

# RiA - Research in Action

## Un'idea per i PCTO

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina - [www.liceograssilatina.org](http://www.liceograssilatina.org)

RiA - Research in Action - [researchinaction.it](http://researchinaction.it)

© 2021, Gualtiero Grassucci

[gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org](mailto:gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org)



# RiA - Research in Action



2

- È un progetto di PCTO (*Percorsi per le Competenze Trasversali e per l'orientamento*) ...
  - ... **ma soprattutto un tentativo di dare un senso all'insegnamento della matematica nel liceo scientifico**
    - spronando alunni e alunne a *fare da soli* davanti a un problema
    - invitandoli a mettere a frutto conoscenze e (soprattutto) competenze in contesti diversi da quelli usuali
- Con l'idea che la matematica può:
  - servire a costruire un modello per il problema proposto
  - fornire i metodi e gli strumenti per risolvere il problema stesso

## Il progetto RiA

Matematica applicata  
Il processo Partner  
La struttura Modello affine  
Onde gravitazionali  
Metodo di lavoro  
Come aiutare?  
Il fascicolo Risultati

# Matematica applicata



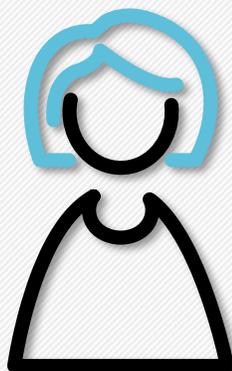
3

- Insegnare matematica è difficile:
  - La manipolazione di simboli sembra a volte del tutto inutile**
- A volte il docente dovrebbe porre domande aperte ...
  - problemi, quesiti, che richiedono di pensare strategie risolutive, di usare gli strumenti conosciuti in modo originale e creativo
  - problemi che invitano a chiedere e cercare nuovi strumenti perché quelli che si possiedono non sono sufficienti o non abbastanza affinati.
- Il progetto promuovere l'uso della matematica nella sua concezione più alta e generale: **un linguaggio per la descrizione e la comprensione della realtà**
- Una volta compreso il *pezzetto di realtà* oggetto di studio, la matematica diventa lo strumento ideale per concepire e architettare una soluzione del problema.

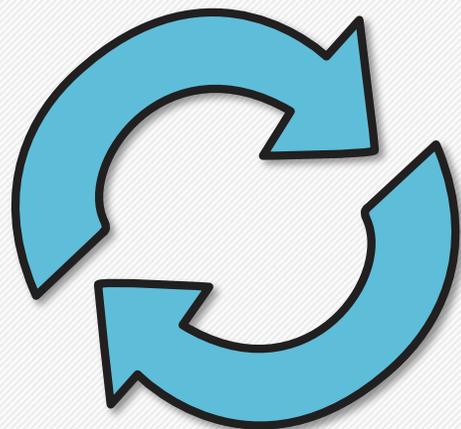
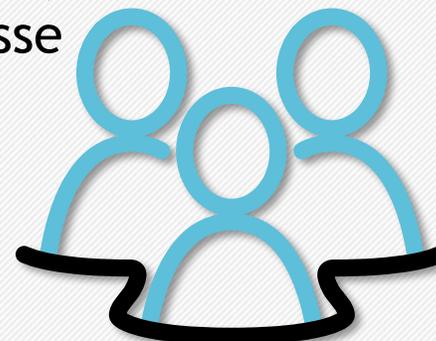
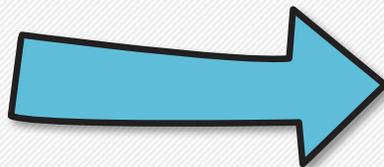
Il progetto RiA  
**Matematica applicata**

Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
Onde gravitazionali  
Metodo di lavoro  
Come aiutare?  
Il fascicolo  
Risultati

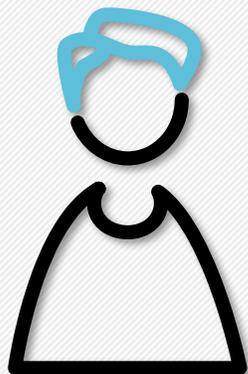
Il tutor esterno propone un problema basato su dati sperimentali



La proposta è poi *passata* a un piccolo gruppo (4-5) di studenti e studentesse



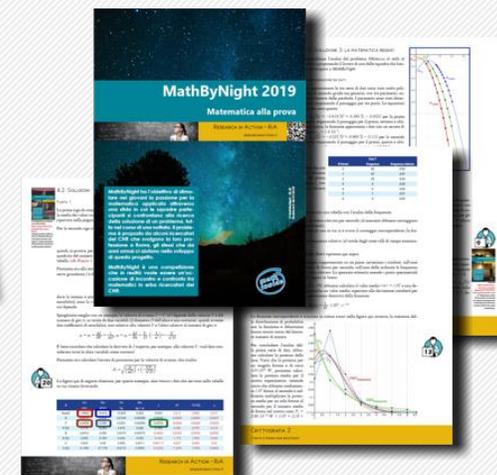
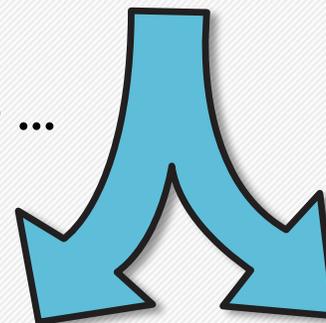
Il problema è concertato con il docente della scuola tenendo conto delle competenze (acquisite e da acquisire) di alunni e alunne



Il gruppo produce ...



... relazione, grafici, app, strumenti e quanto possa servire alla soluzione del problema ...



... un fascicolo per replicare l'esperienza!

# Partner

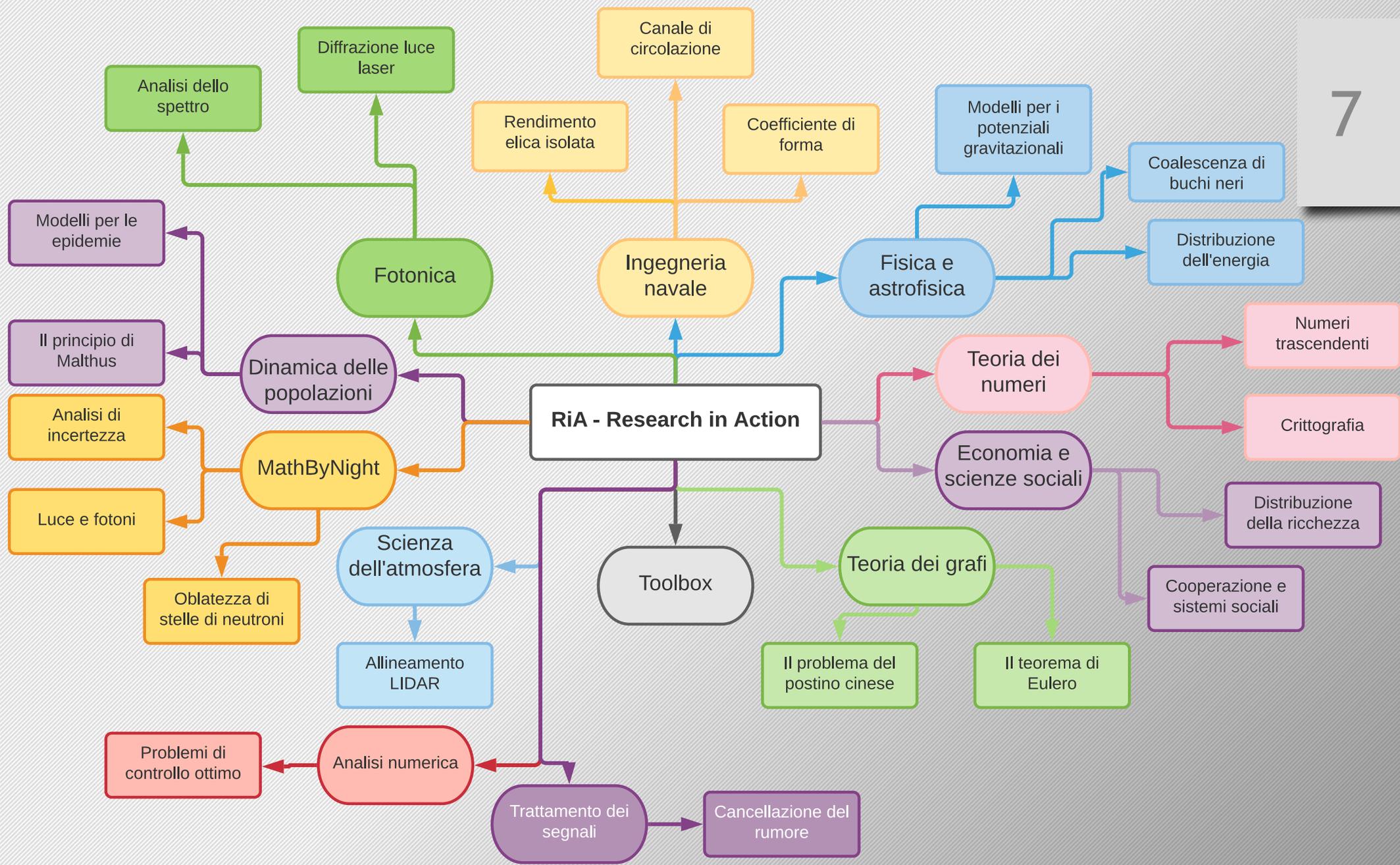


5

- Partner principali:
  - Dipartimento di Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni (DIET) Università di Roma *La Sapienza*
  - Dipartimento di Matematica, Università di Roma *La Sapienza*
  - Dipartimento di Matematica, Pontificia Università Cattolica di Rio de Janeiro (PUC-Rio)
  - Istituto per le Applicazioni del Calcolo *Mauro Picone* (CNR-IAC) di Roma
  - Istituto di Fotonica e Nanotecnologie (CNR-IFN) di Roma
  - Istituto di Ingegneria del Mare (CNR-INM) di Roma
  - Istituto di Scienze del Mare (CNR-ISMAR)
- Altri partner:
  - Area di Ricerca di Tor Vergata (ARToV)
  - FabLab (*SpaziInnova*) di Latina

Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
**Partner**  
La struttura  
Modello affine  
Onde  
gravitazionali  
Metodo di  
lavoro  
Come aiutare?  
Il fascicolo  
Risultati

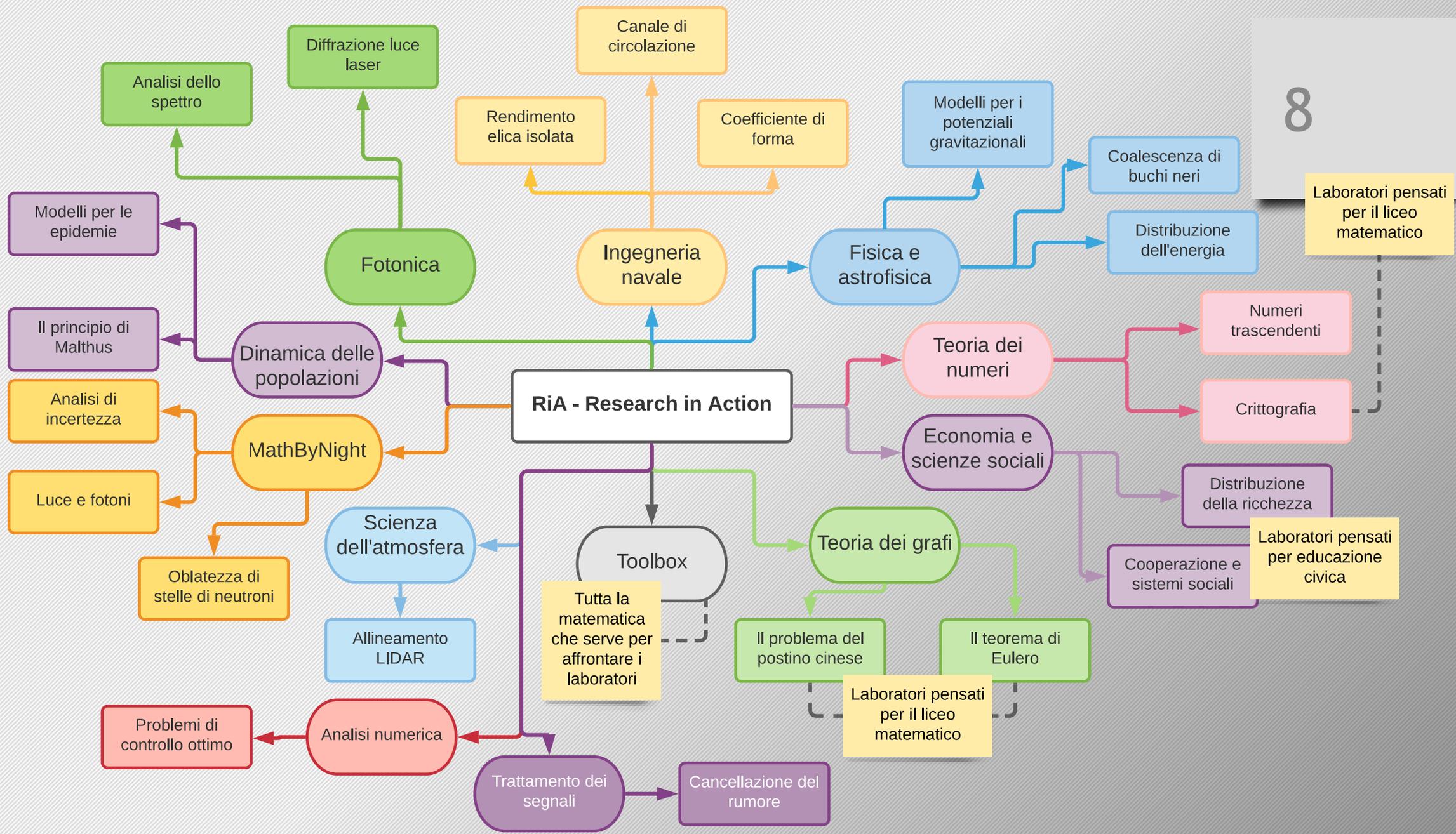




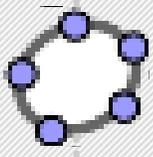
Laboratori pensati per il liceo matematico

Laboratori pensati per educazione civica

Laboratori pensati per il liceo matematico







10

Laboratori pensati per il liceo matematico

# Basato su Boghosian, Li, Li *The Affine Wealth Model* Tuft University

**RiA - Research in Action**

Economia e scienze sociali

Distribuzione della ricchezza

Laboratori pensati per educazione civica

Toolbox

Tutta la matematica che serve per affrontare i laboratori

Teoria dei grafi

Il problema del postino cinese

Laboratori pensati per il liceo matematico

Il teorema di Eulero

Cooperazione e sistemi sociali

Trattamento dei segnali

Cancellazione del rumore

Analisi numerica

Problemi di controllo ottimo

Scienza dell'atmosfera

Allineamento LIDAR

Oblatezza di stelle di neutroni

MathByNight

Luce e fotoni

Analisi di incertezza

Il principio di Malthus

Modelli per le epidemie

Dinamica delle popolazioni

Fotonica

Analisi dello spettro

Difrazione luce laser

Rendimento elica isolata

Canale di circolazione

Coefficiente di forma

Modelli per i potenziali gravitazionali

Coalescenza di buchi neri

Distribuzione dell'energia

Numeri trascendenti

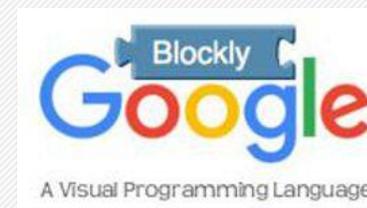
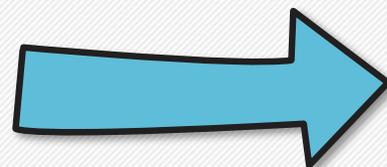
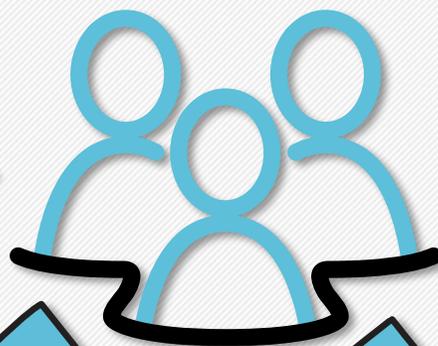
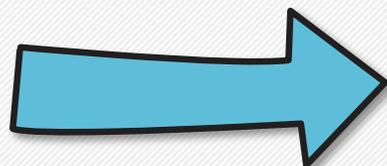
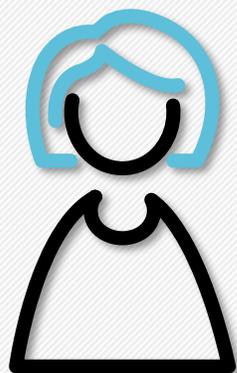
Crittografia



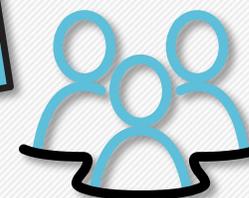
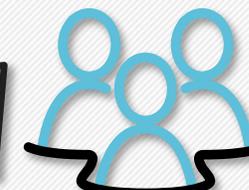
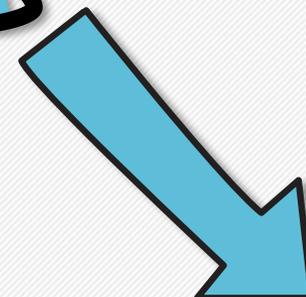
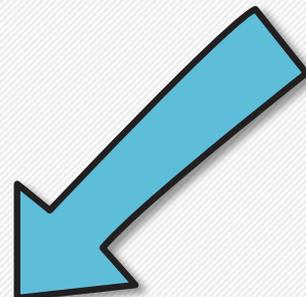
Il tutor propone al gruppo di studiare e ricreare il *Modello affine per la distribuzione della ricchezza*

Il gruppo ricostruisce il modello usando *Blockly*, un generatore di codice *open source*

11

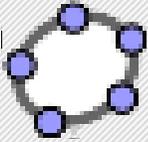


Il foglio di calcolo è distribuito alle classi della scuola per l'argomento di educazione civica *Distribuzione della ricchezza*



Il codice *Python* prodotto da *Blockly* è usato per generare un'applicazione in modo da mettere alla prova il modello

Lo codice *JavaScript* generato da *Blockly*, una volta verificato il modello, è utilizzato per aggiungere funzionalità a un foglio di calcolo Google



Basato su B.P. Abbot et al.  
*Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*  
 Ligo Scientific Collaboration and Virgo Collaboration



12

**RiA - Research in Action**

Fisica e astrofisica

Modelli per i potenziali gravitazionali

Coalescenza di buchi neri

Distribuzione dell'energia

Laboratori pensati per il liceo matematico

Numeri trascendenti

Crittografia

Distribuzione della ricchezza

Laboratori pensati per educazione civica

Cooperazione e sistemi sociali

Teoria dei numeri

Economia e scienze sociali

Teoria dei grafi

Il problema del postino cinese

Il teorema di Eulero

Laboratori pensati per il liceo matematico

Ingegneria navale

Toolbox

Tutta la matematica che serve per affrontare i laboratori

Cancellazione del rumore

Trattamento dei segnali

Fotonica

Scienza dell'atmosfera

Allineamento LIDAR

Analisi numerica

Dinamica delle popolazioni

MathByNight

Oblatezza di stelle di neutroni

Problemi di controllo ottimo

Modelli per epidemie

Il principio di Malthus

Analisi di incertezza

Luce e fotoni



# Un modello per il potenziale gravitazionale

13

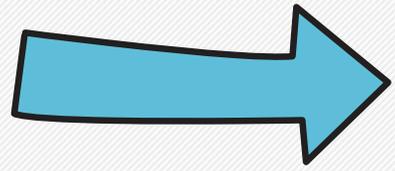
- Il laboratorio si ispira a *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger* della *LIGO Scientific Collaboration*
- Si richiede un modello, una funzione, che approssimi il potenziale gravitazionale di un corpo che sta spiraleggiando intorno a un altro a causa della mutua interazione gravitazionale tra i due:
- Il potenziale cercato è funzione di due variabili:
  - la coordinata radiale  $p$
  - l'eccentricità dell'orbita  $e$
- La vera difficoltà è proprio l'approssimazione di una funzione a più variabili

Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
**Onde  
gravitazionali**  
Metodo di  
lavoro  
Come aiutare?  
Il fascicolo  
Risultati

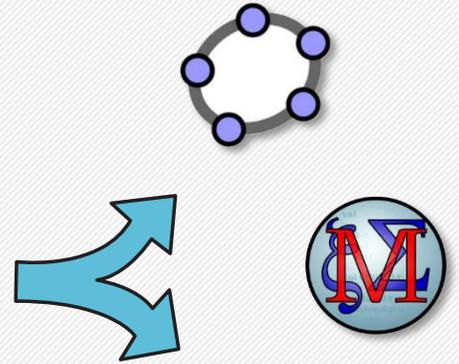
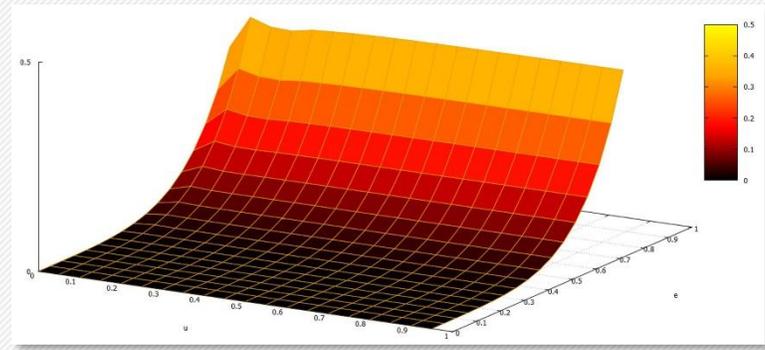
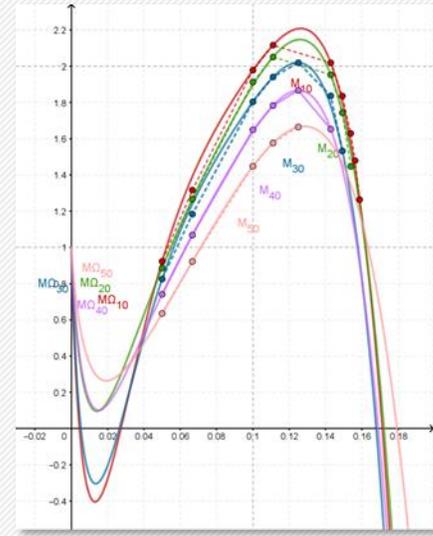
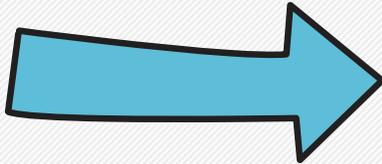
I dati sono manipolati prima di progettare la costruzione del modello  
 $u = 1/p$

p	u=1/p	e	MΩr0	p	u=1/p	e	MΩr0
6.1	0.16	0.02	0.8250131	6.7	0.15	0.30	1.5325440
6.2	0.16	0.05	1.1116740	7.0	0.30	0.30	1.3569930
6.3	0.10	1.264040	8.0	0.30	0.30	2.0197500	
6.4	0.10	1.4792970	9.0	0.30	0.30	1.9400000	
6.5	0.10	1.6294720	10.0	0.30	0.30	1.8040950	
6.7	0.10	1.8566870	15.0	0.30	0.30	1.1856130	
7.0	0.10	2.0192750	20.0	0.30	0.30	0.8249337	
9.0	0.10	2.1166620	7.0	0.40	0.40	1.6550740	
10.0	0.10	1.9784140	9.0	0.40	0.40	1.5671530	
15.0	0.10	1.3166350	9.0	0.40	0.40	1.7854430	
20.0	0.10	0.9230504	10.0	0.40	0.40	1.6495910	
6.5	0.20	1.4472200	15.0	0.40	0.40	1.0682770	
6.7	0.20	1.7454180	20.0	0.40	0.40	0.7406688	
7.0	0.20	1.9531860	7.0	0.45	0.45	1.5124060	
9.0	0.20	2.0512280	7.0	0.49	0.49	1.2957760	
10.0	0.20	1.9135770	7.0	0.499	0.499	1.0956820	
15.0	0.20	1.2666270	7.0	0.4999	0.4999	0.9514141	
20.0	0.20	0.8860353	8.0	0.50	0.50	1.6646910	
			9.0	0.50	0.50	1.5766850	
			10.0	0.50	0.50	1.4480700	
			15.0	0.50	0.50	0.9220001	
			20.0	0.50	0.50	0.6349478	

p	u=1/p	e	MΩr0 × 10 <sup>4</sup>	p	u=1/p	e	MΩr0 × 10 <sup>4</sup>
6.1	0.16	0.02	0.8250131	6.7	0.15	0.30	1.5325440
6.2	0.16	0.05	1.1116740	7.0	0.14	0.30	1.8369930
6.3	0.16	0.10	1.2640400	8.0	0.13	0.30	2.0197500
6.4	0.16	0.10	1.4792970	9.0	0.11	0.30	1.9400000
6.5	0.15	0.10	1.6294720	10.0	0.10	0.30	1.8040950
6.7	0.15	0.10	1.8566870	15.0	0.07	0.30	1.1856130
7.0	0.14	0.10	2.0192750	20.0	0.05	0.30	0.8249337
9.0	0.11	0.10	2.1166620	7.0	0.14	0.40	1.6550740
10.0	0.10	0.10	1.9784140	8.0	0.13	0.40	1.6671380
15.0	0.07	0.10	1.3166350	9.0	0.11	0.40	1.7854430
20.0	0.05	0.10	0.9230504	10.0	0.10	0.40	1.6495910
6.5	0.15	0.20	1.4472200	15.0	0.07	0.40	1.0682770
6.7	0.15	0.20	1.7454180	20.0	0.05	0.40	0.7406688
7.0	0.14	0.20	1.9531860	7.0	0.14	0.49	1.5124060
9.0	0.11	0.20	2.0512280	7.0	0.14	0.49	1.2957760
10.0	0.10	0.20	1.9135770	7.0	0.14	0.499	1.0956820
15.0	0.07	0.20	1.2666270	7.0	0.14	0.4999	0.9514141
20.0	0.05	0.20	0.8860353	8.0	0.13	0.50	1.6646910
			9.0	0.11	0.50	1.5766850	
			10.0	0.10	0.50	1.4480700	
			15.0	0.07	0.50	0.9220001	
			20.0	0.05	0.50	0.6349478	



A questo punto si costruisce una funzione  $M\Omega r_0(u, e)$  che dipende da entrambe le variabili



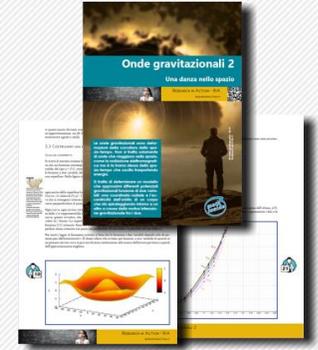
$$M\Omega r_0(u, e) = \frac{p_{20}(u) \cdot e^4 + p_{10}(u) \cdot e^6}{p_{50}(u) \cdot p_{30}(u)}$$

con un errore di circa 1.6: pessimo!

Si cerca un *fit* di ciascuno dei gruppi di dati per *e* fissato (con scarto nell'ordine di 10<sup>-4</sup>)

$$p_{30}(u) = -94211.82u^4 + 43932.79u^3 - 12843.82u^2 + 4390.72u^{\frac{3}{2}} - 441.16u + 1.00$$

... e si rende disponibile tutto il materiale per replicare l'esperienza!



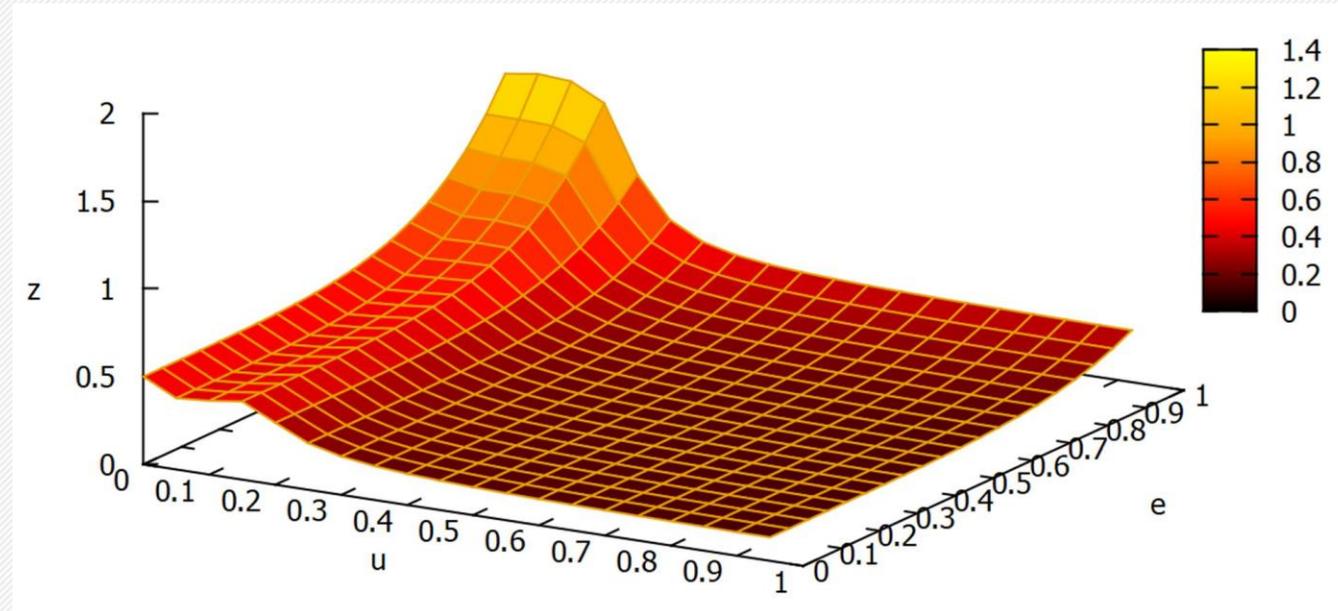
# Una animata discussione ...

15

- La proposta iniziale del gruppo era differente:
  - posto  $e_{10} = 0.10, e_{20} = 0.20, \dots, e_{50} = 0.50$
  - si definiscono  $e_i(e) = \frac{\prod_{i \neq k} (e - e_k)}{e_k - e_i}$
- A questo punto si può costruire la funzione approssimante:

$$M\Omega r_0(u, e) = \sum p_{10}(u) \cdot e_{10}(e)$$

**L'errore in questo caso è nell'ordine di  $10^{-4}$ !**



# Il metodo di lavoro (1): libertà organizzativa

16

- Gruppi di 5-7 studenti, composizione flessibile nel corso dell'anno per rispettare le inclinazioni di ciascuno
- **Libertà** di scelta organizzativa:
  - gestire le dinamiche interne al gruppo
  - scelta nelle strategie risolutive
  - libertà nel percorso da affrontare
- **Vincoli** essenzialmente temporali:
  - per la soluzione del problema proposto,
  - per la realizzazione del materiale da consegnare ai committenti (grafici, relazioni, dati, tabelle, risultati)
  - per il completamento del fascicolo

Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
Onde  
gravitazionali  
**Metodo di  
lavoro**  
Come aiutare?  
Il fascicolo  
Risultati

# Il metodo di lavoro (2): libertà di sbagliare

17



- L'ampia libertà organizzativa ha un aspetto che va sottolineato:
  - Il gruppo e gli alunni hanno avuto la **libertà di sbagliare**, di scegliere una strada senza uscita, di percorrere una via troppo complessa
- D'altra parte agli stessi alunni è stata richiesta:
  - L'accortezza di **valutare il proprio lavoro** e i risultati ottenuti
  - Il coraggio e l'abilità di **correggere gli errori**, di tornare indietro e rivalutare le scelte fatte
  - La forza di **modificare** anche radicalmente **la strategia** per tentare una strada completamente diversa

Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
Onde  
gravitazionali  
**Metodo di  
lavoro**  
Come aiutare?  
Il fascicolo  
Risultati

# Come possiamo aiutare?



18

- Abbiamo fatto di tutto perché i laboratori possano essere replicabili
- L'attività più semplice è proporre a studenti e studentesse di **replicare il percorso di indagine seguendo il fascicolo**
  - ogni fascicolo è accompagnato da tutto quello che può servire per ripercorrere la strada lasciando la libertà di immaginare altre strategie risolutive
  - il canale YouTube del progetto propone videotutorial sugli strumenti da usare
- L'attività più complessa prevede di **organizzare un laboratorio originale**, alla stregua di quelli presentati
  - possiamo fungere da tramite tra la scuola e i tutor

Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
Onde  
gravitazionali  
Metodo di  
lavoro  
**Come aiutare?**  
Il fascicolo  
Risultati

# Onde gravitazionali 2

Una danza nello spazio



RESEARCH IN ACTION - RiA

RESEARCHINACTION.IT



Le onde gravitazionali sono deformazioni della curvatura dello spazio-tempo. Non si tratta solamente di onde che viaggiano nello spazio, come la radiazione elettromagnetica ma è la trama stessa dello spazio-tempo che oscilla trasportando energia.

Si tratta di determinare un modello che approssimi differenti potenziali gravitazionali funzione di due variabili: una coordinata radiale e l'eccentricità dell'orbita di un corpo che sta spiraleggiando intorno a un altro a causa della mutua interazione gravitazionale tra i due.

09 Onde gravitazionali 2 - 05.19  
Revisione 0 del 27.05.19



Il progetto RiA  
Matematica  
applicata  
Il processo  
Partner  
La struttura  
Modello affine  
Onde  
gravitazionali  
Metodo di  
lavoro  
Come aiutare?

**Il fascicolo**

Risultati



La parola ría in inglese significa estuario, in particolare (dalla definizione che ne dà l'Oxford Living Dictionaries):

A long, narrow inlet formed by the partial submergence of a river valley ... the rias or estuaries contain very peculiar ecosystems which often contain important amounts of fish ... (a causa della loro natura, le rias o estuari contengono ecosistemi molto particolari che spesso contengono grandi quantità di pesce - [www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php](http://www.eurotomic.com/spain/the-rias-altas-in-spain.php))

quindi questo prodotto che sarà realizzato grazie all'attività di alternanza scuola-lavoro di alcuni studenti del liceo scientifico G.B.Grassi di Latina - [www.liceograssilatina.org](http://www.liceograssilatina.org) - sarà un luogo virtuale da esplorare dove *pescare* molto materiale per la didattica laboratoriale.

#### Fare scienza

La scienza non è solo identificabile con la formula, il modello, la teoria. In altre parole la scienza non rappresenta solo un corpo di conoscenze organizzate e formalizzate. La scienza è anche e fondamentalmente ricerca. Una ricerca volta a conoscere e a capire sempre più e sempre meglio come è fatto e come funziona questo nostro complicatissimo mondo.

Fare scienza si identifica con l'interrogarsi, con l'indagare ed esplorare fatti e cose. Questo tipo di lavoro i bambini lo fanno spontaneamente sin dalla loro nascita ma si perde nel corso del percorso scolastico. L'intervento educativo deve tener conto di ciò e fornire stimoli, occasioni e strumenti per far acquisire agli studenti capacità sempre più ampie e affinate per poter compiere questo lavoro di indagine mantenendo viva (o risvegliando) la curiosità cognitiva, la voglia di sapere e di scoprire, la fiducia di poter capire.

Pensare in senso creativo, in campo scientifico, significa aggredire i problemi, attivare processi vivi del pensiero, alimentare l'evoluzione dinamica dell'intelligenza duttile, dell'esercizio dell'intuizione e dell'immaginazione, della capacità di progettare e formulare ipotesi, di controllare e verificare quanto prodotto e ricercato.

Per questo è necessario bandire forme di apprendimento consumate entro schemi rigidi di elaborazione del pensiero e puntare al recupero della congettura, dell'ipotesi, di una coscienza scientifica aperta a interrogare ogni problematica.



La società odierna deve far fronte ad un rinnovamento scientifico e tecnico accelerato in cui lo sviluppo delle conoscenze scientifiche e la creazione di prodotti di alta tecnologia (*hi-tech*), come anche la loro diffusione subiscono un'accelerazione sempre più rapida.

È necessaria, quindi, una diffusione della conoscenza in genere ed è indispensabile promuovere una nuova cultura scientifica e tecnica basata sull'informazione e sulla conoscenza. E quanto più è solida la base di conoscenze scientifiche scolastiche, tanto più si può approfittare dell'informazione e della conoscenza scientifica e tecnica.



» <https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/>  
 » <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBJnkaiOR8kA/>



#### Sommaro dei contenuti

### 1. Onde gravitazionali 2 5

- 1.1 PREREQUISITI 6
- 1.2 OBIETTIVI 6

### 2. Il problema 7

- 2.1 DATI 7
- NUOVI MODELLI PER I DATI 7
- 2.2 PROGRAMMA DI LAVORO 8
- IL PRIMO SOTTOGRUPPO 8
- IL SECONDO SOTTOGRUPPO 8
- GLI ALTRI SOTTOGRUPPI 9
- 2.3 COSTRUIAMO UNA FUNZIONE A DUE VARIABILI 10
- QUALCHE CHIARIMENTO 10
- LA FUNZIONE A DUE VARIABILI 11
- 2.4 CALCOLO DELL'ERRORE 11

### 3. Soluzioni 13

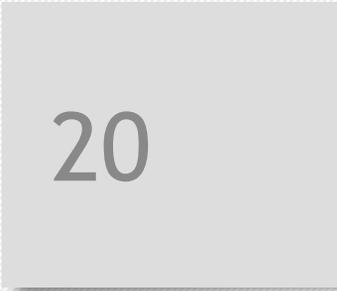
- NUOVI MODELLI PER I DATI 13
- 3.1 PROGRAMMA DI LAVORO 13
- IL PRIMO SOTTOGRUPPO 14
- IL SECONDO SOTTOGRUPPO 14
- GLI ALTRI SOTTOGRUPPI 16
- 3.2 COSTRUIAMO UNA FUNZIONE A DUE VARIABILI 17

### 4. Matematica vs Fisica 18

- 4.1 UN TRUCCO MATEMATICO 18
- 4.2 LA DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE A DUE VARIABILI 19

### 5. Esercizi 20

- 5.1 L'ESERCIZIO PROPOSTO 20
- 5.2 LA SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO PROPOSTO 21
- LE FUNZIONI DELLA COORDINATA RADIALE 21
- LA FUNZIONE A DUE VARIABILI 22
- 5.3 UN ULTIMO ESERCIZIO 22



Il progetto RiA  
 Matematica applicata  
 Il processo Partner  
 La struttura Modello affine  
 Onde gravitazionali  
 Metodo di lavoro  
 Come aiutare?  
**Il fascicolo Risultati**



# 1. Onde gravitazionali 2

Questo laboratorio è stato sviluppato da Martina Calore, Giorgia Panno, Gabriel Pinos, Christian Salvati, Lorenzo Spiriti in collaborazione con Donato Bini (CNR-IAC), il progetto è stato coordinato da Gualtiero Grassucci (Isc G.B. Grassi di Latina).

Le onde gravitazionali sono deformazioni della curvatura dello spazio-tempo che si propagano con velocità, probabilmente, pari a quella della luce. Non si tratta solamente di onde che viaggiano nello spazio, come ad esempio la radiazione elettromagnetica (luce, raggi ultravioletti, onde radio, ecc.) ma è la trama stessa dello spazio-tempo che oscilla trasportando energia e trasmettendo informazione.

Questa deformazione si propaga nello spazio, con ogni probabilità alla velocità della luce, come un'onda che increspa con leggerezza, quasi teneramente, lo spazio. Come potrebbe fare un sassolino con la superficie di uno stagno. Portando nel vuoto cosmico un segnale, comunicando all'Universo la presenza di un corpo celeste, la sua esistenza ma anche il suo aspetto, le

L'esistenza delle onde gravitazionali è stata prevista nel 1916 da Albert Einstein nella Relatività Generale ma è stata confermata sperimentalmente solamente grazie all'osservazione, da parte degli interferometri di LIGO, delle onde di due buchi neri.

Le onde gravitazionali sono estremamente difficili da rilevare e solo quelle catastrofiche come la fusione di sistemi binari di stelle di neutroni o la coalescenza (oggetti di massa pari a decine di volte quella del nostro Sole) possono essere rilevati da strumenti particolarmente sensibili (e tremendamente costosi).

La teoria della gravitazione di Einstein (la Relatività Generale) spiega come la gravità deformi lo spazio. In modo simile a un tappeto elastico, lo spazio è piatto in assenza di massa, in sua presenza s'incurva, proprio come il tappeto si deforma se vi poggiate sopra.



Il testo di Abbott et al. con l'annuncio della scoperta si può trovare qui: [physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://arxiv.org/abs/1602.03837)

Sviluppato da Thibaut Damour, l'Effective-one-body model è un modello teorico per descrivere la forma delle onde gravitazionali. Lo scopo del loro lavoro è stato ed è tutt'ora quello di sviluppare un modello per manipolare le

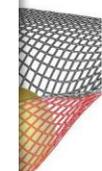


Il testo di Abbott et al. con l'annuncio della scoperta si può trovare qui: [physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://arxiv.org/abs/1602.03837)



Il blog Research In Action propone, sullo stesso argomento, anche il laboratorio Onde gravitazionali: <http://researchinaction.it/onde-gravitazionali/>

[researchinaction.it/onde-gravitazionali/](http://researchinaction.it/onde-gravitazionali/)



Il testo di Abbott et al. con l'annuncio della scoperta si può trovare qui: [physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://arxiv.org/abs/1602.03837)



Il testo di Abbott et al. con l'annuncio della scoperta si può trovare qui: [physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://arxiv.org/abs/1602.03837)

Il progetto RiA  
Matematica applicata  
Il processo Partner  
La struttura Modello affine  
Onde gravitazionali  
Metodo di lavoro  
Come aiutare?  
**Il fascicolo Risultati**





Il sito di [www.researchinaction.it](http://www.researchinaction.it) è l'annuncio della scoperta e si può trovare qui: <http://physicso.org/futuristica/articoli/pdf/10111034/PaperRelLez.116.061102>

equazioni corrette e intrattabili. Il modello di fusione di proprio genere come se fosse un meccanismo (quantistico) stesso. Non si potremmo avere una serie di potenze di quella di cui delle pert



Dal sito [researchinaction.it](http://www.researchinaction.it) è possibile scaricare l'esercizio svolto usando xMaxima: <http://www.researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Onde-gravitazionali-2.zip> xMaxima si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/).

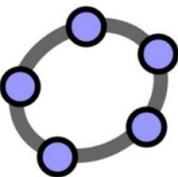
### 1.1 PRE

Per questo sapere sapere



Sul sito [www.researchinaction.it](http://www.researchinaction.it) è possibile scaricare il file GeoGebra con il laboratorio già svolto: <http://www.researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Onde-gravitazionali-2.zip> GeoGebra si può scaricare qui: <https://www.geogebra.org/>

Questo lavoro con il software GeoGebra con il laboratorio già svolto: <http://www.researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Onde-gravitazionali-2.zip> GeoGebra si può scaricare qui: <https://www.geogebra.org/>



Sul blog [Research in Action](http://www.researchinaction.it) è possibile scaricare il file GeoGebra con il laboratorio già svolto: <http://www.researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Onde-gravitazionali-2.zip> GeoGebra si può scaricare qui: <https://www.geogebra.org/>

Software: Per manipolare derivando avvalendoci di eseg

Sul sito del corso introduttivo a xMaxima con una serie di video-tutorial per familiarizzare con le principali funzionalità dell'applicazione.

gravitazionale. Equazioni moderne.

conoscere s... tri, e quindi potuti st

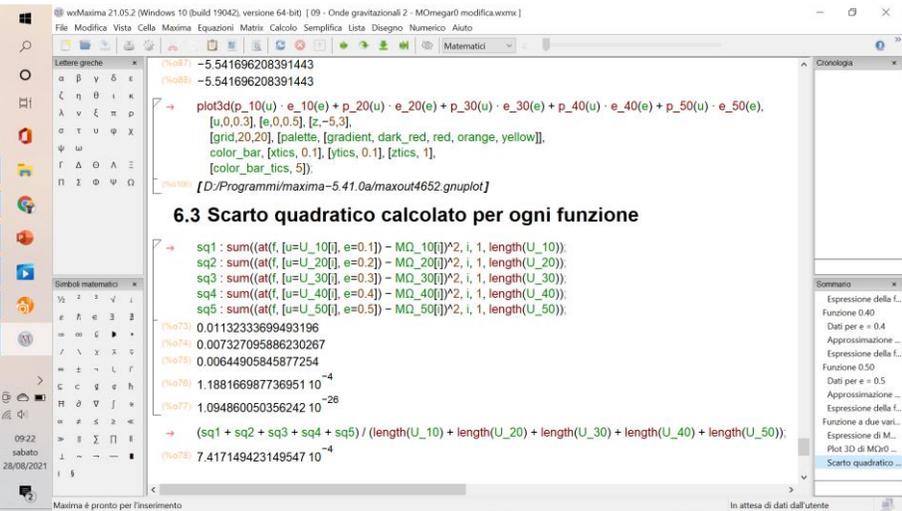
Il hamiltoniano... aciale nel... llo di Th... essere dete... adimensio... espansio... e.

con funzio... l'approssi...

riduare e costruire uno o più modelli che approssimino i dati sono stati forniti, dati che descrivono le caratteristiche del corso della fusione di due buchi neri, onde rilevate nel 2015.

Per i dati forniti carta e penna potrebbero non bastare! I dati, infatti, costituiti da molte cifre decimali, devono essere interpretati (inter Algebra System), come per esempio xMaxima, capace di simbolico che con quello numerico.

Per i dati di RiA - Research in Action è possibile trovare un breve corso introduttivo a xMaxima con una serie di video-tutorial per familiarizzare con le principali



$u = 1/p$	$e$	$MQR^2$
6.1	0.02	1.1116740
6.2	0.05	1.1116740
6.3	0.10	1.2640480
6.4	0.10	1.4792870
6.5	0.10	1.6294720
6.7	0.10	1.8356870

rossimi alcune serie di dati che rappresentano variabili: la p, una coordinata radiale, giungendo intorno a un altro a causa della... one più ampia del significato di queste... nali a pagina 6 - <http://www.researchinaction.it>

nella tabella che segue. I valori nella... dipendono dall'eccentricità dell'orbita... on è necessario conoscere nel dettaglio... trovare una funzione che approssimi al... so, dal significato che hanno.

ati sono nelle colonne da uno a quattro, per cui non sono divisi esattamente a... r0 sono moltiplicati per  $10^2$ .

## 1.1 PREREQUISITI

Per questo laboratorio è necessario:

- » saper approssimare una serie di dati con funzioni polinomiali;
- » saper valutare l'errore commesso nell'approssimazione di una serie di dati.

## 1.2 OBIETTIVI

Sul sito del progetto o sul canale YouTube di *RiA - Research in Action* è possibile trovare un breve corso introduttivo a xMaxima con una serie di video-tutorial per familiarizzare con le principali funzionalità dell'applicazione.





equazioni che governano le interazioni gravitazionali di due corpi dal punto di vista energetico, corrette via via dalle teorie post-newtoniane. Equazioni che sono talmente complesse da essere intrattabili anche con i calcolatori più moderni!

## 2. Il problema

Si tratta di determinare un modello

$p$	$u = 1/p$	$e$	$M\Omega r_0$	$p$	$u = 1/p$	$e$	$M\Omega r_0$
6.1		0.02	0.8250131	6.7		0.30	1.5325440
6.2		0.05	1.1116740	7.0		0.30	1.8369930
6.3		0.10	1.2640480	8.0		0.30	2.0197550
6.4		0.10	1.4792870	9.0		0.30	1.9408080
6.5		0.10	1.6294720	10.0		0.30	1.8040930
6.7		0.10	1.8356870	15.0		0.30	1.1836130
7.0		0.10	2.0192750	20.0		0.30	0.8249337
9.0		0.10	2.1166620	7.0		0.40	1.6530740
10.0		0.10	1.9784140	8.0		0.40	1.8671380
15.0		0.10	1.3166350	9.0		0.40	1.7834430
20.0		0.10	0.9230304	10.0		0.40	1.6493910
6.5	0.20	1.4472200	15.0	15.0		0.40	1.0682770
6.7	0.20	1.7434180	20.0	20.0		0.40	0.7406898
7.0	0.20	1.9531860	7.0	7.0		0.45	1.5124060
9.0	0.20	2.0512280	7.0	7.0		0.49	1.2957760
10.0	0.20	1.9133770	7.0	7.0		0.499	1.0956520
15.0	0.20	1.2666270	7.0	7.0		0.4999	0.9514141
20.0	0.20	0.8860353	8.0	8.0		0.50	1.6646910
				9.0		0.50	1.5766850
				10.0		0.50	1.4480700
				15.0		0.50	0.9220001
				20.0		0.50	0.6349478

una funzione, che approssimi alcune serie di dati che rappresentano la funzione di due variabili: la  $p$ , una coordinata radiale, e un corpo che sta spiraleggiando intorno a un altro a causa della gravitazione a i due. Una spiegazione più ampia del significato di queste serie di dati è contenuta nel laboratorio *Onde gravitazionali* a pagina 6 - <http://researchinaction.it>

I dati del laboratorio sono riportati nella tabella che segue. I valori nella colonna della frequenza radiale e dipendono dall'eccentricità dell'orbita. Nel nostro laboratorio, non è necessario conoscere nel dettaglio l'orbita. L'obiettivo è quello di trovare una funzione che approssimi al meglio i dati, in un certo senso, dal significato che hanno.

La tabella è *doppia*: i primi 18 dati sono nelle colonne da uno a quattro, e le ultime otto (il motivo per cui non sono divisi esattamente a due) della grandezza  $M\Omega r_0$  sono moltiplicati per  $10^2$ .

$M\Omega r_0$	$p$	$u = 1/p$	$e$	$M\Omega r_0$
0.8250131	6.7		0.30	1.5325440
1.1116740	7.0		0.30	1.8369930
1.2640480	8.0		0.30	2.0197550
1.4792870	9.0		0.30	1.9408080
1.6294720	10.0		0.30	1.8040930
1.8356870	15.0		0.30	1.1836130
2.0192750	20.0		0.30	0.8249337
2.1166620	7.0		0.40	1.6530740
1.9784140	8.0		0.40	1.8671380
1.3166350	9.0		0.40	1.7834430
0.9230304	10.0		0.40	1.6493910
1.4472200	15.0		0.40	1.0682770
1.7434180	20.0		0.40	0.7406898
1.9531860	7.0		0.45	1.5124060
2.0512280	7.0		0.49	1.2957760
1.9133770	7.0		0.499	1.0956520
1.2666270	7.0		0.4999	0.9514141
0.8860353	8.0		0.50	1.6646910
	9.0		0.50	1.5766850
	10.0		0.50	1.4480700
	15.0		0.50	0.9220001
	20.0		0.50	0.6349478

Si tratta di determinare un modello che approssimi una serie di dati sperimentali (cercare un buon *fit*, consegnare un modello efficace) non è un compito meramente meccanico: non si tratta solo di cercare una funzione che passi per i dati che ci sono stati forniti, ma piuttosto di comprendere l'andamento della serie sperimentale e le relazioni tra la  $p$  o le variabili indipendenti e le grandezze fisiche che da queste dipendono. A volte, quindi, può essere necessario manipolare i dati, trasformarli, affinché vengano alla luce con evidenza particolari ripetitività o combinazioni, in modo da

Il progetto RiA  
Matematica applicata  
Il processo Partner  
La struttura Modello affine  
Onde gravitazionali  
Metodo di lavoro  
Come aiutare?  
**Il fascicolo**  
Risultati



## IL PRIMO SOTTOGRUPPO

Considera il primo sottoinsieme di dati (di righe della tabella) con valori di eccentricità simili e quindi, per quello che segue in questo paragrafo, tieni conto solo delle righe della tabella che fanno parte di questo sottoinsieme.

**Decidi quali dati rappresentare sull'asse delle ascisse e quali sull'asse delle ordinate. Riporta quindi i dati di questo sottoinsieme su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata.**

Tieni conto che, per quanto detto, la funzione  $M\Omega r\theta$  è funzione solo della variabile  $u$ . Puoi usare il piano cartesiano che si trova nella pagina successiva.

**Osserva i punti sperimentali e la spezzata, se non hanno un andamento riconoscibile ricorda che puoi sempre utilizzare un polinomio. Determina una funzione  $f_0(u)$ , un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.**

Mettiamo da parte questa funzione, ci servirà nel seguito.



Riporta quindi i dati di questo sottoinsieme su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata.

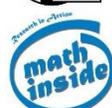
Tieni conto che, per quanto detto, la funzione  $M\Omega r\theta$  è funzione solo della variabile  $u$ . Puoi usare il piano cartesiano che si trova nella pagina successiva.

**Osserva i punti sperimentali e la spezzata, se non hanno un andamento riconoscibile ricorda che puoi sempre utilizzare un polinomio. Determina una funzione  $f_0(u)$ , un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.**

Mettiamo da parte questa funzione, ci servirà nel seguito.

## IL SECONDO SOTTOGRUPPO

Da capo. Considera ora il secondo sottoinsieme di dati (di righe della tabella) con valori di eccentricità simili e quindi, di nuovo, per quello che segue in questo paragrafo, tieni conto solo delle



Per questo ti fa il caso a più variabili avrà un termine del tipo  $x^2$ . Per questo motivo potrebbe essere utile scegliere una funzione mista: un polinomio a cui si aggiunge un termine come questo:

$k \cdot u^n$   
In questo modo tutti i polinomi (non per chiavi sottoinsieme dei dati) avranno un termine con la potenza di  $u$  mischiata che, una volta somministrata la funzione, soddisferà la richiesta.



sottoinsieme su  
da ottenere una

l'andamento e sce-  
zio, puoi sempre cer-

$u$ ), un polinomio

a.

nti. Se il compito  
re le funzioni  $f_0$  e  $f_1$

i dati su un piano  
ti sperimentali.

L'uso di un software CAD (Computer Algebra System) a questo punto, se non indispensabile, è certamente utile, molto utile. Nel progetto abbiamo usato spesso software Open Source che si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/). In particolare, dal sito [researchinaction.it](http://researchinaction.it), è possibile scaricare l'esercizio svolto secondo riferimento: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-ONDE-gravitazionali-2.zip>



Il Toolbox:

<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/01/00-Toolbox.pdf>  
suggerisce alcuni metodi per l'approssimazione di dati sperimentali (cfr. Approssimazione mediante polinomi a pagina 13).

24





# Soluzioni

Onde gravitazionali 2 - Una danza nello spazio

p	u = 1/p	e	M.QrO x 10 <sup>2</sup>	p	u = 1/p	e	M.QrO x 10 <sup>2</sup>
6.1	0.16	0.02	0.8250131	6.7	0.15	0.30	1.5325440
6.2	0.16	0.05	1.1116740	7.0	0.14	0.30	1.8369930
6.3	0.16	0.10	1.2640480	8.0	0.13	0.30	2.0197550
6.4	0.16	0.10	1.4792870	9.0	0.11	0.30	1.9408080
6.5	0.15	0.10	1.6294720	10.0	0.10	0.30	1.8040930
6.7	0.15	0.10	1.8356870	15.0	0.07	0.30	1.1836130
7.0	0.14	0.10	2.0192750	20.0	0.05	0.30	0.8249337
9.0	0.11	0.10	2.1166620	7.0	0.14	0.40	1.6530740
10.0	0.10	0.10	1.9784140	8.0	0.13	0.40	1.8671380
15.0	0.07	0.10	1.3166350	9.0	0.11	0.40	1.7834430
20.0	0.05	0.10	0.9230304	10.0	0.10	0.40	1.6493910
6.5	0.15	0.20	1.4472200	15.0	0.07	0.40	1.0682770
6.7	0.15	0.20	1.7434180	20.0	0.05	0.40	0.7406898
7.0	0.14	0.20	1.9531860	7.0	0.14	0.45	1.5124060
9.0	0.11	0.20	2.0512280	7.0	0.14	0.49	1.2957760
10.0	0.10	0.20	1.9133770	7.0	0.14	0.499	1.0956520
15.0	0.07	0.20	1.2666270	7.0	0.14	0.4999	0.9514141
20.0	0.05	0.20	0.8860353	8.0	0.13	0.50	1.6646910
				9.0	0.11	0.50	1.5766850
				10.0	0.10	0.50	1.4480700
				15.0	0.07	0.50	0.9220001
				20.0	0.05	0.50	0.6349478

Il nostro laboratorio, calcolando la funzione utile costruire il modello di ottimizzazione che del calcolo?

estire, infatti in questo modo i dati di rappresentazione con questo accorgimento di trasformazione, i valori delle funzioni che rappresenta una delle funzioni di costo per il punto di coordinate (0,1).



Sul blog del progetto è possibile scaricare il Laboratorio svolto usando «Maxima...»  
 «Maxima si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/)»

u = 1/p	e	M.QrO x 10 <sup>2</sup>
0.15	0.30	1.5325440
0.14	0.30	1.8369930
0.13	0.30	2.0197550
0.11	0.30	1.9408080
0.10	0.30	1.8040930
0.07	0.30	1.1836130
0.05	0.30	0.8249337
0.14	0.40	1.6530740
0.13	0.40	1.8671380
0.11	0.40	1.7834430
0.10	0.40	1.6493910
0.07	0.40	1.0682770
0.05	0.40	0.7406898
0.14	0.45	1.5124060
0.14	0.49	1.2957760
0.14	0.499	1.0956520
0.14	0.4999	0.9514141
0.13	0.50	1.6646910
0.11	0.50	1.5766850
0.10	0.50	1.4480700
0.07	0.50	0.9220001
0.05	0.50	0.6349478



### 3.1 PROGRAMMA DI LAVORO

Osserva la tabella con i dati che, non a caso, sono ordinati per valori dell'eccentricità  $e$  crescenti. Considera i sottoinsiemi (gruppi di righe) che hanno valori di  $e$  uguali o molto simili. Quanti sottogruppi riesci a individuare? Traccia, magari con un pennarello, delle linee orizzontali sulla tabella per delimitare questi sottoinsiemi di righe.

Nella tabella che si trova qui sopra abbiamo raggruppato i dati per valori di eccentricità uguali,

Il progetto RiA  
 Matematica applicata  
 Il processo Partner  
 La struttura Modello affine  
 Onde gravitazionali  
 Metodo di lavoro  
 Come aiutare?  
**Il fascicolo**  
 Risultati





Sul Web Research in Action è possibile scaricare il file GeoGebra con il laboratorio già svolto:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Orde-gravitazionali-2.zip>  
 GeoGebra si può scaricare qui: <https://www.geogebra.org/>

evidenziando le separazioni tra un insieme e l'altro con una riga di colore nero. Per quanto riguarda i valori di eccentricità che si ripetono una sola volta (le prime due righe a sinistra nella tabella e le righe da 14 a 17 a destra), possiamo ignorarli: abbiamo troppi pochi dati per un'approssimazione decente.

#### IL PRIMO SOTTOGRUPPO

**Decidi quali dati rappresentare sull'asse delle ascisse e quali sull'asse delle ordinate. Riporta quindi i dati di questo sottoinsieme su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata.**

In accordo con quanto detto fino a ora, sulle ascisse rappresentiamo i valori della variabile  $u$ , sulle ordinate i valori di  $M\Omega r\theta$ . Per questo primo gruppo selezioniamo (e quindi usiamo) i punti sperimentali che corrispondono a un valore dell'eccentricità  $e = 0.10$ . Si tratta del secondo sottoinsieme (i primi due valori, come detto, sono stati ignorati) che si trova nella parte sinistra della tabella. Nella figura che si trova nella pagina seguente i punti corrispondenti sono rappresentati in colore rosso, la spezzata che li unisce a due a due è tratteggiata nello stesso colore.

**Osserva i punti sperimentali e la spezzata. Dovrebbe essere chiaro che hanno un andamento abbastanza riconoscibile. Determina una funzione  $f_0(u)$ , un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.**

#### IL PRIMO SOTTOGRUPPO

**Decidi quali dati rappresentare sull'asse delle ascisse e quali sull'asse delle ordinate. Riporta quindi i dati di questo sottoinsieme su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata.**

In accordo con quanto detto fino a ora, sulle ascisse rappresentiamo i valori della variabile  $u$ , sulle ordinate i valori di  $M\Omega r\theta$ . Per questo primo gruppo selezioniamo (e quindi usiamo) i punti sperimentali che corrispondono a un valore dell'eccentricità  $e = 0.10$ . Si tratta del secondo sottoinsieme (i primi due valori, come detto, sono stati ignorati) che si trova nella parte sinistra della tabella. Nella figura che si trova nella pagina seguente i punti corrispondenti sono rappresentati in colore rosso, la spezzata che li unisce a due a due è tratteggiata nello stesso colore.

**Osserva i punti sperimentali e la spezzata. Dovrebbe essere chiaro che hanno un andamento abbastanza riconoscibile. Determina una funzione  $f_0(u)$ , un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.**

Abbiamo scelto un polinomio di quarto grado a cui abbiamo aggiunto un termine  $u^{3/2}$  ottenendo così una funzione con cinque parametri.

$$p_{10}(u) = a \cdot u^4 + b \cdot u^3 + c \cdot u^2 + d \cdot u + 1 + e \cdot u^{3/2}$$

**Ripeti il procedimento appena seguito: rappresenta i dati di questo sottoinsieme su un piano cartesiano. Unisci punti successivi con un segmento in modo da ottenere una linea spezzata.**

Procedendo in modo simile a quanto fatto per il primo gruppo, otteniamo la spezzata che in figura è tratteggiata in colore verde.

**Osserva i punti sperimentali e la spezzata. Determina una funzione  $f_1(u)$ , un polinomio di grado basso, che approssimi al meglio questa serie.**

Scegliendo sempre un polinomio di quarto grado, simile a quello già usato, con il termine in  $u^{3/2}$  in aggiunta e imponendo che passi per i punti 2, 3, 4, 6 e 7, otteniamo la funzione che segue (sempre con i coefficienti arrotondati a due cifre decimali):

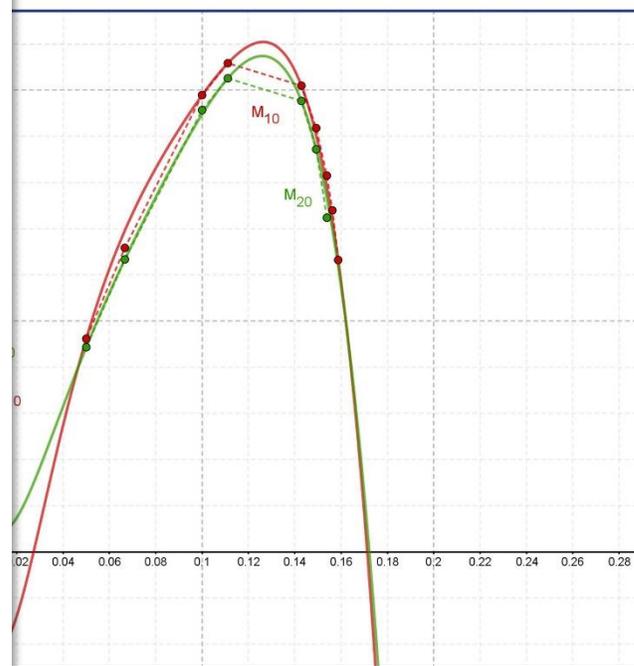
$$p_{20}(u) = -62783.85u^4 + 27881.36u^3 - 8073.33u^2 + 2814.95u^{3/2} - 289.91u + 1.0$$

Nella figura che segue la funzione è tracciata in colore verde, si chiama  $M_{10}$ .

L'approssimazione ha una media degli scarti quadratici nell'ordine di  $10^{-3}$ , come in precedenza.



Sul Web del progetto è possibile scaricare il laboratorio usando Matica:  
<http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2019/06/09-Orde-gravitazionali-2.zip>  
 Matica si può scaricare qui: <https://sourceforge.net/>



Il progetto RiA  
 Matematica applicata  
 Il processo Partner  
 La struttura Modello affine  
 Onde gravitazionali  
 Metodo di lavoro  
 Come aiutare?  
**Il fascicolo**  
 Risultati

Per ciascun sottoinsieme che hai individuato nella tabella rappresenta i dati su un piano cartesiano e determina una funzione che segua al meglio la serie di dati sperimentali.

## Costruisci una funzione a due variabili come combinazione delle $f_i(u)$ scegliendo come parametri potenze crescenti della variabile $e$ (a partire da $e^2$ e usando solo potenze pari ...

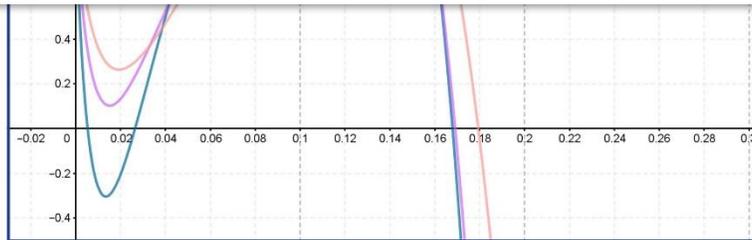
Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo

$$M\Omega r0(u, e) = \frac{f_i(u) \cdot e^2 + f_k(u) \cdot e^4}{f_j(u) + f_h(u)}$$

come suggerito nel paragrafo La funzione a due variabili a pagina 10. Modificando le funzioni usate, sia a numeratore che a denominatore, a questo punto abbiamo ottenuto cambiamenti piuttosto ridotti. Alla fine abbiamo scelto la funzione:

$$M\Omega r0(u, e) = \frac{p_{20}(u) \cdot e^4 + p_{10}(u) \cdot e^6}{p_{50}(u) + p_{30}(u)}$$

che ci ha dato una media degli scarti quadratici di circa 1.6. Non è certo un risultato eccezionale ma va tenuto conto della complessità del problema, della difficoltà nel trattare le funzioni a più variabili e del piccolo numero di punti sperimentali per ogni sottoinsieme.



Le tre funzioni sono tracciate nel grafico che si trova nella pagina precedente, nell'ordine: in azzurro ( $e = 0.30$ ), viola ( $e = 0.40$ ) e rosa ( $e = 0.50$ ). Insieme alle funzioni sono rappresentati i punti sperimentali e tratteggiate le spezzate che li uniscono.

## 2.3 COSTRUZIONE DELLA FUNZIONE A DUE VARIABILI

Costruisci una funzione a due variabili come combinazione delle  $f_i(u)$  scegliendo come parametri potenze crescenti della variabile  $e$  (a partire da  $e^2$  e usando solo potenze pari ...

Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo

$$f(u, e) = \frac{f_i(u) \cdot e^2 + f_k(u) \cdot e^4}{f_j(u) + f_h(u)}$$

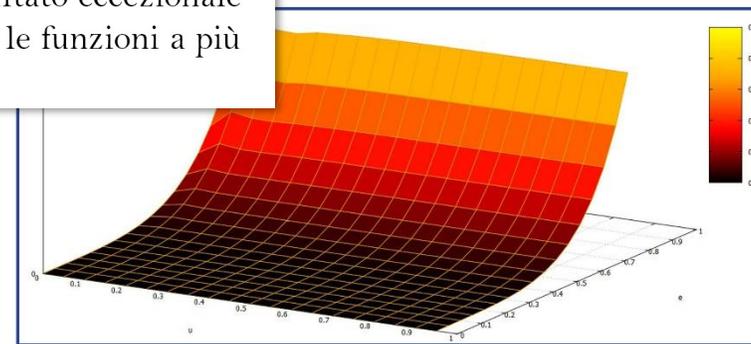
Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo

$$f(u, e) = \frac{p_{20}(u) \cdot e^4 + p_{10}(u) \cdot e^6}{p_{50}(u) + p_{30}(u)}$$

Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo

Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo

Abbiamo ripetuto il laboratorio parecchie volte modificando sia la scelta dei punti usati nelle approssimazioni delle funzioni della sola variabile  $u$ , sia combinando queste funzioni in modo diverso. I migliori risultati li abbiamo ottenuti con una funzione del tipo



Sul blog del progetto è possibile scaricare il laboratorio svolto in aula a Milano: <http://researchinaction.it/wp-content/uploads/2015/06/03-Ordo-gravitazionali-2.zip>. xMaxima si può scaricare qui: [maxima.sourceforge.net/](http://maxima.sourceforge.net/).



Il progetto RiA  
Matematica applicata  
Il processo Partner  
La struttura Modello affine  
Onde gravitazionali  
Metodo di lavoro  
Come aiutare?  
**Il fascicolo**  
Risultati





## 5. Esercizi

I dati usati nel laboratorio sono tratti da *Beyond the geodesic approximation: conservative effects of the gravitational self-force in eccentric orbits around a Schwarzschild black hole* di Leor Barack e Norichika Sago, pubblicato su ArXiv il 24.03.2011. Nella stessa pubblicazione in realtà, a pagina 28, oltre ai dati summenzinati, ci sono i valori di una diversa grandezza fisica, simile alla  $M\Omega r\theta$  sulla quale abbiamo lavorato:  $M\Omega\varphi\theta$ .

Nella tabella che segue riportiamo questi dati. La tabella è molto simile a quella proposta a pagina 7 (cfr. **2.1 I dati**) o, meglio, a quella riportata a pagina 13 (cfr. **Nuovi modelli per i dati**). Visto che i valori della coordinata radiale  $p$  e dell'eccentricità  $u$  sono gli stessi già visti, abbiamo anche inserito i valori della  $u = 1/p$ .

$p$	$u = 1/p$	$e$	$M\Omega\varphi\theta \times 10^2$	$p$	$u = 1/p$	$e$	$M\Omega\varphi\theta \times 10^2$
6.1	0.16	0.02	6,6559	6.7	0.15	0.30	5,985119

## 5. Esercizi

I dati usati nel laboratorio sono tratti da *Beyond the geodesic approximation: conservative effects of the gravitational self-force in eccentric orbits around a Schwarzschild black hole* di Leor Barack e Norichika Sago, pubblicato su ArXiv il 24.03.2011. Nella stessa pubblicazione in realtà, a pagina 28, oltre ai dati summenzinati, ci sono i valori di una diversa grandezza fisica, simile alla  $M\Omega r\theta$  sulla quale abbiamo lavorato:  $M\Omega\varphi\theta$ .

Nella tabella che segue riportiamo questi dati. La tabella è molto simile a quella proposta a pagina 7 (cfr. **2.1 I dati**) o, meglio, a quella riportata a pagina 13 (cfr. **Nuovi modelli per i dati**). Visto che i valori della coordinata radiale  $p$  e dell'eccentricità  $u$  sono gli stessi già visti, abbiamo anche inserito i valori della  $u = 1/p$ .

Si tratta di cercare un' approssimazione della funzione  $M\Omega\varphi\theta(u, e)$  con lo stesso procedimento già visto nel laboratorio che abbiamo presentato in precedenza. Si tratta, in sostanza, di ripetere lo stesso percorso:

- » suddividere i dati in sottoinsiemi per valori dell'eccentricità e uguali o simili;
- » determinare funzioni del tipo  $\pi_i(u)$ , funzioni della coordinata radiale  $u$ , che approssimino i dati sperimentali per ogni sottoinsieme individuato;
- » costruire una funzione  $M\Omega\varphi\theta(u, e)$ , funzione delle due variabili  $u$  ed  $e$ ;
- » stimare l'errore commesso usando questa funzione.

Nelle pagine che seguono forniamo, senza commentarle, le soluzioni di questo esercizio come verifica del lavoro fatto.

## 5.2 LA SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO PROPOSTO

LE FUNZIONI DELLA COORDINATA RADIALE

Le funzioni della coordinata radiale determinate sono le seguenti (i coefficienti sono stati arrotondati a due cifre decimali per comodità di lettura):

$$p_{10}(u) = 26613.67 \cdot u^4 - 11845.18 \cdot u^3 + 2642.89 \cdot u^2 - 511.35 \cdot u^3 + 10.54 \cdot u + 1.0$$

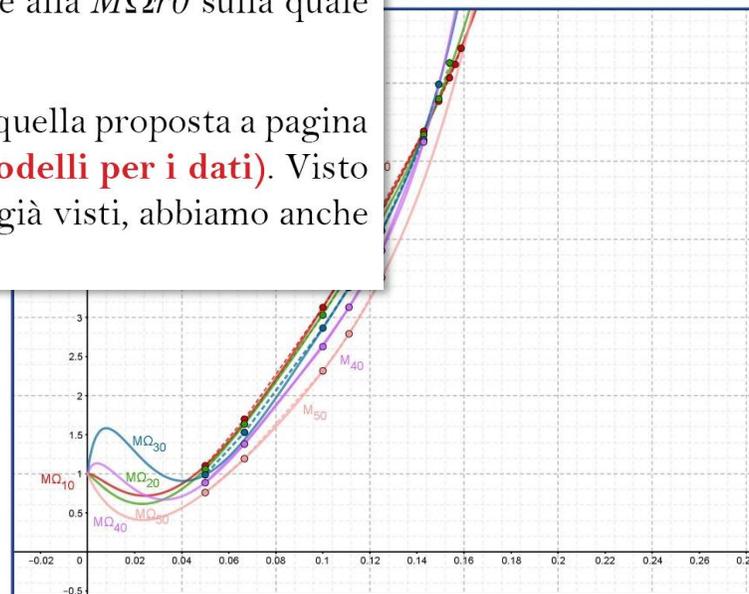
$$p_{20}(u) = 33227.10 \cdot u^4 - 12896.81 \cdot u^3 + 2360.80 \cdot u^2 - 335.55 \cdot u^2 - 13.74 \cdot u + 1.0$$

$$p_{30}(u) = 113035.63 \cdot u^4 - 51395.56 \cdot u^3 + 316.89 \cdot u + 1.0$$

$$+ 43.99 \cdot u^3 + 129.76 \cdot u + 1.0$$

$$+ 755.26 \cdot u^3 + 78.69 \cdot u + 1.0$$

ore inferiore a  $10^{-3}$ , a eccezione dell'ultima,  $p_{50}$ , artesiano che segue sono rappresentati i dati e le



Il progetto RiA  
 Matematica applicata  
 Il processo Partner  
 La struttura Modello affine  
 Onde gravitazionali  
 Metodo di lavoro  
 Come aiutare?  
**Il fascicolo**  
 Risultati



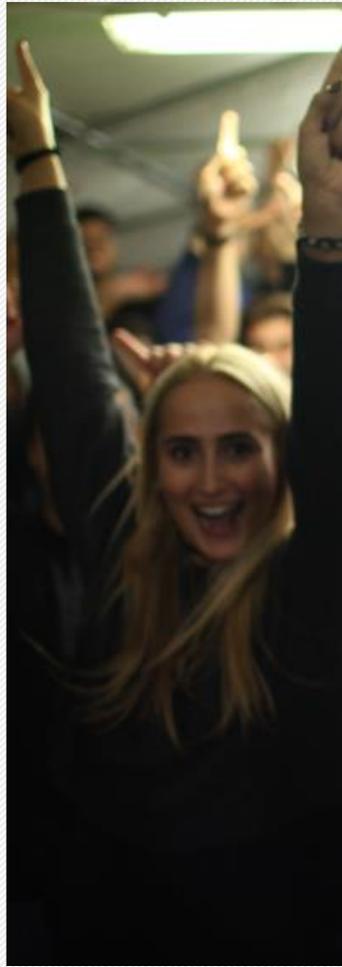
# Risultati



31

- La **dedizione** al progetto è l'aspetto (forse non dal punto di vista strettamente didattico ma sicuramente da quello umano) più appariscente ed esaltante
- Poi la **confidenza** che gli studenti hanno acquisito con il metodo sperimentale, con la ricerca, con le scienze in generale, nel pieno rispetto **delle finalità** che il consiglio di classe si era prefisso
- Infine il **coraggio**, la determinazione nell'affrontare i problemi, la capacità di trarsi d'impaccio davanti alle difficoltà, l'abilità di superare le incertezze

Tutte caratteristiche e prerogative che gli insegnanti del consiglio di classe hanno riconosciuto agli studenti, individuate anche in discipline non strettamente legate al progetto o all'ambito scientifico in cui esso è nato e maturato.



Lu(ri)doteca Latina  
www.luridoteca.net  
e-mail: info@luridoteca.net  
G+: luridoteca.latina@gmail.com

Perché il gioco? Beh! Innanzi tutto perché è divertente. Accingersi a giocare in qualche modo, come accingersi ad un lavoro, c'è lo stesso tipo di gioia e passione. E in questo senso il gioco è solo dei bambini ma è degli adolescenti e degli adulti ...  
(Alex Randolph, 1999)



RiA - Research in Action

Liceo G.B. Grassi di Latina - [www.liceograssilatina.org/](http://www.liceograssilatina.org/)

- Web: <http://researchinaction.it>
- E-mail: [ria@liceograssilatina.org](mailto:ria@liceograssilatina.org)
- YouTube: <https://www.youtube.com/channel/UC1PA7Zu78RUMBjnkaiOR8kA/>
- FB: <https://www.facebook.com/Research-in-Action-341307966417448/>

Liceo scientifico statale G.B. Grassi  
Via Padre Sant'Agostino 8, Latina  
www.liceograssilatina.org  
vicepresidenza@liceograssilatina.org

Liceo scientifico ordinario  
Liceo scientifico sportivo

G.B. Grassi

Magister

Vobis

