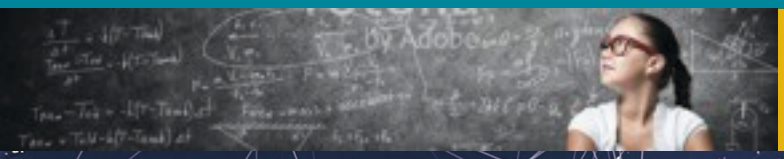
Quattro passi in centro

Grafi, cammini, percorsi



RESEARCH IN ACTION - RIA
RESEARCHINACTION.IT

Nel 1736, Leonhard Euler (matematico svizzero conosciuto in Italia come Eulero) risolve il problema dei sette ponti di Königsberg e, contestualmente, apre la strada per una nuova branca della matematica: la topologia, di cui la teoria dei grafi è solo una parte.

È un settore della matematica ricco di applicazioni pratiche, capace di descrivere in modo immediato situazioni tra le più diverse, spesso capace di porre problemi facili da capire ma, a volte, molto difficili da risolvere.

06 Quattro passi in centro - 01.19
Revisione 1.2 del 19.02.24

RiA - Research in Action

La parola ria in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne da l'Oxford Living Dictonaries):

> A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php)

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - **www.liceograssilatina.org** - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi dei pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.

La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia *(hi-tech)*, come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.

» https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/
» https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/

Sommario dei contenuti

Quattro passi in centro - Grafi, cammini, percorsi

Sommario dei contenuti

1. Un'introduzione alla teoria dei grafi 5

1.1. Prerequisiti 6
1.2. Obiettivi 6
Note 6

2. Il problema dei ponti di Königsberg 7

3. Un'introduzione ai grafi 8

3.1. Un problema semplice 8
Un poco di teoria 8
3.2. Un altro problema semplice 9
Ancora un poco di teoria 9
3.3. Una terna di problemi 10
3.4. Tutto da capo 11
3.5. Generalizziamo 12
Un caso particolare 13
3.6. Un altro caso particolare 14

4. I ponti di Königsberg 15

5. Esercizi 17

5.1. La sfida di Zio Paperone 17
5.2. I quindici ponti di Parigi 17
5.3. Il torneo di volley 18
Un poco di teoria 3 18
5.4. Il torneo di squash 18
Un poco di teoria 4 18

6. Un'introduzione alla teoria dei grafi 20

6.1. Un problema semplice 20
6.2. Un altro problema semplice 21
6.3. Una terna di problemi 21
6.4. Tutto da capo 22
6.5. Generalizziamo 23
Un caso particolare 24
6.6. Un altro caso particolare 25

7. I ponti di Königsberg 26

8. Una soluzione solo parziale 27

Questo laboratorio è completato da altri due percorsi:
Un grafo connesso http://researchinaction.it/materials/07-Un-grafo-connesso.pdf
Un problema di consegne http://researchinaction.it/materials/16-Un-problema-di-consegne.pdf

Materiale disponibile per questo laboratorio:

» il fascicolo (in formato PDF di circa 10MB): **http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/02/06-Quattro-passi-in-centro.pdf**.

Per il materiale didattico a supporto del fascicolo visitare anche la pagina Download del sito dedicato al progetto: **http://researchinaction.it/download/**.

Per i videotutorial è possibile visitare il canale YouTube del progetto: **https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA**. In particolare, sul canale YouTube, c'è una playlist interamente dedicata ai due laboratori di topologia: **https://www.youtube.com/playlist?list=PLQnz7cz0EDBZ480Pa_oFRLh_oerr9q2ia**.

Le vignette sono tratte dalla storia *Paperino e i ponti di Quackenberg* (soggetto di Alberto Saracco e Francesco Artibani, autore anche della sceneggiatura, disegni di Marco Mazzarello) pubblicata su Topolino n. 3232 - ©Disney - e appaiono qui per gentile concessione dell'editore (Editore PANINI SpA).

La vignetta iniziale della storia Paperino e i ponti di Quackenberg tratta da Topolino n. 3232, storia che racconta, nei modi consueti per la Disney, il problema dei sette ponti di Königsberg (Editore PANINI SpA). ©Disney

Quattro passi in centro

Grafi, cammini, percorsi

1. Un'introduzione alla teoria dei grafi

Questo laboratorio prende spunto da un'attività proposta dal Giardino di Archimede di Firenze e dal libro Alla ricerca della via più breve di Peter Gritzmann e Rene Brandenberg edito da Springer.

Nel 1736 Leonhard Euler (matematico svizzero conosciuto in Italia come Eulero), a ventinove anni, risolse il problema dei sette ponti di Königsberg (di cui parleremo più avanti) e, contestualmente, diede l'avvio a una nuova branca della matematica: la teoria dei grafi confluita successivamente nella topologia.

La topologia è, allo stato attuale, uno dei rami più importanti, e anche appassionanti, della matematica. Si tratta, in parole semplici, di un nuovo approccio alla geometria in quanto si prefigge di studiare le proprietà delle figure che non dipendono (le proprietà) dalle trasformazioni a cui sono sottoposte (le figure), purchè queste trasformazioni non provochino strappi o sovrapposizioni. In pratica, semplificando ancora, una geometria che studia le proprietà delle figure senza far ricorso a nessun tipo di misura!

IL GIARDINO DI ARCHIMEDE
UN MUSEO PER LA MATEMATICA
www.archimede.ms

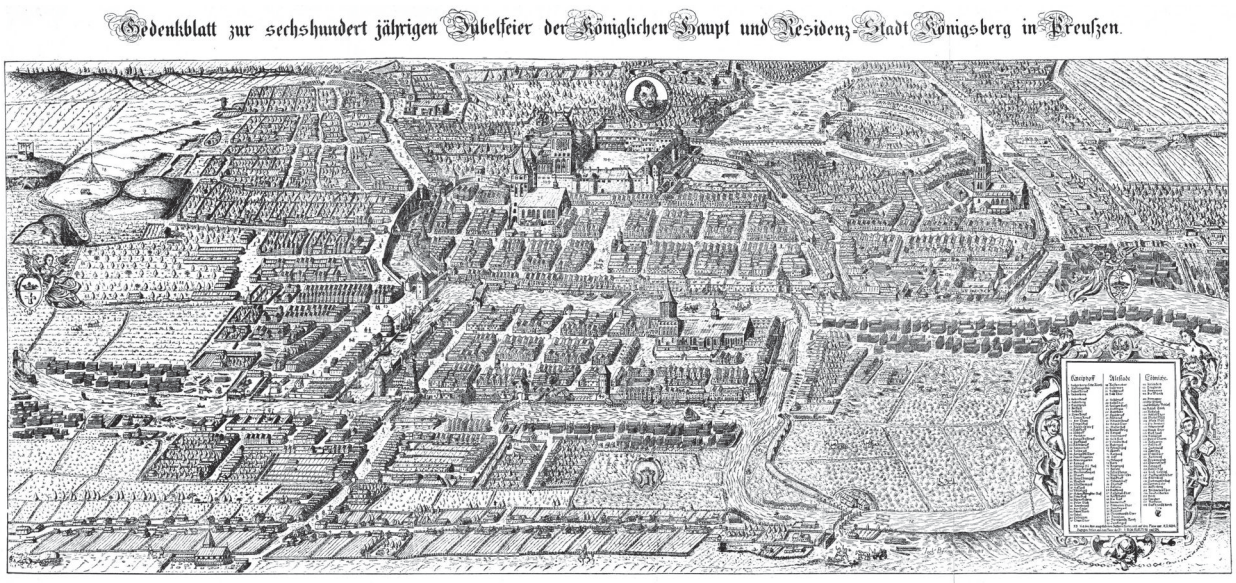
Il Giardino di Archimede di Firenze, un museo per la matematica: http://web.math.unifi.it/archimede/

La teoria dei grafi è allo stesso tempo parte della topologia e chiaro esempio di questa. I grafi trovano applicazione in una varietà di situazioni reali, aiutano a costruire modelli delle situazioni più disparate e permettono di trovare soluzioni a problemi altrimenti impossibili e facilitano la costruzione di procedure e la scoperta di algoritmi. Non a caso è un campo della matematica che, pur essendo nato nel XVIII secolo, è *esploso* con l'avvento dei calcolatori e del calcolo automatico.

Un corso introduttivo, rigoroso e formale, sulla teoria dei grafi, può essere consultato online qui: http://web.math.unifi.it/users/casolo/dispense/Teoria_Grafi.pdf opera di Carlo Casolo e Francesco Fumagalli, dipartimento di matematica Ulisse Dini, Università degli studi di Firenze

Questo laboratorio e i gli altri dedicati allo stesso argomento vogliono guidare il lettore (lo sperimentatore) attraverso questa teoria con l'obiettivo di ri-scoprire alcuni risultati fondamentali affrontando semplici problemi concreti. In particolare esamineremo il problema dei *sette ponti di Königsberg* già citato e alcuni problemi di ottimizzazione come la ricerca della via più breve, più economica, più rapida, tra il punto di partenza e la destinazione. Problemi come quello del commesso viaggiatore, del postino cinese e altri ancora non avranno più segreti!

Una curiosità. Su Topolino n. 3232 è stata pubblicata una bella storia - *Paperino e i Ponti di Quackenberg* - che affronta, in modo scherzoso ma preciso, il problema che, quasi per caso, ha pro-



La mappa della città di Königsberg nel 1613, opera di Bering. Si vedono abbastanza chiaramente le due isole create dal fiume Pregel e i sette ponti che hanno dato il nome al problema.

vocato la nascita della teoria dei grafi e della topologia.

Nella storia Paperino e i ponti di Quackenberg è Pico de Paperis che veste i panni di Leonhard Euler e, dopo aver studiato il problema, si rende conto che si tratta sicuramente di un problema di geometria ma diverso dai soliti, che richiede un approccio del tutto nuovo.
La vignetta mostrata in questa pagina è tratta da Topolino n. 3232 (Editore PANINI SpA). ©Disney

1.1. Prerequisiti

Per questo laboratorio, in pratica, non ci sono prerequisiti, è possibile seguire il percorso con le basilari conoscenze di algebra.

1.2. Obiettivi

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. Introduzione alla topologia a pagina 20)

Lo scopo di questo laboratorio è quello di costruire un modello e risolvere (usando il modello realizzato) alcuni problemi classici di teoria dei grafi. In particolare il problema dei sette ponti di Königsberg.

Note

Probabilmente ci sono più esempi e problemi intermedi di quanto in realtà sia necessario ma il percorso proposto, un paio di volte, chiede al lettore/studente se ha già chiara la situazione e se riesce a intravedere una possibile strada verso la soluzione. Nel caso la risposta sia affermativa, il testo invita a *saltare* il/i paragrafi successivi per andare direttamente alle conclusioni.

Il laboratorio è stato proposto, in via sperimentale, a una classe seconda del liceo G.B. Grassi di Latina nel gennaio del 2019 in un'attività che ha visto studentesse e studenti (divisi in gruppi di quattro) lavorare in modo completamente autonomo impegnandoli per circa tre ore di lavoro (conclusioni dell'insegnante comprese).

Questo laboratorio è il passo iniziale di un percorso che proseguirà con i fascicoli Un grafo connesso e Un problema di consegne.
Tutti insieme affrontano il problema del Postino cinese, un famoso argomento della teoria dei grafi, la cui strategia risolutiva è abbastanza articolata.
La figura qui accanto mostra i primi due passi del percorso da fare, passi che saranno discussi in questo laboratorio.

2. Il problema dei ponti di Königsberg

Nella pagina 5, che dovreste aver appena letto, è mostrata una mappa della città di Königsberg (opera di Bering, 1613), antica capitale dello stato di Prussia governato dai cavalieri dell'Ordine Teutonico e oggi situata in un *enclave* russa tra Polonia e Lituania. Il centro abitato fu quasi interamente distrutto nelle fasi finali della Seconda guerra mondiale e quel poco che non fu distrutto dai bombardamenti fu demolito negli anni sessanta dalla furia sovietica, ansiosa di cancellare ogni ricordo della presenza germanica. Anche il nome non è più lo stesso, dalla fine della guerra la città si chiama Kaliningrad.

La città è ancora oggi attraversata dal fiume Pregel che, con i suoi rami e meandri, forma due isole proprio nel centro di quella che era la città vecchia e divide il centro abitato grossomodo in due metà, tagliandolo da est a ovest. Le due isole all'epoca della storia che stiamo raccontando (XVIII secolo) erano collegate tra loro e con le porzioni settentrionale e meridionale mediante sette ponti. Nella figura in questa pagina, le quattro zone in cui è suddivisa la città dal fiume Pregel sono evidenziate in colore azzurro e sono anche mostrate (in modo più chiaro di quanto si possa dedurre dall'originale) le posizioni dei sette ponti.

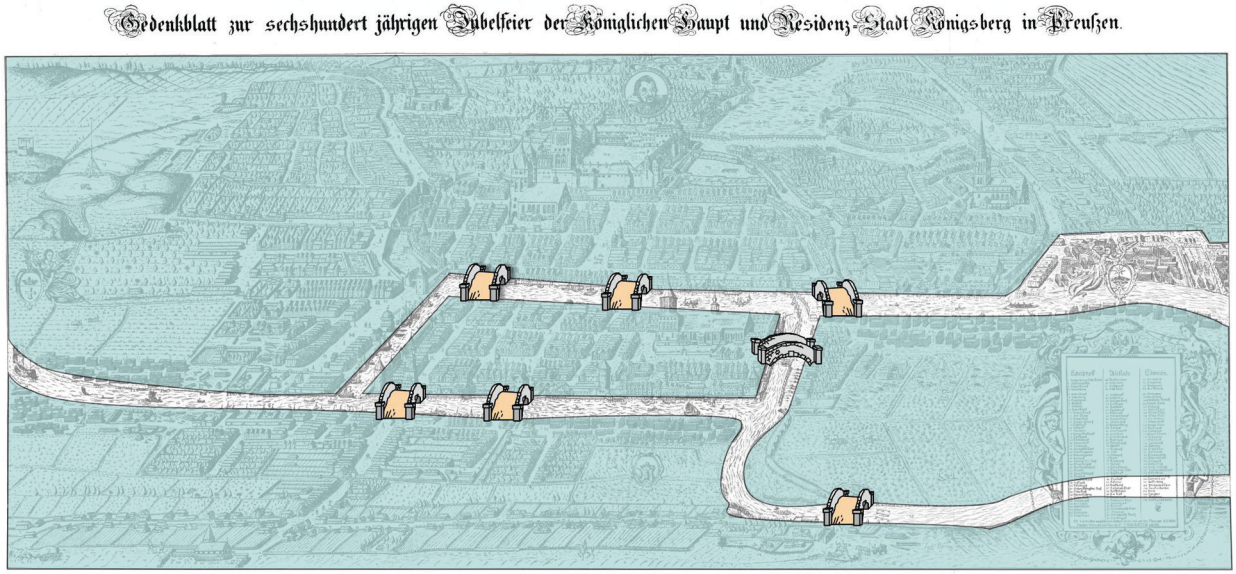
Il problema è piuttosto semplice da enunciare: è possibile percorrere il centro di Königsberg attraversando tutti i sette ponti ma in modo da passare su ciascuno di essi una e una sola volta?

Prova a risolvere il problema. Traccia una linea continua, un percorso, che attraversi tutti i sette ponti ma avendo cura di passare per ogni ponte una sola volta.

È naturalmente possibile attraversare ogni zona della città più volte, il limite di una sola volta vale solo per i ponti.

Se hai già trovato la soluzione, non hai bisogno di affrontare questo laboratorio. In caso contrario, proviamo insieme a cercare una risposta al problema. Il problema è più difficile di quanto possa sembrare a un osservatore superficiale per cui, se dopo qualche minuto non hai trovato la risposta, continua a leggere questo fascicolo, ti aiuterà a risolvere il dilemma dei ponti di Königsberg. La strada da percorrere per giungere alla soluzione richiederà alcune interessanti deviazioni.

Come già preannunciato nell'introduzione, il problema dei ponti di Königsberg e la soluzione proposta nel 1736 da Leonhard Euler hanno portato i matematici a immaginare una nuova struttura, tutt'ora utile e utilizzata: i *grafi*. Nel seguito proporremo alcuni semplici problemi che ti aiuteranno a familiarizzare con i grafi.



3. Un'introduzione ai grafi

3.1. Un problema semplice

La figura in questa pagina, sulla sinistra, mostra il semplice disegno di una casetta, un po' come potrebbe essere disegnata da una bambina o da un bambino all'inizio del loro percorso scolastico. Abbiamo evidenziato i vertici dei segmenti con piccoli cerchi azzurri.

Prova a tracciare il disegno con un unico tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare due volte sullo stesso segmento (in pratica ogni segmento deve essere tracciato una volta sola).

Puoi usare la parte destra della stessa figura, in cui, per tua comodità, abbiamo riportato i cinque vertici del disegno. Una volta trovata la soluzione, contrassegna in qualche modo il punto di partenza e quello di arrivo del tratto di penna con cui hai tracciato il disegno.

Sono possibili altre soluzioni? In altre parole, è possibile tracciare il disegno con un unico tratto in modo diverso? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale? Se si cambia il punto iniziale, come cambia il punto finale del percorso?

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. Introduzione alla topologia a pagina 20)

Anche in caso di nuove soluzioni, contrassegna il punto iniziale e quello finale del percorso. Prenditi il tempo necessario per provare più volte, più grande sarà il numero di soluzioni diverse, più facile giungere a una conclusione soddisfacente!

Il problema, rispetto a quello dei ponti di Königsberg proposto in precedenza, appare molto facile, volutamente facile. Infatti lo scopo non è tanto quello di risolvere questo problema, quanto cercare di comprendere *che cosa c'è sotto*, di scoprire caratteristiche generali che potrebbero aiutare a risolvere problemi più complessi. La semplicità in questo caso è utile perchè permette di concentrare l'attenzione su alcuni aspetti che altrimenti sarebbero nascosti dalla complessità del problema.

In breve: non cerchiamo tanto di trovare una soluzione quanto piuttosto di capire quante sono e come sono fatte le possibili soluzioni!

Un poco di teoria

In matematica un grafo è un insieme di punti (detti nodi o vertici) collegati da linee, non necessariamente segmenti di retta, chiamati archi o lati o, ancora, spigoli del grafo. Gli archi che partono o raggiungono un nodo sono detti incidenti il nodo in questione. La casetta è proprio un esempio di grafo!

3.2. Un altro problema semplice

In questa pagina è mostrato un altro disegno, una casetta un po' più complessa della precedente. Anche in questo caso abbiamo evidenziato i vertici con dei piccoli cerchi (in colore arancione questa volta). Si capisce immediatamente che si tratta di un altro esempio di grafo, con cinque nodi e otto archi.

Prova di nuovo a tracciare il disegno con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso segmento (arco).

Evidenzia sempre il punto di partenza e quello finale del tratto di penna con cui hai tracciato il disegno (l'inizio e la fine del percorso individuato sul grafo).

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. Introduzione alla topologia a pagina 20)

Di nuovo … Sono possibili altre soluzioni? In altre parole, è possibile tracciare il disegno con un unico tratto in modo diverso? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale? E ancora, cambiando il nodo iniziale, come cambia quello finale?

Anche per queste soluzioni differenti, evidenzia in qualche modo il punto iniziale del tracciato.

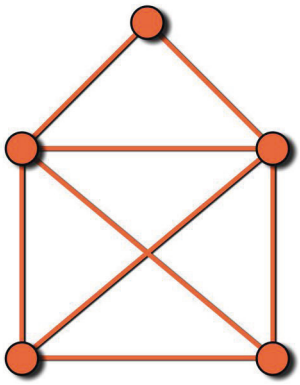
Ancora una volta, è bene notare che la semplicità del problema non deve ingannare. Non siamo tanto interessati a una singola soluzione ma vogliamo comprendere quando questa soluzione c'è (e quindi anche quando non c'è). La matematica a volte è strana, problemi semplici, se analizzati attentamente, possono condurre a conclusioni inaspettate!

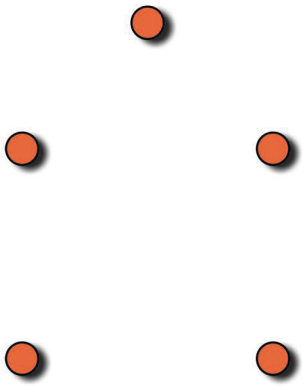
Sarebbe bene comparare tra loro le varie soluzioni trovate cercando somiglianze e/o differenze.

Ancora un poco di teoria

In un grafo una successione di nodi o vertici collegati ciascuno con il successivo per mezzo di un arco, è chiamata un cammino, gli archi devono essere tutti diversi (attenzione: la definizione non richiede invece che i nodi siano distinti). Il cammino si dice semplice se i nodi sono tutti diversi tra loro tranne eventualmente il primo e l'ultimo (in questo caso il cammino non deve ripassare per lo stesso vertice due o più volte). Se il primo e l'ultimo vertice coincidono abbiamo un circuito. Un circuito semplice (i nodi sono tutti diversi) non banale (composto da almeno tre archi) è spesso chiamato ciclo.

Infine, un cammino è euleriano (eh, sì … prende proprio il nome da Leonhard Euler) se percorre tutti gli archi del grafo. In altre parole, in entrambi i problemi che abbiamo affrontato ci è stato chiesto di determinare un cammino euleriano.





3.3. Una terna di problemi

In questa pagina proponiamo tre problemi tutti insieme. Abbiamo ancora il disegno di una casetta o meglio, un grafo, con un paio di archi in più e un paio di *buste per lettera*. Un paio di questi disegni probabilmente richiederanno un po' di tempo in più.

Prova ancora a tracciare il disegno della nuova casetta con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso arco. È possibile?

In altre parole, determina un cammino euleriano nel grafo se possibile.

Perchè questa volta la situazione è così diversa? Cosa c'è di differente, sostanzialmente differente, tra questo grafo e i due precedenti (le due casette proposte nelle pagine prima di questa)?

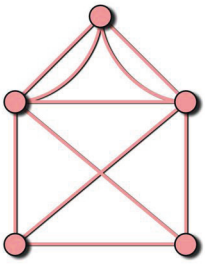
Ancora una volta, un suggerimento. Concentra l'attenzione sul grado dei nodi, sul numero di archi che incidono ogni vertice del disegno. Torna anche ai disegni precedenti e confronta le situazioni che hai affrontato tra di loro.

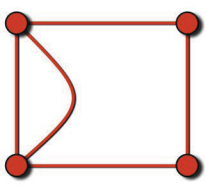
Ora prova a tracciare il disegno delle due buste da lettera, sempre senza staccare la penna dal foglio e senza ripassare due volte sullo stesso tratto.

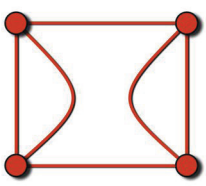
Pur essendo a prima vista molto simili, i due disegni sono fondamentalmente diversi, uno di essi è molto semplice da risolvere, l'altro invece sembra essere irrisolvibile. Si ha l'impressione che si ripresenti la stessa situazione, le stesse diversità, che abbiamo trovato nei disegni delle casette. Se questa differenza ti è già chiara, puoi saltare il paragrafo successivo **(3.4 Tutto da capo a pagina 11)**, in caso contrario non ti preoccupare, ci arriveremo!

Può succedere che uno o più di questi problemi siano irrisolvibili? È sufficiente, per affermare che il problema non si può risolvere, aver provato un certo numero di volte? Sei sicuro di aver fatto tutti i tentativi possibili? Quanti sono i possibili percorsi che si possono provare?

Rispondere a queste ultime domande non è essenziale per la prosecuzione del discorso ma dovresti aver capito che il numero di possibili percorsi da provare, anche per soli quattro nodi e 6 archi (ci stiamo riferendo alla seconda busta da lettere) diventa immediatamente molto grande.







3.4. Tutto da capo

Se le proprietà comuni ai problemi che hai affrontato sino a ora ti sono evidenti, puoi tralasciare questo paragrafo e passare direttamente al successivo **(3.5 Generalizziamo a pagina 12)**. Con *evidenti* intendiamo dire che, osservando un grafo, un problema simile a questi proposti, *si è in grado di capire, senza necessariamente provare, se somiglia di più alle casette proposte nelle pagine 8 e 9 o all'ultima casetta che hai trovato a pagina 10.*

Nella figura che trovi in fondo alla pagina, ti proponiamo una nuova serie di problemi, simili ai precedenti. Questa volta si tratta di disegnare uno o più *fiori*, in modo analogo a quanto fatto finora, nella figura riportata in fondo alla pagina sono mostrati tre grafi, tutte varianti dello stesso disegno. I tre grafi sono piuttosto simili, in quanto il secondo e il terzo ripetono due e tre volte rispettivamente la figura che si ottiene dal primo.

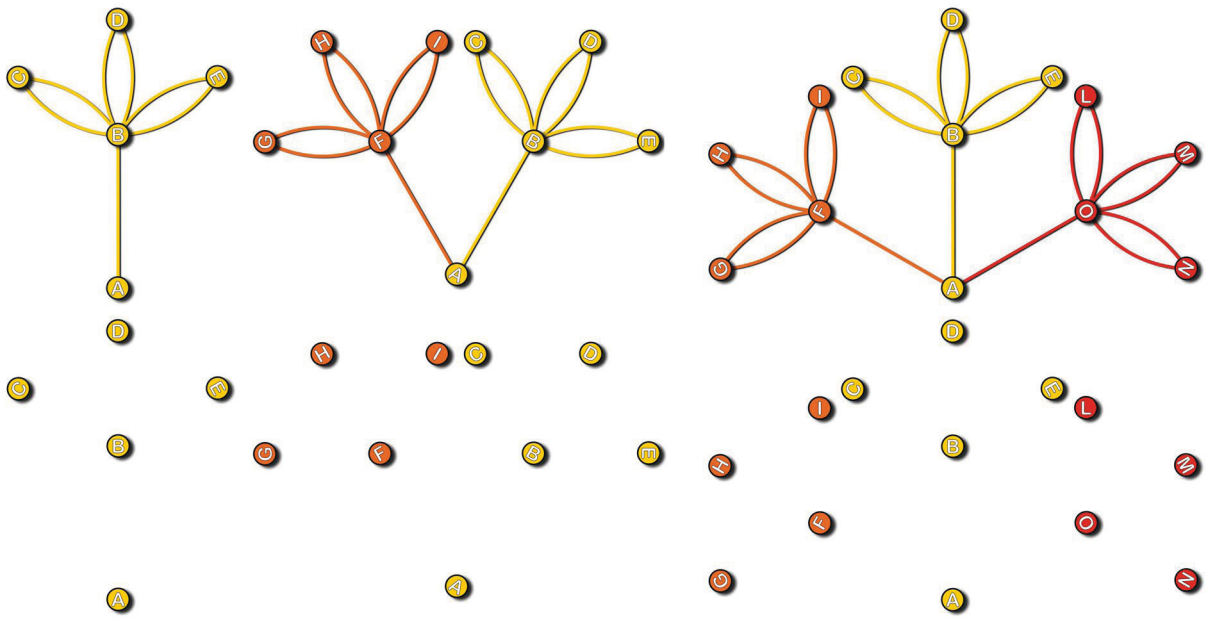
Per ciascun problema proposto cerca di tracciare il disegno con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso arco. In caso di soluzione positiva (sei riuscito a tracciare il percorso) evidenzia in qualche modo il nodo di partenza. Ci sono altre possibili soluzioni? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale?

In modo più formale, ti viene chiesto di determinare un cammino euleriano in ciascuno dei tre grafi. Per i tuoi tentativi puoi usare lo spazio nella pagina appena sotto i tre disegni, in cui abbiamo riportato i vertici dei corrispondenti grafi.

Anche per questi problemi, contrassegna il punto iniziale e quello finale del cammino trovato. Prova a concentrare l'attenzione proprio su questi nodi particolari ...

Per ciascun disegno hai trovato una soluzione? Per i grafi in cui hai trovato un cammino euleriano (cioè una soluzione, un disegno con un unico tratto senza passare più di una volta su ciascun arco), ci sono altre soluzioni (cammini euleriani differenti)? Con lo stesso punto iniziale e finale?

Probabilmente, se ritorni con attenzione sulle soluzioni trovate, dovresti notare alcune regolarità, alcune proprietà, che si ripetono in presenza di un cammino euleriano ma che non si presentano quando il problema, invece, non è risolvibile. In modo particolare, concentra l'attenzione sul grado dei nodi: di quelli che sono punti iniziali e finali di un cammino e di quelli, invece, che possono essere solo nodi *di transito*.



3.5. Generalizziamo

Cerchiamo ora di generalizzare allo scopo di determinare una regola, un principio, un metodo, che ci permetta di decidere se e quando è possibile risolvere il problema di individuare un cammino euleriano in un grafo (un percorso che percorra per tutti gli archi di un grafo senza passare due volte sullo stesso arco). Per quanto introdotto in modo semplice e un po' scherzoso, si tratta di un problema che ha immediate applicazioni pratiche. Per esempio, il grafo potrebbe rappresentare la mappa di una città o di un quartiere (gli archi sono le strade, i nodi gli incroci) e si vuole determinare il percorso più economico per raccogliere i rifiuti con un solo mezzo raccoglitore: è ovvio che il percorso più economico è quello che passa per ciascuna strada (per ogni arco) una e una sola volta.

Osserva i grafi che abbiamo proposto e affrontato. Qual è la differenza tra i grafi che hanno soluzione (hanno un cammino euleriano) e quelli che non possiedono questa proprietà (non hanno un cammino euleriano)? Per i grafi in cui sei riuscito a costruire un cammino euleriano, che proprietà hanno i nodi in cui inizia il cammino? E che proprietà hanno i nodi in cui il cammino termina?

Un suggerimento: prova a ragionare sul numero di archi che partono o che raggiungono i nodi. Osserva in modo particolare i nodi iniziali e finali dei cammini che hai trovato. Potrebbe essere una buona idea scrivere il numero di archi che incidono ogni nodo accanto al nodo stesso.

Dovresti aver capito che se un grafo ha una certa proprietà allora è sempre possibile tracciare un cammino euleriano. È vero anche il viceversa, se è possibile tracciare un cammino euleriano, allora il grafico ha quella stessa proprietà? Cerca di spiegare il perché in modo quanto più formale possibile.

A questo punto cerca di esporre le tue conclusioni in modo quanto più formale possibile, con una frase del tipo

se il grafo ha una certa proprietà allora *è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo*

Oppure qualcosa di simile a questo:

è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo se e solo se *il grafo ha una certa proprietà*

Prova a esporre la spiegazione in modo formale e rigoroso, magari suddividendola in passi suc-

cessivi in modo che ogni passo sia chiaro e non ambiguo. Per questo lavoro di *raffinamento* puoi usare il foglio a righe che trovi in fondo alla pagina precedente.

Se sei riuscito a rispondere, hai appena enunciato (e forse dimostrato) uno dei due teoremi di Leonhard Euler, quello che riguarda i cammini euleriani! Entrambi i teoremi furono scoperti e formulati in seguito al problema dei ponti di Königsberg.

Un caso particolare

Ora un ultimo problema. In basso, in questa stessa pagina, si trova un ultimo grafo (che potrebbe rappresentare una balena), la richiesta è ancora una volta la stessa ...

È possibile determinare un cammino euleriano nel grafo in figura? Da quale nodo è possibile iniziare il cammino?

Si tratta, evidentemente, di un caso un po' speciale. Si può applicare il teorema che hai appena formulato a questo grafo? Si può riformulare il teorema scoperto in modo da comprendere anche questo caso?

Può essere utile indicare, nella figura, il grado di ciascun nodo accanto al punto (cerchietto) che lo rappresenta.

Rispetto a tutti i casi precedenti, cosa contraddistingue questo grafo.

Come suggerito in precedenza, concentra l'attenzione sul grado dei nodi di questo grafo. Analizza le differenze tra questo grafo e tutti i precedenti, differenze che riguardano proprio questa caratteristica (il grado dei vertici del grafo).

Adesso ancora una pillola di teoria: un circuito si dice euleriano se percorre tutti tutti gli archi del grafo (una sola volta).

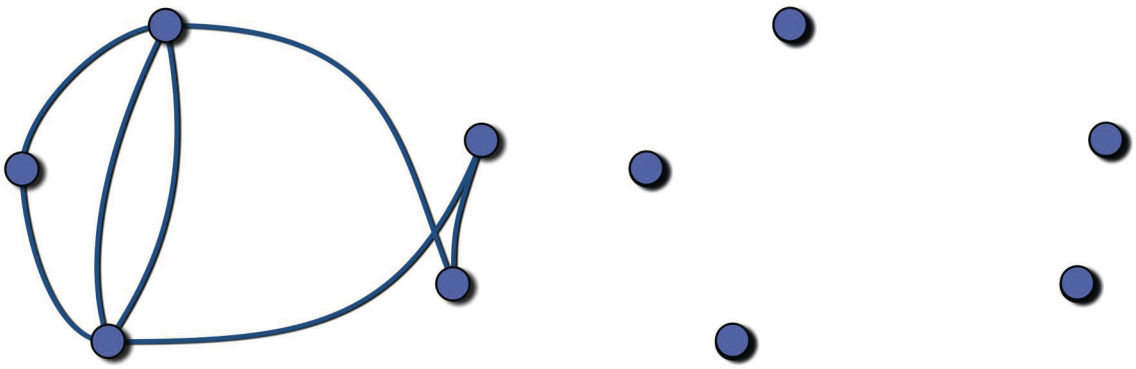
È possibile costruire un circuito euleriano in questo ultimo grafo proposto?

In altre parole, partire da un nodo e tornarci dopo aver percorso ogni arco una sola volta.

A questo punto possiamo riformulare il teorema in modo che stabilisca, con un unico enunciato, le condizioni per cui in un grafo è possibile costruire un cammino euleriano e quando, invece, un circuito euleriano.

Se necessario, correggi quanto scritto in precedenza.

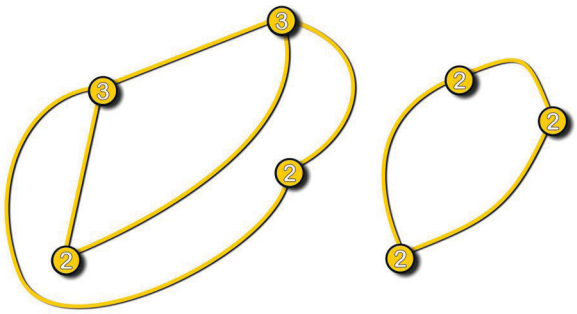
Se ci sei riuscito: complimenti, gran bel lavoro!



3.6. Un altro caso particolare

Il Toolbox: http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf fornisce alcuni concetti fondamentali su grafi, cammini e circuiti (cfr. Introduzione alla topologia a pagina 20)

C'è un'altra situazione da analizzare, un esempio di tale situazione è mostrata nella figura qui accanto in cui abbiamo anche indicato il grado, la valenza, di ogni vertice. Bada bene, si tratta di un unico grafo! Infatti la definizione di grafo (vedi il Toolbox - **http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf**, il fascicolo di questo progetto che introduce gli argomenti di matematica che sono necessari per i laboratori) non richiede che ci siano collegamenti tali da permettere di *andare* da un qualsiasi nodo a qualunque altro nodo.



Il grafo che proponiamo qui soddisfa le ipotesi del terorema che abbiamo formulato nelle pagine precedenti?

Ricorda, le ipotesi del teorema (le condizioni per cui il teorema si può applicare e che garantiscono la validità della tesi) sono riportate all'inizio dell'enunciato del teorema stesso dopo la parola *se* o prima/dopo le parole *se e solo se* (a seconda di come è stato enunciato il teorema).

Qualche parola in più per quanto riguarda le ipotesi di un teorema. Per chiarezza facciamo un esempio che dovrebbe essere noto un po' a tutti.
Esiste un teorema di geometria il cui enunciato è: *se un triangolo è isoscele allora i due angoli alla base sono uguali*. In questo teorema l'unica ipotesi è: *il triangolo è isoscele*.
In realtà esiste un secondo teorema che riguarda i triangoli isosceli (e che comprende il precedente: *un triangolo è isoscele se e solo se gli angoli alla base sono uguali*. In questo caso si intende che *se il triangolo è iscoscele allora gli angoli alla base sono uguali* ma anche che *se gli angoli alla base sono uguali allora il triangolo è isoscele*. Quindi, a seconda di come lo si legge, la prima frase funge da ipotesi in un caso e da tesi nel secondo caso.

È possibile costruire un cammino euleriano (un percorso che attraversi tutti gli archi una e una sola volta) nel grafo proposto? Trovi una contraddizione? Le conclusioni del teorema, verificata la correttezza delle ipotesi, si possono applicare in questo caso?

La risposta dovrebbe essere piuttosto semplice, quasi immediata!

Aggiungiamo un'altra definizione della teoria dei grafi. Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che collega i due nodi in questione.

Il grafo che stiamo esaminando è connesso?

Anche in questo caso la risposta dovrebbe essere ovvia.

Riformula (è l'ultima volta) il teorema che abbiamo elaborato in questa prima parte del laboratorio perchè tenga conto di casi particolari come questo.

4. I ponti di Königsberg

A questo punto dovremmo avere un teorema che ci consente, con poche semplici operazioni, di determinare se è possibile costruire un cammino euleriano in un grafo. Ma questo teorema, come ci può aiutare a risolvere il problema dei ponti di Königsberg?

Ricordiamo qui per comodità il problema già proposto in precedenza: è possibile percorrere il centro di Königsberg attraversando tutti i sette ponti ma in modo da passare su ciascuno di essi una e una sola volta?

Alla luce di quanto fatto fino a ora, prova a costruire un *modello* per il problema dei ponti di Königsberg: rappresenta la situazione utilizzando solo punti e linee (archi) tra un punto e l'altro. È evidente che il problema riguarda le zone della città e i ponti che attraversano il fiume, cosa è meglio rappresentare con punti e cosa con linee?

Un modello è una rappresentazione di una situazione, di un fenomeno. Per costruire un modello certi particolari vengono rimossi e vengono introdotte delle semplificazioni. In altre parole, si definisce modello una versione semplificata della porzione di mondo da studiare allo scopo di facilitare lo studio del fenomeno reale In un modello si tengono in considerazione solo gli aspetti del fenomeno che si intendono analizzare in modo da facilitare la ricerca di una soluzione del problema che abbiamo davanti.

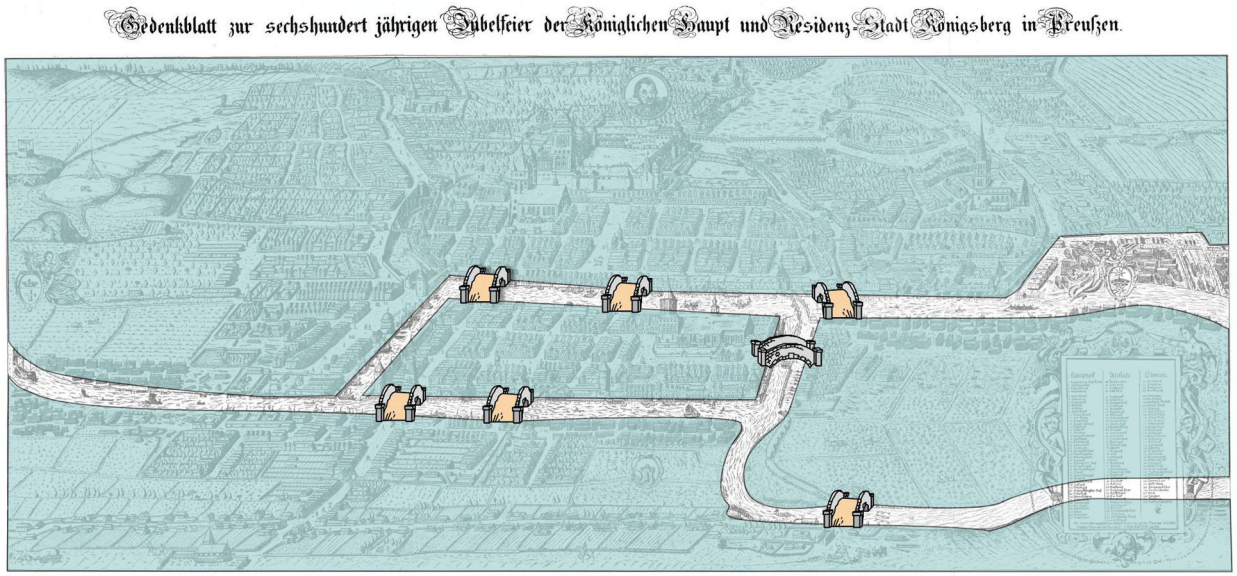
Si tratta di rappresentare la situazione eliminando tutte le informazioni inutili. Per esempio, quanto conta per la nostra soluzione la lunghezza dei ponti? O l'ampiezza delle zone della città da collegare? O, ancora, il fiume influisce davvero sulla soluzione o è più semplice considerare solo le aree e i collegamenti tra esse (i ponti) trascurando completamente l'esistenza del fiume?

Puoi usare la mappa di Königsberg che è mostrata in fondo alla pagina per costruire (sovrapporre) il modello alla mappa della città. Per aiutarti, in figura sono evidenziate in azzurro le aeree individuate dai rami del fiume Pregel mentre i ponti sono disegnati in modo più marcato.

A questo punto, se tutto è andato bene, abbiamo ridotto il problema dei sette ponti di Königsberg a un problema di topologia, a un problema sui grafi, del tutto simile a quelli già affrontati e su cui ormai siamo già *forti*.

Si può applicare il teorema che abbiamo formulato in precedenza a questo grafo? Con quali conclusioni?

La soluzione, ora, dovrebbe essere davvero facile. Il teorema che abbiamo scoperto è diventato uno strumento per risolvere il problema! Al termine di questo laboratorio dovrebbe essere chiaro il percorso che abbiamo suggerito. In particolare, i numerosi problemi (anche troppo) semplici proposti non erano fini a se stessi ma servivano a concentrare l'attenzione sulle caratteristiche peculiari del problema (in questo caso il grado dei nodi). Il problema dei ponti di Königsberg ora è semplice, davvero semplice!



16

5. Esercizi

5.1. La sfida di Zio Paperone

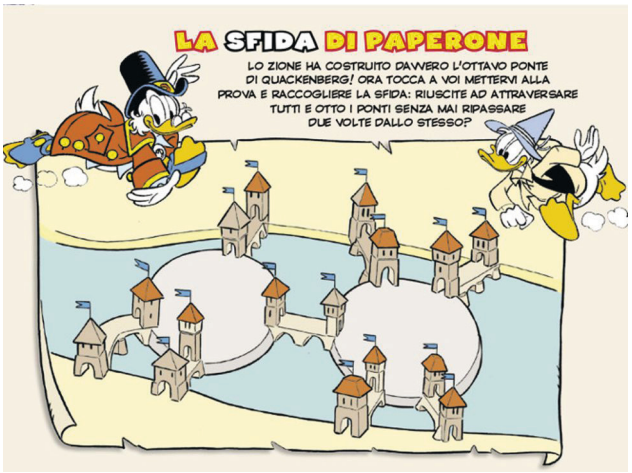
Tratto da *Paperino e i ponti di Quackenberg* (soggetto di Alberto Saracco e Francesco Artibani, autore anche della sceneggiatura, disegni di Marco Mazzarello) pubblicata su Topolino n. 3232 - ©Disney

Nella storia pubblicata su Topolino, è Pico de Paperis che veste i panni di Leonhard Euler e illustra alla famiglia dei paperi la soluzione. A quel punto Zio Paperone lancia una nuova sfida (introdotta già nel finale della storia): ha costruito un ottavo ponte, che collega l'isola più a sinistra con la parte della città posta nella parte bassa della figura.

Nella storia Paperino e i ponti di Quackenberg Zio Paperone, borgomastro di Quackenberg, costruisce un ottavo ponte e sfida Paperino, ma anche voi, a trovare, in questo nuovo caso, una soluzione.
La vignetta mostrata in questa pagina è tratta da Topolino n. 3232 (Editore PANINI SpA). ©Disney

» Con un ponte in più, come si vede nella figura qui di seguito, è possibile risolvere il problema: fare una passeggiata per la cittadina di Quackenberg attraversando tutti gli otto ponti una volta sola? In altre parole, il grafo possiede un cammino euleriano?

» Si può fare a Quackenberg (con questo ottavo ponte) una passeggiata che attraversi tutti i ponti una sola volta tornando poi al punto di partenza? Di nuovo, con parole differenti, il grafo possiede un circuito euleriano?



Per chiarezza, la Quackenberg immaginata dagli autori somiglia molto alla Königsberg di Euler ma è disegnata in modo che il nord sia verso il basso della figura e l'est verso sinistra mentre la mappa di Königsberg opera di Bering, che abbiamo usato nel laboratorio, ha come di consueto il nord verso l'alto e l'est verso destra.

5.2. I quindici ponti di Parigi

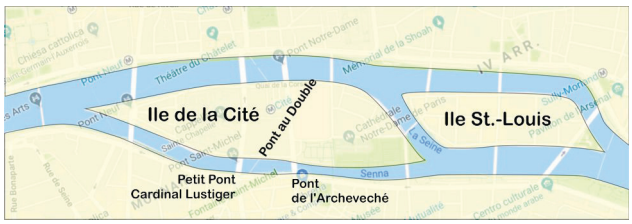
Tratto da Bertolini, M., Bini, G., Cereda, P. – *Grafi e superfici, quaderno laboratorio di matematica* – in *Simmetria, giochi di specchi, una mostra interattiva di matematica* (**specchi.mat.unimi.it/**)

La Senna, attraversando Parigi, crea la *Ile de la Cité* (l'isola più a sinistra nella figura qui di seguito) e la *Ile Saint-Louis*, la prima è conosciuta anche come *Ile de Notre-Dame de Paris* dal nome della cattedrale che sorge sull'isola.

La *Ile de la Cité* è collegata per mezzo di quattro ponti alla zona nord di Parigi, da altrettanti alla zona sud e dal solo *Pont de Saint-Louis* all'isola che porta lo stesso nome (quella sulla destra). Poco più a valle (a sinistra in figura) c'è il *Pont des Arts* che attraversa il fiume collegando direttamente la zona nord con quella sud della città. La Ile de St.-Louis è collegata con il resto della città a nord da tre ponti, a sud da altri due.

» Si può progettare una passeggiata che, attraversando tutti i ponti una e una sola volta, permetta poi di tornare al punto di partenza? E una camminata che attraversi tutti i ponti una e una sola volta, senza il vincolo di tornare al punto di partenza?

Dal sito researchinaction.it è possibile scaricare un documento xMaxima per generare grafi casuali con cui esercitarsi: xMaxima si può scaricare qui: maxima.sourceforge.net/



» Abbiamo trascurato l'attraversamento pedonale del *Pont au Double* che porta dal *Quai de Montebello*, a sud della Senna, alla *Promenade Maurice Careme* sulla *Ile de la Cité* situato tra il *Petit Pont Cardinal Lustiger* e il *Pont de l'Archeveché*. Aggiungendo questo ponte pe-

donale al nostro percorso, riusciamo a fare una passeggiata attraversando tutti i ponti una sola volta tornando al punto di partenza?

5.3. Il torneo di volley

Si deve organizzare un torneo di volley a cui parteciperanno otto squadre. Ogni squadra deve affrontare tutte le altre squadre una sola volta in quello che, in gergo, è detto *girone all'italiana*. Rappresenta la situazione con un grafo, siamo ovviamente interessati a rappresentare le squadre e le partite. Quante sono le partite? Che caratteristica ha il grafo realizzato?

La rappresentazione che abbiamo costruito ci può aiutare a contare le partite se le squadre sono *tante* o *tantissime*? Per esempio, per 48 squadre, quante sono le partite? E se le squadre sono n, quante sono le partite?

Un poco di teoria 3

Un grafo si dice completo se ogni nodo è collegato a ogni altro nodo. In modo formale un grafo è completo se per ogni coppia di nodi esiste un arco che collega i due nodi.

5.4. Il torneo di squash

Questa volta organizziamo un torneo *a eliminazione diretta*: a ogni turno i giocatori si affrontano a due a due e il perdente è eliminato, i vincenti si affrontano di nuovo a due a due, ... Rappresenta la situazione con un grafo, forse questa volta dovremo costruire una rappresentazione *temporale* della situazione, che tenga conto dei turni necessari per arrivare alla finale. Se i giocatori partecipanti sono 16, quante partite sono necessarie per decidere il vincitore (compresa la finale)? Quante partite giocano i due finalisti?

La rappresentazione che abbiamo costruito ci può aiutare a contare le partite se i giocatori sono *tanti* o *tantissimi*? Per esempio, se i partecipanti sono 64, quante sono le partite e quante partite giocano i finalisti? E se i partecipanti sono n, quante sono le partite e quante partite giocano i finalisti?

Un poco di teoria 4

Un grafo connesso e privo di circuiti non banali è detto albero.

Per gli esercizi, se vuoi, puoi usare le pagine quadrettate che trovi immediatamente dopo e immediatamente prima di questo paragrafo/pagina.

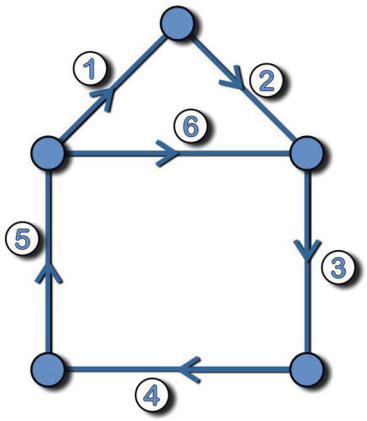
19

6. Un'introduzione alla teoria dei grafi

6.1. Un problema semplice

Prova a tracciare il disegno con un unico tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare due volte sullo stesso segmento (in pratica ogni segmento deve essere tracciato una volta sola).

È possibile risolvere il problema (tracciare il disegno con un unico tratto di penna senza mai ripassare su un segmento già tracciato). Nella figura qui accanto è mostrata una possibile soluzione, gli archi che congiungono i nodo sono numerati. Nella soluzione che proponiamo abbiamo scelto di partire dal vertice in alto a sinistra, il tracciato si conclude nel nodo in alto a destra.



Sono possibili altre soluzioni? In altre parole, è possibile tracciare il disegno con un unico tratto in modo diverso? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale? Se si cambia il punto iniziale, come cambia il punto finale del percorso?

Appare chiaro che se esiste una soluzione che va dal nodo *A* al nodo *B* allora ne deve esistere un'altra che però va dal nodo *B* al nodo *A*.
Infatti basta percorrere in senso inverso tutti gli archi della prima soluzione, partendo dall'ultimo via via fino al primo: in pratica la stessa passeggiata ma percorsa al contrario, come se tornassi indietro!

Innanzitutto è possibile la soluzione simmetrica: partire dal vertice in alto a destra e tracciare la *casetta* specularmente disegnando, nell'ordine, i lati 6, 5, 4, 3 , 2 e 1 tutti in verso opposto alla soluzione precedente. In questo caso, come si vede subito, il nodo iniziale e quello finale si scambiano i *ruoli*.

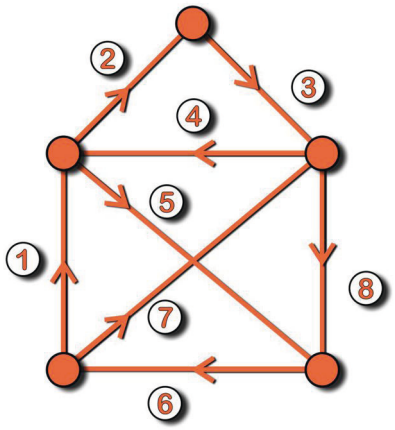
Si può scegliere, sempre partendo dai due nodi in alto a destra o in alto a sinistra, di disegnare prima la casa vera e propria e poi il tetto per esempio con la sequenza di segmenti 5, 4, 3, 6, 1, 2. Anche in questo caso esiste una soluzione simmetrica in cui il nodo iniziale e quello finale si

scambiano di posto.

Per quanti tentativi si facciano, invece, non si riesce a tracciare un percorso che parta da uno degli altri nodi (quelli alla base della casetta o quello in alto, al vertice del tetto).

6.2. Un altro problema semplice

Prova di nuovo a tracciare il disegno con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso segmento (arco).



Anche in questo caso si può rispondere positivamente. Un esempio è mostrato qui a destra in cui abbiamo scelto di iniziare dal nodo posto alla base, a sinistra, della casetta. I segmenti, gli archi, sono numerati in sequenza.

Di nuovo … Sono possibili altre soluzioni? In altre parole, è possibile tracciare il disegno con un unico tratto in modo diverso? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale? E ancora, cambiando il nodo iniziale, come cambia quello finale?

Anche in questo caso c'è una soluzione simmetrica iniziando il cammino dal nodo alla base sulla destra e anche in questo caso il nodo di partenza e quello di arrivo si scanbiano i ruoli. Sono possibili anche altri percorsi, per esempio disegnando i segmenti 1, 4, 3, 2, 5, 6, 7 e 8, ma si deve sempre iniziare da uno dei due nodi della base e finire nell'altro nodo della base.

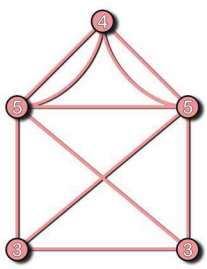
6.3. Una terna di problemi

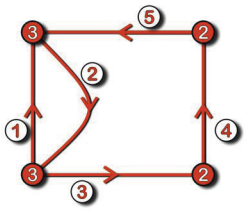
Prova ancora a tracciare il disegno della nuova casetta con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso arco. È possibile?

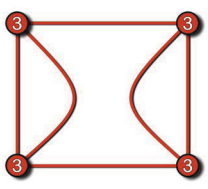
I problemi si fanno un po' più difficili. Per quanti tentativi si facciano sembra che la casetta non ammetta nessuna soluzione.

Perchè questa volta la situazione è così diversa? Cosa c'è di differente, sostanzialmente differente, tra questo grafo e i due precedenti (le due casette proposte nelle pagine prima di questa?

Se ci concentriamo sul grado dei vertici, come ci è stato chiesto, in particolare per i nodi di partenza e di arrivo dei percorsi, ci accorgiamo che nelle prime due casette si parte sempre da un vertice di grado dispari (3 per la prima, 5 per la seconda) e si conclude il cammino nell'altro nodo







con grado dispari mentre i nodi *attraversati*, quelli in cui *si entra e poi si esce*, hanno tutti valenza pari. Ma nella nostra casetta non ci sono nodi di grado pari, sono tutti dispari. Sarà questo il problema?

Ora prova a tracciare il disegno delle due buste da lettera, sempre senza staccare la penna dal foglio e senza ripassare due volte sullo stesso tratto.

Per la seconda busta non si riesce a trovare un cammino euleriano mentre per la prima questo cammino c'è ed è anche abbastanza semplice da trovare anzi, esistono più soluzioni, una tra quelle possibili è mostrata in basso nella pagina precedente (in cui gli archi sono numerati in sequenza, come di consueto, mentre sui nodi è riportato il grado). Anche in questo caso tutte le soluzioni partono da uno dei nodi sulla sinistra, quelli con grado 3, e terminano nell'altro. Si ripete una situazione già vista: dove la soluzione è possibile i nodi *attraversati* hanno grado pari, quelli di partenza e di arrivo hanno grado dispari. Nell'ultimo problema, la seconda busta da lettere, non ci sono nodi di valenza pari!

Può succedere che uno o più di questi problemi siano irrisolvibili? È sufficiente, per affermare che il problema non si può risolvere, aver provato un certo numero di volte? Sei sicuro di aver fatto tutti i tentativi possibili? Quanti sono i possibili percorsi che si possono provare?

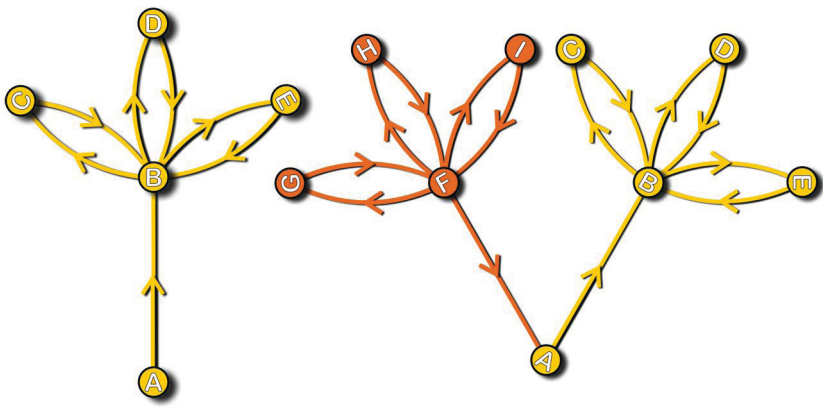
Non è proprio facile contare tutti i possibili cammini. Se iniziamo dal vertice in alto a sinistra: abbiamo tre possibili scelte, scegliendo il percorso che va al nodo in alto a destra poi abbiamo due scelte (che vanno a moltiplicare le prime due) che portano entrambe al nodo in basso a destra da cui abbiamo ancora due scelte: una riporta al nodo in alto a destra e si conclude così, l'altra porta al nodo in basso a sinistra da cui abbiamo ancora due scelte. Ogni volta dobbiamo moltiplicare per il numero di nuove possibilità. In totale, per questa prima via, abbiamo 24 percorsi possibili, passando per il nodo in basso a sinistra abbiamo $8x8 = 64$ percorsi per un totale di 1536. Ma non basta, altrettanto potremmo fare partendo da uno degli altri nodi (per simmetria) arrivando a numeri impressionanti.

6.4. Tutto da capo

Per ciascun problema proposto cerca di tracciare il disegno con un solo tratto, senza mai staccare la penna dal foglio e senza ripassare mai due volte sullo stesso arco. In caso di soluzione positiva (sei riuscito a tracciare il percorso) evidenzia in qualche modo il nodo di partenza. Ci sono altre possibili soluzioni? Con lo stesso punto iniziale o con un diverso punto iniziale?

La figura qui accanto mostra i primi due problemi relativi al disegno della balena. Nel primo è possibile determinare un cammino euleriano (per esempio iniziando dal nodo *A*, come mostrato in figura, oppure dal nodo *B*).

Nel secondo un cammino euleriano è di nuovo possibile risolvere il problema, partendo dal nodo *F* o dal nodo *B*, in ogni caso sono i due soli nodi da cui si può partire.



Per ciascun disegno hai trovato una soluzione? Per i grafi in cui hai trovato un cammino euleriano (cioè, una soluzione, un disegno con un unico tratto senza passare più di una volta su ciascun arco), ci sono altre soluzioni (cammini euleriani differenti)? Con lo stesso punto iniziale e finale?

Nei primi due disegni dei fiori si trovano cammini euleriani partendo da uno dei due vertici ma nel terzo problema non si riesce a completare il percorso. Osserviamo di nuovo una situazione già incontrata: si parte da nodi di grado dispari, i vertici attraversati hanno tutti grado pari, e si arriva sempre in un nodo di grado dispari.

Il terzo fiore è impossibile perchè ... ci sono troppi vertici di grado dispari!

6.5. Generalizziamo

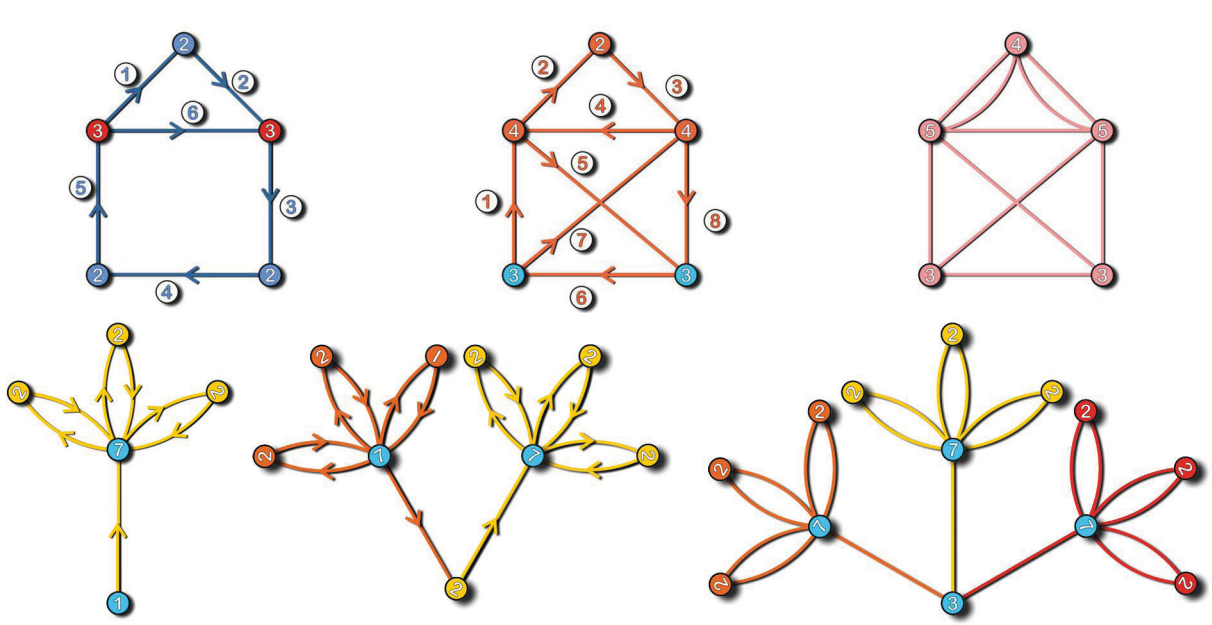
Osserva i grafi che abbiamo proposto e affrontato. Qual è la differenza tra i grafi che hanno soluzione (hanno un cammino euleriano) e quelli che non possiedono questa proprietà (non hanno un cammino euleriano)? Per i grafi in cui sei riuscito a costruire un cammino euleriano, che proprietà hanno i nodi in cui inizia il cammino? E che proprietà hanno i nodi in cui il cammino termina?

In fondo a questa pagina riportiamo una buona parte dei grafi che abbiamo affrontato. La cifra che si trova all'interno dei nodi è il grado o valenza del nodo e corrisponde al numero degli archi che incidono sul (arrivano o partono dal) vertice stesso. Inoltre, ove presente una soluzione, si è scelto di evidenziare in colore differente il nodo di partenza e di arrivo del percorso trovato.

Si nota quasi subito, concentrando l'attenzione sul grado di ciascun nodo, che i percorsi partono sempre da vertici con valenza dispari e che, ove esista una soluzione, ci sono *esattamente due vertici di grado dispari*. Infatti nella terza casetta, dove non siamo riusciti a trovare una soluzione, abbiamo quattro vertici di grado dispari, e non solo due come negli altri casi.

Stessa cosa per i fiori. Dove esiste una soluzione ci sono esattamente due nodi di grado dispari e il percorso parte da e arriva proprio in questi. Nel terzo problema ci sono quattro nodi, troppi, di grado dispari (evidenziati in azzurro) e non siamo stati in grado di determinare una soluzione.

Dovresti aver capito che se un grafo ha una certa proprietà allora è sempre possibile tracciare un cammino euleriano. È vero anche il viceversa, se è possibile tracciare un



cammino euleriano, allora il grafico ha quella stessa proprietà? Cerca di spiegare il perché in modo quanto più formale possibile.

È chiaro che si riesce a tracciare un cammino euleriano in un grafo se ci sono rigorosamente due nodi di grado dispari e il percorso deve partire da uno di questi e terminare nell'altro, i nodi di grado pari possono essere attraversati ma non sono mai iniziali o finali! In modo più formale:

è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo se e solo se il grafo ha esattamente due nodi di grado dispari

Possiamo spiegare la cosa in questo modo:

» se il nodo è di passaggio (né di partenza, né di arrivo) una volta arrivati al nodo lo si deve *lasciare* e quindi il grado deve essere pari perchè per ogni arco che arriva in quel vertice ce ne deve essere uno che lo lascia (che permette di proseguire il percorso);

» se il nodo è iniziale o terminale il grado deve essere dispari perchè ogni volta che lo si attraversa abbiamo due archi incidenti ma ce ne deve essere uno in più quando si parte (o si arriva) e questi nodi di grado dispari devono essere esattamente due: quello da cui si parte e quello in cui si arriva.

Un caso particolare

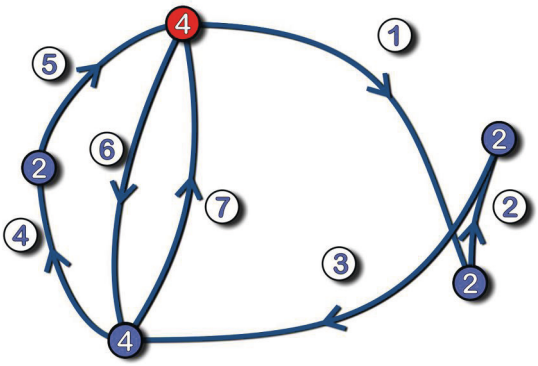
Ora un ultimo problema. Torniamo al grafo di pagina 13, la *balena*.

È possibile determinare un cammino euleriano nel grafo in figura? Da quale nodo è possibile iniziare il cammino?

Il laboratorio Quattro passi in centro affronta il problema di determinare se un grafo è connesso oppure no. Il corrispondente fascicolo si trova qui: http://researchinaction.it/materials/07-Un-grafo-connesso.pdf

Certamente! Ma si torna sempre al nodo di partenza anzi, si può iniziare il cammino da uno qualsiasi dei nodi.

Rispetto a tutti i casi precedenti, cosa contraddistingue questo grafo.



Tutti i nodi hanno grado pari! Alla luce di quanto detto prima si capisce che partendo da un nodo di grado pari devo necessariamente tornare allo stesso nodo e non esistono vertici di grado dispari che obbligherebbero il nodo di partenza o di arrivo.

È possibile costruire un circuito euleriano in questo ultimo grafo proposto?

Chiaramente sì! Anzi, ogni cammino euleriano deve essere necessariamente un circuito.

A questo punto possiamo riformulare il teorema in modo che stabilisca, con un unico enunciato, le condizioni per cui in un grafo è possibile costruire un cammino euleriano e quando, invece, un circuito euleriano.

Possiamo modificare l'enunciato del nostro teorema in modo da tener conto anche di questo caso particolare:

è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo se e solo se il grafo ha zero o due nodi di grado dispari

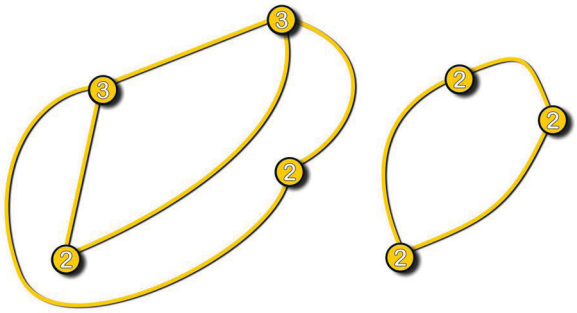
se il grafo ha tutti i nodi di grado pari allora *il grafo ha un circolo euleriano*

6.6. Un altro caso particolare

Il grafo che proponiamo qui soddisfa le ipotesi del terorema che abbiamo formulato nelle pagine precedenti?

Le ipotesi del teorema che abbiamo enunciato sono semplici: *il grafo ha zero o due nodi di grado dispari*. Secondo il nostro teorema, se un grafo soddisfa queste ipotesi è possibile tracciare un cammino euleriano, un percorso, cioè, che attraversi tutti gli archi senza passare mai due volte suloo stesso arco.

È possibile costruire un cammino euleriano (un percorso che attraversi tutti gli archi una e una sola volta) nel grafo proposto? Trovi una contraddizione? Le conclusioni del teorema, verificata la correttezza delle ipotesi, si possono applicare in questo caso?



Contrariamente a quanto affermato dal teorema, non è possibile invece trovare un cammino euleriano. Si vede immediatamente che non c'è nessun arco che permetta di passare uno dei nodi che fanno parte del gruppo più a sinistra a un vertice del gruppo più a destra (ricordiamo che, malgrado questa *separazione* tra i nodi, il grafo è uno solo).

È evidente che c'è qualcosa che non va. In tutti gli esempi affrontati in precedenza non si è presentato il caso di gruppi di nodi separati gli uni dagli altri e le conclusioni del teorema non si possono applicare, non sono valide, in questa situazione. Dobbiamo rivedere l'enunciato per escludere i grafi di questo tipo.

Il grafo che stiamo esaminando è connesso?

Il problema nasce proprio da questo: il grafo non è connesso. Infatti non esiste nessun cammino che congiunga un nodo del gruppo di sinistra a un vertice del gruppo di destra.

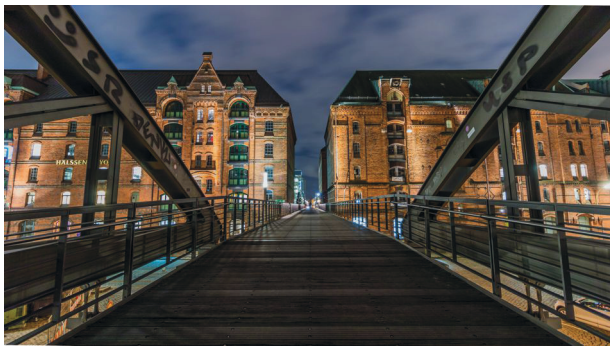
Riformula (è l'ultima volta) il teorema che abbiamo elaborato in questa prima parte del laboratorio perchè tenga conto di casi particolari come questo.

È sufficiente modificare un poco le ipotesi tenendo usando proprio la definizione di grafo connesso:

è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo se e solo se il grafo è connesso e ha zero o due nodi di grado dispari

se il grafo connesso ha tutti i nodi di grado pari allora il grafo ha un circolo euleriano

Bene! Ora il teorema si può applicare anche a quest'ultimo esempio: il teorema ci dice che non è possibile costruire un cammino euleriano per il grafo mostrato in questa pagina perchè non è connesso e quindi non soddisfa le ipotesi!

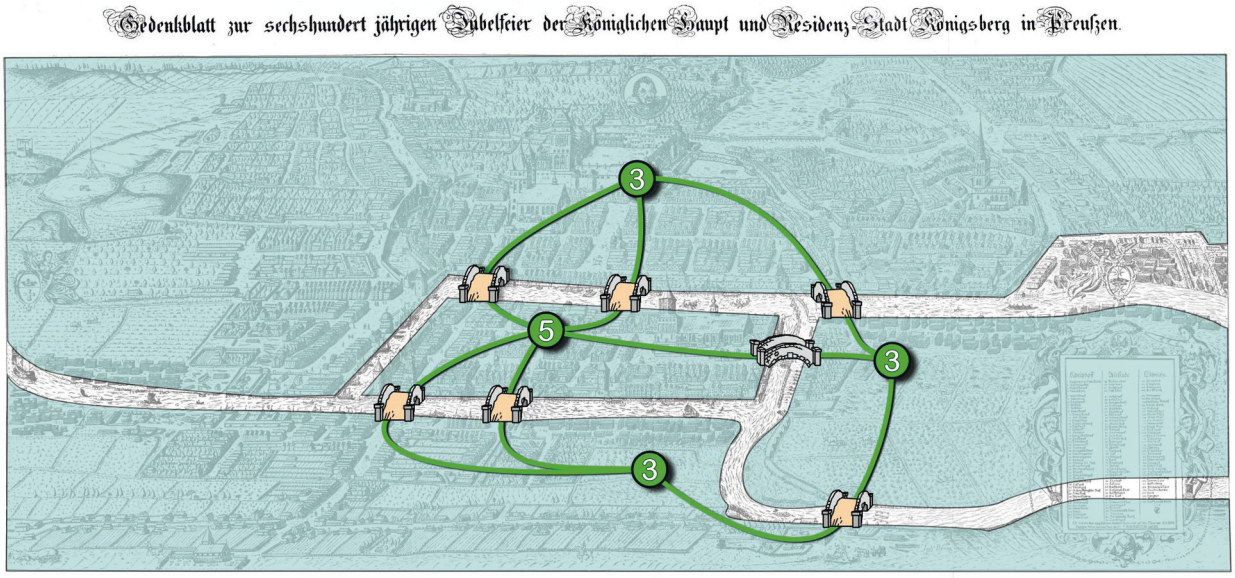


7. I ponti di Königsberg

Alla luce di quanto fatto fino a ora, prova a costruire un modello per il problema dei ponti di Königsberg: rappresenta la situazione utilizzando solo punti e linee (archi) tra un punto e l'altro. È evidente che il problema riguarda le zone della città e i punti che attraversano il fiume, cosa è meglio rappresentare con punti e cosa con linee?

Il problema dei ponti di Königsberg è un problema in cui non sono importanti le distanze o la superficie delle zone della città e nemmeno la disposizione di queste zone ma solamente i *collegamenti* tra una zona e l'altra: è chiaramente un problema di topologia e la teoria dei grafi ci può venire in aiuto!

Nella figura qui di seguito abbiamo rappresentato la situazione, come richiesto, solo con linee e punti anzi, con nodi (ogni zona della città è un nodo) e archi (ogni ponte è un arco) ma ci siamo anche presi la libertà di etichettare i vertici con il loro grado, in modo simile a quanto fatto in precedenza. Il risultato è un grafo con quattro nodi, uno per ogni area della città, e sette archi, uno per ogni ponte. La rappresentazione è ora molto chiara e siamo pronti per affrontare il problema.



Si può applicare il teorema che abbiamo formulato in precedenza a questo grafo? Con quali conclusioni?

Certe che ossiamo applicare il teorema che abbiamo enunciato in precedenza!

è possibile costruire un cammino euleriano nel grafo se e solo se il grafo è connesso e ha zero o due nodi di grado dispari

e visto che il nostro grafo (pur essendo connesso) ha quattro nodi di grado dispari possiamo affermare che il problema non ha soluzione: non è possibile *passeggiare* per la città di Königsberg attraversando tutti i ponti una e una sola volta!

E siamo sicuri della risposta data anche senza provare tutti i possibili percorsi.

Nella storia Paperino e i ponti di Quackenberg è Pico de Paperis che veste i panni di Leonhard Euler e, dopo aver studiato il problema, giunge alla nostra stessa conclusione: il problema è irrisolvibile.
La vignetta mostrata in questa pagina è tratta da Topolino n. 3232 (Editore PANINI SpA). ©Disney

8. Una soluzione solo parziale

È bene far notare che abbiamo trovato una soluzione al problema dei ponti di Königsberg, ma non una soluzione generale al problema di determinare un cammino o un circuito euleriano in un grafo. In altre parole, il teorema di Eulero (che adesso è un po' anche nostro) permette di decidere, in modo molto semplice c'è da dire, alla domanda se sia possibile determinare un cammino (o un circuito) euleriano in un grafo ma non indica un modo per determinarlo.

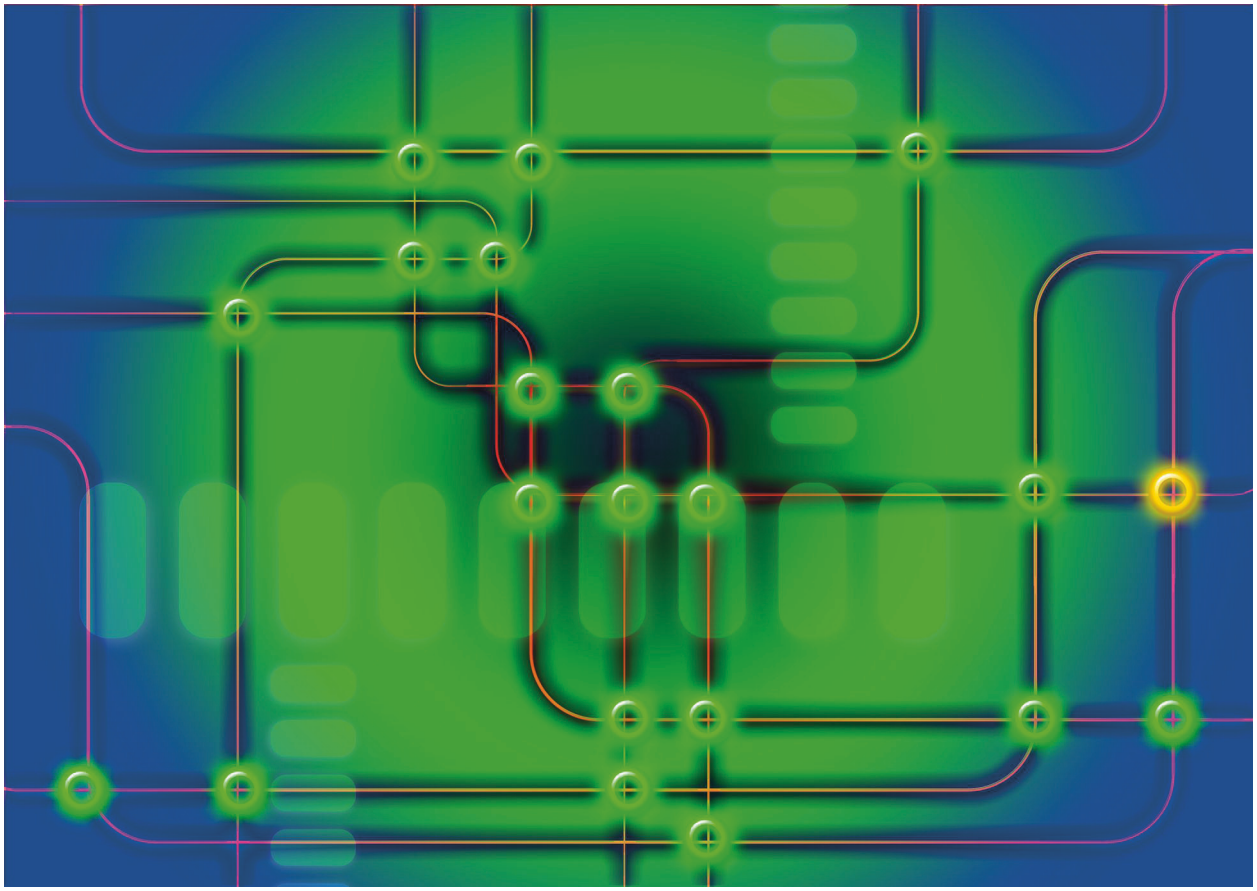
Il laboratorio Un problema di consegne affronta un famoso problema di topologia: il problema del postino cinese, in cui si chiede di costruire un circuito euleriano in un grafo dove questo circuito non esiste!
Il fascicolo corrispondente è qui: http://researchinaction.it/materials/16-Un-problema-di-consegne.pdf

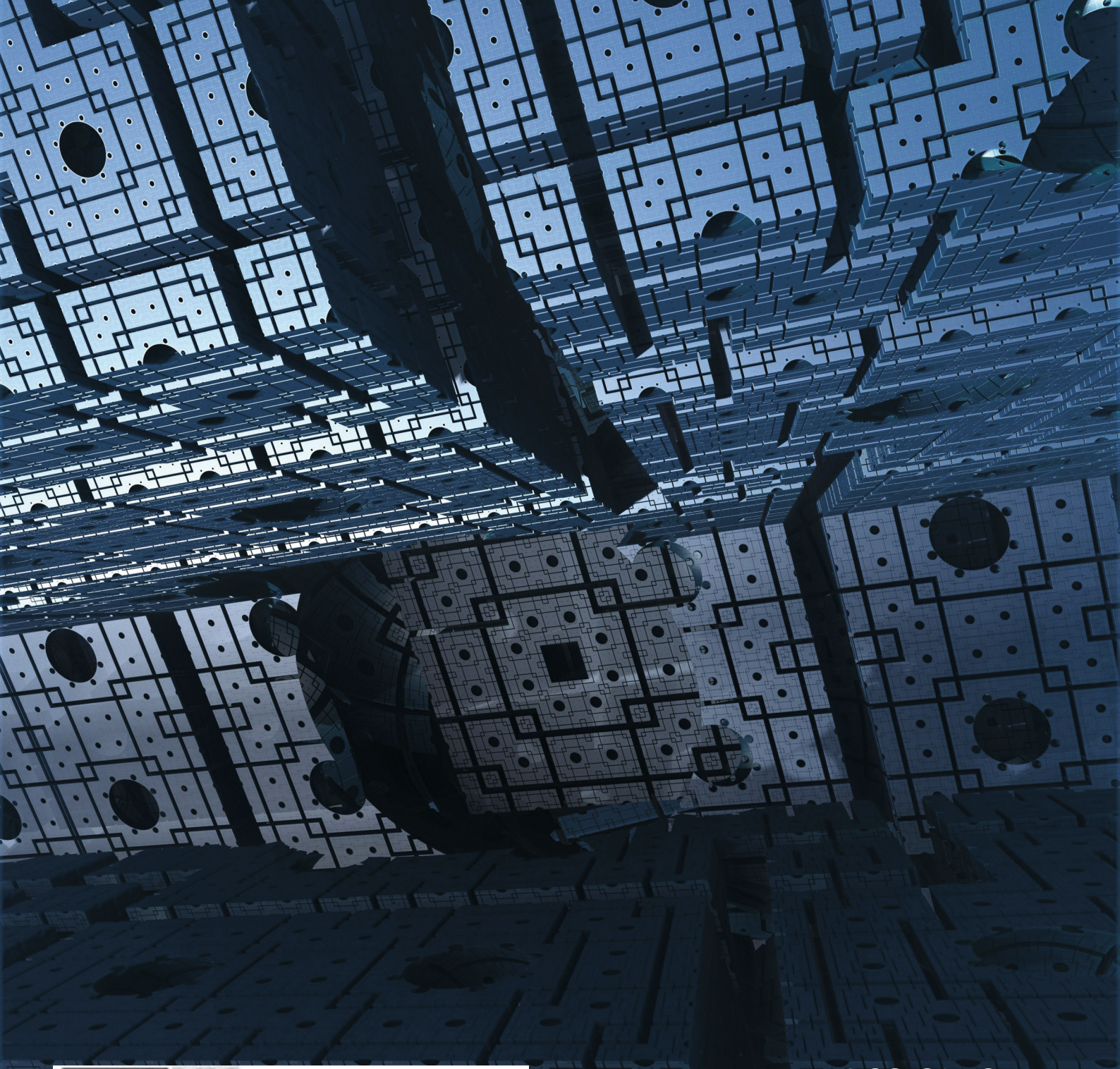
Tutt'al più possiamo sapere che:

» se esistono (solo) due nodi di grado dispari il circuito non è possibile e il cammino deve iniziare in uno di questi due nodi e terminare nell'altro;
» se, al contrario, non ci sono nodi di grado dispari, è possibile costruire un circuito euleriano partendo da uno qualsiasi dei nodi.

La ricerca di un cammino (circuito) invece riveste una grande importanza e ha molte possibili applicazioni, come la progettazione di un percorso per la raccolta dei rifiuti, per la pulizia delle strade o, ancora, per la consegna della posta o per la distribuzione dei pacchi per mezzo di un corriere. In tutti questi casi la presenza di un circuito euleriano, o almeno di un cammino euleriano, permette sicuramente un risparmio, sia esso di tempo che di strada percorsa.

Il problema di determinare un circuito euleriano, per i grafi in cui sia possibile, o una soluzione economicamente simile, nei grafi in cui un circuito euleriano è impossibile, non possono essere affrontati a questo punto, abbiamo bisogno di qualche abilità in più. Affronteremo questo problema in un successivo laboratorio.





LICEO SCIENTIFICO GRASSI LATINA

CNR IAC
Istituto per le Applicazioni del Calcolo

CNR IFN
Istituto di Fotonica e Nanotecnologie

Marine Technology Research Institute
INSEAN

LSS G.B. Grassi

LICEO SCIENTIFICO STATALE G.B. GRASSI DI LATINA

WWW.LICEOGRASSILATINA.ORG

CNR - IAC

ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO MAURO PICONE

WWW.IAC.CNR.ORG

CNR - IFN Roma

ISTITUTO DI FOTONICA E NANOTECNOLOGIE

WWW.ROMA.IFN.CNR.ORG

CNR - INSEAN

ISTITUTO NAZIONALE STUDI ESPERIENZE E ARCHITETTURA NAVALE

WWW.INSEAN.CNR.ORG