiamato circuito hamiltoniano se $\{v_0, v_2, \dots, v_n\} = V$, cioè passa per tutti i vertici una e una sola volta tornando, al termine, al nodo di partenza (ricordiamo che nella definizione di cammino semplice si richiede che tutti i nodi siano diversi ... *a eccezione al più del primo e dell'ultimo* ... che quindi possono coincidere). Un grafo in cui è possibile costruire un *cammino hamiltoniano* è un **grafo hamiltoniano**.



5.4. GRAFI PESATI

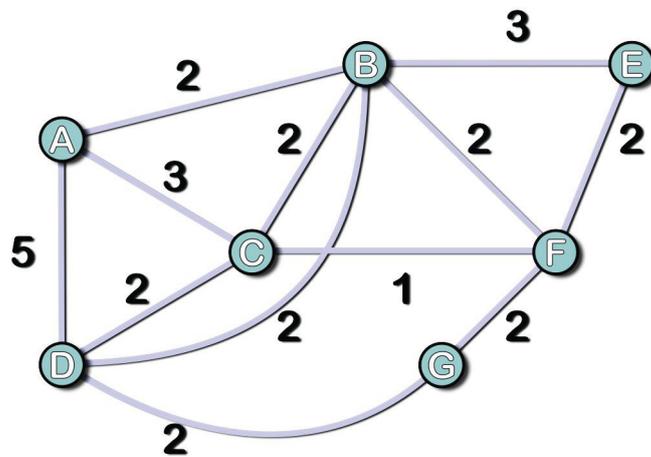
Un **grafo** o un **multigrafo** G è definito da una tripla $G = (V, E, W)$ dove V (che non può essere vuoto) è come al solito l'insieme dei nodi o vertici del grafo, E è l'insieme degli archi o lati del grafo e W (è questa la novità) è un insieme di **pesi** associati agli archi di E . Quindi, se ogni elemento di E è una coppia (u, v) con u e v appartenenti a V e rappresenta il collegamento tra il vertice u e il vertice v , il corrispondente elemento w di W misura il peso del collegamento.

Meglio fare subito un esempio. Supponiamo che G sia il grafo associato alla rete della metropolitana di una grande città, in questo esempio:

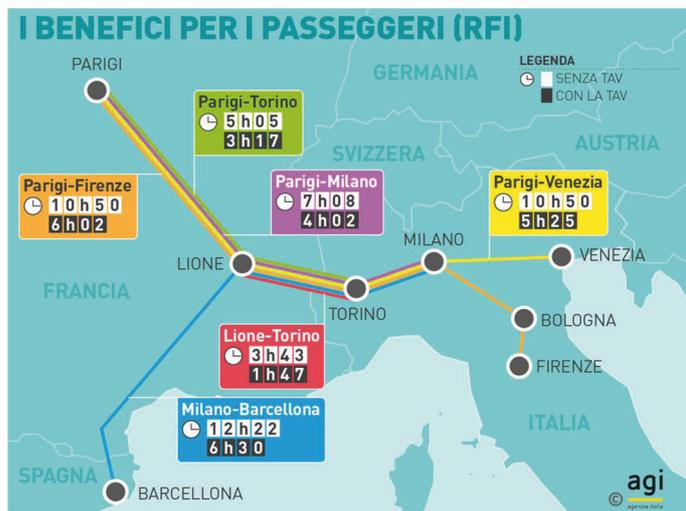
- » l'insieme V rappresenta le stazioni della metro (ogni elemento di v appartenente a V è una delle stazioni della rete);
- » l'insieme E rappresenta le tratte (ogni elemento (u, v) appartenente a E è un tratto della rete, quello che va dalla stazione u fino alla stazione v);
- » l'insieme W potrebbe essere, allora, la lunghezza di ogni tratta (ma anche il tempo di percorrenza), la distanza tra la stazione u e la stazione w .

In questo modo potremmo tener conto, nel nostro modello, di un'informazione in più, spesso essenziale, come la distanza, il tempo, ...

Qui accanto una possibile rappresentazione di un grafo pesato. I pesi di ogni lato del grafo sono riportati vicino al corrispondente arco. Così si vede subito che il lato che collega il nodo A al nodo C ha un peso pari a 3 mentre l'arco che congiunge i vertici A e D è il più *pesante* tra quelli che fanno parte di questo grafo.



In fondo alla pagina un altro esempio di grafo pesato: si tratta di una modellizzazione della mappa dell'alta velocità europea, o almeno una porzione dell'intera rete, e a ogni tratta/percorso è associato (attraverso i cartelli che hanno lo stesso colore) il tempo di percorrenza. Anzi, in questo caso i pesi in realtà sono due: il tempo di percorrenza di un treno ad alta velocità e quello per un treno ordinario.



MULTIGRAFI PESATI

In realtà la stessa situazione si può modellizzare meglio con un multigrafo in cui sono presenti più archi per ogni coppia di nodi. Nel caso in questione, un arco rappresenterà la tratta dell'alta velocità e il secondo lato tra gli stessi due vertici, indicherà la tratta ordinaria: i due archi avranno pesi diversi perchè diverso sarà il tempo di percorrenza.



L'immagine *Benefici per i passeggeri* è tratta da l'articolo TAV: la verità dei fatti - https://www.agi.it/saperetutto/tav_torino_lione_costi_effetti-4451507/longform/2018-10-12.



6. Algoritmi

6.1. UNA DEFINIZIONE DI ALGORITMO

Un **algoritmo** è un procedimento pensato e progettato per risolvere un determinato problema. È costituito da una sequenza di istruzioni, da una successione di compiti elementari, che se eseguiti portano alla soluzione del problema affrontato. L'algoritmo stesso e le istruzioni che lo costituiscono devono sottostare ad alcune condizioni, per la precisione, un algoritmo:

- » è composto da un insieme finito di istruzioni che realizzano un particolare compito;
- » richiede inizialmente un insieme di informazioni e/o dati su cui operare (comunemente denominato **input**);
- » fornisce il risultato che consiste di una o più informazioni e/o azioni (**output**);
- » ogni istruzione deve essere chiara e non ambigua;
- » termina dopo un numero finito di passi;
- » ogni istruzione deve essere elementare (lo deve essere talmente *da poter essere eseguita solo con carta e penna* e senza bisogno di ulteriori spiegazioni).

La parola algoritmo è, in un certo senso un neologismo, deriva infatti dal nome matematico arabo *al-Khwarizmi* o, più precisamente da Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (dove *ibn* vuol dire figlio di ... mentre *al-* vuol dire nato a ...) vissuto tra 780 e 850 d.C. che scrisse un testo dedicato all'apprendimento della matematica - *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala* - in cui l'autore presentava le procedure per la soluzione di numerosi problemi algebrici e numerici.

Le caratteristiche di un algoritmo possono apparire piuttosto vaghe per cui sarà bene presentare subito un esempio.

6.2. UN ESEMPIO DI PROCEDURA (ALGORITMO): LA TANGENTE A UNA PARABOLA



Il problema: Scrivere una procedura che determini la tangente a una parabola in un suo punto.

Ipotesi: Supporremo la parabola in un sistema di coordinate cartesiane Oxy , con asse parallelo all'asse delle ordinate e quindi di equazione $y = ax^2 + bx + c$. La procedura calcola il coefficiente angolare della tangente con la derivata prima della funzione nel punto, tenendo conto che la derivata y' di un trinomio di secondo grado è $y' = 2ax + b$ e che la derivata prima calcolata in un punto x_0 della funzione $y'(x_0) = 2a x_0 + b$ fornisce proprio il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto.

Dati in input: I coefficienti della parabola a, b, c . Le coordinate del punto x_0, y_0 .

Dati in output: I coefficienti m, q dell'equazione della retta tangente in forma esplicita (la retta tangente avrà quindi equazione $y = mx + q$).

La procedura, con queste precisazioni, potrebbe essere descritta come segue. Nella descrizione della procedura abbiamo evidenziato le parole chiave (parole che sono specifiche del linguaggio utilizzato per descrivere la procedura) **in questo modo**, i commenti (testo che appare nella pro-



cedura ma non costituisce un'istruzione o parte di un'istruzione ma solo una spiegazione in linguaggio corrente dell'istruzione stessa, con il solo scopo di facilitare la comprensione del lettore) **in questo modo** e, infine, le stringhe di caratteri letterali (parole o frasi che non vanno interpretate o eseguite ma solo, in genere, inviate alla periferica di output) **in questo modo**.

A questo punto possiamo scrivere la nostra procedura.

```
input: a,b,c x_0,y_0
Controlla inizialmente se il punto appartiene alla parabola
se y_0 == a*x_0^2 + b*x_0+c allora
    Il punto appartiene effettivamente alla parabola,
    la procedura si può applicare
    m = 2*a*x_0+b calcola il coefficiente angolare della tangente
    q = y_0-m*x_0 calcola l'ordinata all'origine (la quota) della tangente
    output: "I coefficienti della retta sono:" m, q
altrimenti
    Il punto non appartiene alla parabola,
    la procedura non si può applicare
    output: "Il punto non appartiene alla parabola, impossibile proseguire"
fine
```

Da notare anche che, per rendere più facile la comprensione del testo, della procedura, abbiamo *identato* (spostato a destra di una tabulazione) le istruzioni che fanno parte dello stesso blocco, per esempio tutte le istruzioni (e anche i commenti) comprese tra le parole chiave *se* e *altrimenti*. Abbiamo anche usato, sintassi comune in molti linguaggi di programmazione, il simbolo `==` per indicare un confronto tra due valori, che assume valore *vero* se le due espressioni a sinistra e destra del `==` sono uguali e *falso* in caso contrario. Il simbolo `=` invece assegna il valore a destra alla variabile che si trova a sinistra.

Supponiamo ora di voler utilizzare la procedura appena descritta per determinare la retta tangente alla parabola $y = 4x - x^2$ nel suo punto $A(4,0)$. La tabella che segue riporta nella colonna di sinistra l'istruzione della procedura che viene eseguita e nella colonna di destra il relativo calcolo con i dati forniti.

Codice	Istruzione effettivamente eseguite
input: a,b,c x_0,y_0	-1, 4, 0 4, 0
se y_0=a*x_0^2+b*x_0+c allora	0 = -1·4^2+4·4 è vero
m=2*a*x_0+b	m = 2(-1)·4+4 = -4
q=y_0-m*x_0	q = 0-(-4)·4 = 16
Output: "I coeff. ...:" m, q	"I coefficienti ..." -4, 16
fine	



Notare che il blocco di istruzioni e commenti che segue la parola chiave *altrimenti* non è mai eseguito, infatti la condizione che appare dopo la parola chiave *se ... allora* è verificata (è vera) e la procedura, in questo caso, richiede di eseguire solo le istruzioni contenute nel blocco che segue la parola chiave *allora*.

6.3. UN SECONDO ESEMPIO: IL MINIMO COMUNE MULTIPLO

Tutti abbiamo imparato, nel corso dei nostri studi, che il minimo comune multiplo (*mcm*) tra due numeri naturali si può calcolare scomponendo i due numeri naturali e poi moltiplicando tutti i fattori, dell'uno e dell'altro, con l'esponente più grande. Per esempio il (*mcm*) tra 4 e 14 è 28, infatti $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ e $14 = 2 \cdot 7$ per cui $mcm = 2^2 \cdot 7 = 28$.

Questo procedimento è piuttosto difficile da formalizzare in una procedura, ma soprattutto è decisamente inefficiente dal punto di vista computazionale (cioè, richiede un numero di operazioni, e quindi un tempo di calcolo, molto elevato). Esiste un altro algoritmo, dovuto a Euclide, che funziona più o meno in questo modo: dati di due numeri naturali si calcolano due somme, una a partire dal primo numero e una dal secondo, aggiungendo ogni volta lo stesso numero alla somma più piccola, a quando le due somme non sono uguali. Queste due somme sono (entrambe) uguali al minimo comune multiplo cercato. Per esempio, sempre considerando 4 e 14, aggiungiamo 4 a 4 (visto che 4 è più piccolo di 14) ottenendo 8. 8 e 14 non sono uguali per cui sommiamo ancora 4 alla somma inferiore (8) ottenendo 12. 12 e 14 non sono uguali quindi aggiungiamo di nuovo 4 alla somma minore che diventa 16. 16 e 14 non sono uguali ma questa volta dobbiamo aggiungere 14 alla somma più piccola ottenendo 28. 16 e 28 non sono uguali e procediamo sommando a 16 il numero 4 ottenendo via via 20, poi 24 e infine 28. A questo punto le due somme sono entrambe uguali a 28 e quindi il minimo comune multiplo è proprio 28!

Cerchiamo di formalizzare questo algoritmo con una procedura.

Dati in input: Due numeri interi p ed q .

Dati in output: Il minimo comune multiplo mcm dei due numeri.

Per formalizzare la procedura abbiamo usato le stesse convenzioni dell'esempio precedente.

```

input: p, q
Inizializza le sue somme ponendole uguali ai due numeri
somma_p = p
somma_q = q
Ripete le stesse operazioni fintantochè le due somme sono diverse tra loro
ripeti mentre somma_p != somma_q allora
    se somma_p < somma_q allora
        La somma ottenuta a partire da p è minore
        somma_p = somma_p + p    aggiunge p alla somma_p
    altrimenti
        La somma ottenuta a partire da q è minore
        somma_q = somma_q + q    aggiunge q alla somma_q
output: "Il mcm è:" somma_p
fine

```



Il ciclo **ripeti mentre ...** è eseguito più volte: si controlla all'inizio di ogni iterazione se la condizione è vera (nel nostro caso se le due somme sono diverse), se è così - condizione verificata - il ciclo è eseguito un'altra volta. In pratica il ciclo termina quando la condizione non è più verificata (nel nostro caso quando le due somme sono uguali).

Come nell'esempio precedente, rendere più facile la comprensione del testo, abbiamo *identato* (spostato a destra di una tabulazione) le istruzioni che fanno parte dello stesso blocco, per esempio tutte le istruzioni (e anche i commenti) racchiuse all'interno del ciclo **ripeti mentre**

Proviamo a eseguire la procedura passo passo per calcolare, ancora una volta, il minimo comune multiplo tra 4 e 14. La tabella che segue riporta nella colonna di sinistra l'istruzione della procedura che viene eseguita e nella colonna di destra il relativo calcolo con i dati forniti.

Codice	Istruzione effettivamente eseguite
<code>input: p, q</code>	<code>p = 4, q = 14</code>
<code>somma_p = p</code>	<code>somma_p = 4</code>
<code>somma_q = q</code>	<code>somma_q = 14</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>4 != 14 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>4 < 14 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 4 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>8 != 14 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>8 < 14 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 8 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>12 != 14 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>12 < 14 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 12 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>16 != 14 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>14 < 14 è falso</code>
<code>somma_q = somma_q + q</code>	<code>somma_q = 14 + 14</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>16 != 28 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>16 < 28 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 16 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>20 != 28 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>20 < 28 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 20 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>24 != 28 è vero</code>
<code>se somma_p < somma_q allora</code>	<code>24 < 28 è vero</code>
<code>somma_p = somma_p + p</code>	<code>somma_p = 24 + 4</code>
<code>ripeti mentre somma_p != somma_q allora</code>	<code>28 != 28 è falso</code>
<code>output: "Il mcm è:" somma_p</code>	<code>"Il mcm è:" 28</code>

In fondo a questa pagina la stessa procedura *costruita* con *Blockly*. I primi due blocchi *set ...* implementano l'input della procedura: richiedono - *prompt for ...* - all'utente due numeri. In colore verde il blocco *repeat while ...* che costituisce il ciclo principale della procedura, all'interno del quale si controlla se una delle due somme è minore dell'altra - il blocco *if ...* - e si aggiorna una o l'altra somma. L'ultimo blocco - *print ...* - è l'output: mostra proprio il minimo comune multiplo.

```

set p to prompt for number with message "Primo numero: "
set q to prompt for number with message "Secondo numero: "
set somma_p to p
set somma_q to q
repeat while (somma_p != somma_q)
do
  if (somma_p < somma_q)
  do
    change somma_p by p
  else
    change somma_q by q
  end if
end repeat
print somma_p

```



6.4. QUALCHE SUGGERIMENTO

Per controllare il corretto funzionamento di una procedura può essere utile lavorare con carta e penna: impostare una tabella con una colonna per ogni variabile della procedura e una riga per ogni istruzione eseguita e ripercorrere la procedura passo per passo, istruzione dopo istruzione, cercando di fare proprio quello che la procedura richiede (e non quello che si pensa debba fare).

Per esempio, quella che segue è la procedura per determinare il massimo comun divisore di due numeri con un algoritmo diverso da quello che si usa di solito. Qui non viene descritto l'algoritmo, ma solo fornita la procedura ...

input: p, q

Ripete le stesse operazioni fintantochè i due numeri sono diversi tra loro
ripeti mentre $p \neq q$ allora

se $p > q$ allora

Il primo numero è più grande

$p = p - q$ sottrae al primo numero il secondo

altrimenti

Il secondo numero è più grande

$q = q - p$ sottrae al secondo numero il primo

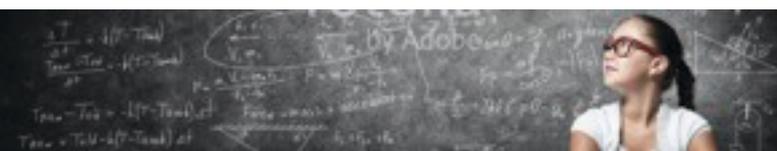
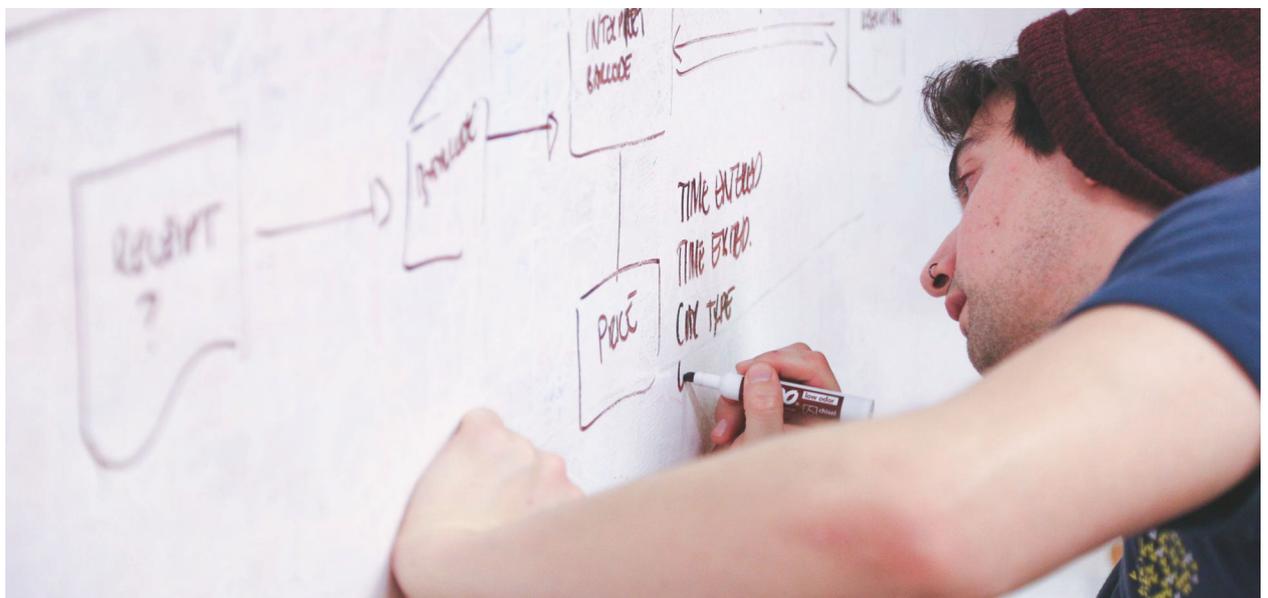
output: "Il MCD è:" p

fine

... proviamo a eseguirla passo passo così come abbiamo suggerito. Ci sono solo due variabili e quindi abbiamo bisogno di una tabella con solo due colonne, supponiamo di eseguire il test sui numeri 12 e 3.

p	q
12	3
9	
6	
3	

La prima riga mostra la situazione dopo l'*input* dei dati. La seconda riga è il risultato del confronto tra p e q che, essendo p maggiore di q , porta a eseguire l'istruzione dopo il *se ... allora ...*: si sottrae al numero maggiore (12) il più piccolo (3) e il risultato è memorizzato nella variabile p . Si prosegue così fino a che i due numeri non sono uguali.



Equazioni differenziali

Soluzione numerica di un'equazione differenziale

$$P_{3y} = P_{2y} + \int_{x_2}^{x_3} f(x_2) dx = P_{2y} + f(x_2) dx$$

7. Equazioni differenziali

7.1. DERIVATE E DIFFERENZIALI CON GLI IPERREALI

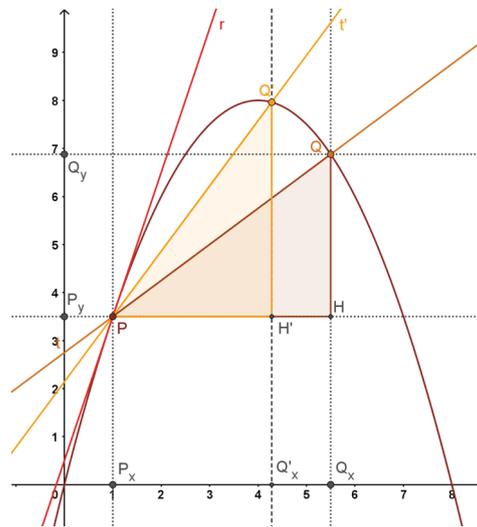
La derivata $f'(x_0)$ di una funzione in un punto è definita come

$$f'(x_0) = \text{std}\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$$

se il rapporto esiste ed è finito. Il rapporto

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{x_0 + dx - x_0}$$

è detto **rapporto differenziale** e rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$, retta secante la curva. È chiaro che se dx è un infinitesimo il rapporto differenziale, o meglio la sua parte standard, diventa il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto P_0 (infatti i due punti di ascissa x_0 e $x_0 + dx$ sono infinitamente vicini). La figura qui sopra mostra il processo per valori di dx via via più piccoli, fino ad arrivare alla retta tangente (in colore rosso più chiaro) – si immagina di aver usato *microscopi* ad ingrandimento sempre maggiore uno dopo l'altro.



Nella notazione usata, molto simile a quella introdotta da Leibnitz, si evidenzia meglio questo stretto legame tra derivata e rapporto degli incrementi, infatti

$$f'(x_0) = \text{std}\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)$$

dove $df(x_0)$ è il differenziale della funzione $f(x)$ calcolato nel punto x_0 (o, in altre parole, l'incremento infinitesimo della funzione $f(x)$ a partire dal punto P_0) e dx è l'incremento (anch'esso infinitesimo) della variabile indipendente x .



7.2. DERIVATA, COEFFICIENTE ANGOLARE E ANGOLI

Approfittiamo per ricordare che il coefficiente angolare m della retta tangente a una curva è proprio, come visto, il valore della derivata della funzione calcolata in quel punto. Ma questo è anche il valore della tangente trigonometrica dell'angolo che la retta (la tangente) forma con l'asse delle ascisse, quindi: $m = f'(x_0) = \tan(\alpha)$.

Questo vuol dire che, ricordando il secondo teorema sui triangoli rettangoli, che

$$\overline{PH} = \overline{P_0H} \cdot \tan \hat{HP}_0P_1 = \overline{P_0H} \cdot f'(x_0)$$

7.3. INCREMENTI

Usando un poco di trigonometria possiamo ricavare (in modo approssimato) le coordinate di un punto P_1 della curva conoscendo le coordinate di un altro punto P_0 e la derivata $f'(x_0)$ della curva nello stesso punto.

Consideriamo il triangolo P_0HP_1 in figura. Dal secondo teorema sui triangoli rettangoli possiamo ricavare (come già visto nella pagina precedente)

$$\overline{P_1H} = \overline{P_0H} \cdot \tan \widehat{HP_0P_1} = \overline{P_0H} \cdot f'(x_0)$$

ma se l'incremento $dx = P_0H$ è sufficientemente piccolo, l'angolo HP_0P_1 è praticamente uguale all'angolo che la retta tangente alla curva in P_0 forma con l'asse delle ascisse e quindi

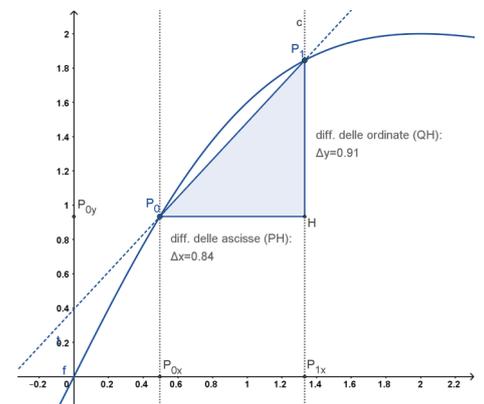
$$\overline{P_1H} \approx f'(x_0) \cdot dx$$

che si può scrivere meglio come $f(x_0+dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$.

Questo vuol dire che, noto $P_0(x_0, f(x_0))$ e $f'(x_0)$ e scelto un incremento dx possiamo determinare le coordinate di un altro punto $P_1(x_1, f(x_1))$ della curva, vicino a P_0 . Infatti possiamo calcolare $y_1 \approx y_0 + f'(x_0)dx$ mentre $x_1 \approx x_0 + dx$.

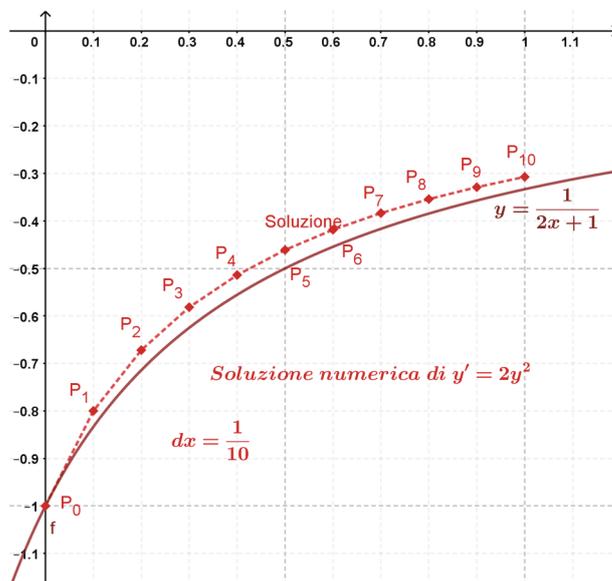
UN ESEMPIO

Questo metodo consente di *indagare* un'equazione differenziale del primo ordine senza risolverla. Infatti è possibile costruire una successione di punti che approssima l'andamento della soluzione utilizzando l'equazione stessa per calcolare la derivata della funzione!



Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine, a variabili separabili $y' = 2y^2$ con $y(0) = -1$ la cui soluzione è $y = -1/(2x+1)$. Supponiamo di non essere in grado, per qualche motivo, di risolvere l'equazione differenziale e cerchiamo di determinare una soluzione approssimata o meglio, una successione di punti che permette di comprendere l'andamento della funzione soluzione dell'equazione.

Il primo punto di questa successione è noto, è il punto $P_0(0, -1)$ che ci viene fornito come condizione iniziale del problema di Cauchy. Fissiamo l'incremento $dx = 1/10$ (non è un infinitesimo, per questo avremo una soluzione che è tanto più grossolana quanto maggiore è l'incremento scelto).



L'ordinata y_1 del punto successivo P_1 della serie si può calcolare con la formula precedente

$$y_1 \approx y_0 + f'(x_0) \cdot dx$$

dove il valore della derivata $f'(x_0) = 2y_0^2$ è dedotto proprio dall'equazione differenziale, per cui otteniamo $y_1 \approx -1 + 2(-1)^2 \cdot 1/10 = -4/5$. Quindi il secondo punto è $P_1(1/10, -4/5)$.

Calcoliamo il terzo punto P_2 della successione, abbiamo $x_2 = x_1 + dx = 1/10 + 1/10 = 2/10$ mentre l'ordinata si può determinare ancora

dalla formula

$$y_2 = y_1 + f'(x_1) \cdot dx \approx -\frac{4}{5} + 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{10} = -\frac{84}{125} = -0.672$$

La figura nella pagina precedente mostra i primi tre punti (con relative coordinate) e otto punti successivi ottenuti iterando il procedimento. La linea continua in colore rosso più chiaro è il grafico della funzione $y = -1/(2x+1)$ che è la soluzione esatta dell'equazione differenziale.

7.4. EQUAZIONI DIFFERENZIALE: VERIFICA DELLA SOLUZIONE

A margine vogliamo mostrare come è possibile verificare che una data funzione $y = f(x)$ è soluzione di un'equazione differenziale del tipo $f(x, y, y', y'', \dots) = 0$. Si tratta di determinare le derivate di $y = f(x)$ e sostituirle nell'equazione, se dopo le necessarie semplificazioni si ottiene un'identità la funzione $y = f(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale.

Per esempio, riprendiamo in considerazione l'equazione differenziale $y' = 2y^2$ la cui soluzione, a quanto dice il testo, è $y = -1/(2x+1)$. Nell'equazione è presente la derivata prima per cui calcoliamo

$$y' = -\frac{-1 \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{+2}{(2x+1)^2}$$

Ora sostituiamo in $y' = 2y^2$, si ottiene

$$\frac{+2}{(2x+1)^2} = 2\left(\frac{-1}{2x+1}\right)^2$$

Quindi $y = -1/(2x+1)$ è effettivamente una delle soluzioni dell'equazione differenziale data.

Notare che non è l'unica soluzione anzi, tutte le funzioni del tipo $y = -1/(2x+c)$ sono soluzione dell'equazione differenziale $y' = 2y^2$. Infatti, $y' = (1/(2x+c))' = -(-2)/(2x+c)^2$ per cui, sostituendo

$$\frac{+2}{(2x+c)^2} = 2\left(\frac{-1}{2x+c}\right)^2$$

da cui l'identità.

Il motivo è che mentre la derivata di una funzione è unica le funzioni che derivate ci danno la nostra funzione sono infinite (tutte simili, a meno di una costante).

VERIFICA DELLA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy affrontato nell'esempio si scrive, formalmente, come:

$$\begin{cases} y' = 2y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

dove $y(0) = -1$ è detta **condizione iniziale** o *condizione al contorno*. Una funzione è soluzione del problema di Cauchy se è soluzione dell'equazione differenziale e soddisfa anche la condizione iniziale. La funzione già vista $y = -1/(2x+1)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = 2y^2$ come già visto. Ma è anche vero che $y(0) = -1/(2 \cdot 0 + 1) = -1$ per cui $y = -1/(2x+1)$ soddisfa anche la condizione iniziale.





LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA



Istituto per le Applicazioni del Calcolo



Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

Marine Technology Research Institute



LSS G.B. GRASSI

LICEO SCIENTIFICO STATALE G.B. GRASSI DI LATINA

WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG

CNR - IAC

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO MAURO PICONE

WWW.IAC.CNR.ORG

CNR - IFN ROMA

ISTITUTO DI FOTONICA E NANOTECNOLOGIE

WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG

CNR - INSEAN

ISTITUTO NAZIONALE STUDI ESPERIENZE E ARCHITETTURA NAVALE

WWW.INSEAN.CNR.ORG