Iperreali
02 – i numeri iperreali

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina – www.liceograssilatina.org

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio

Un problema

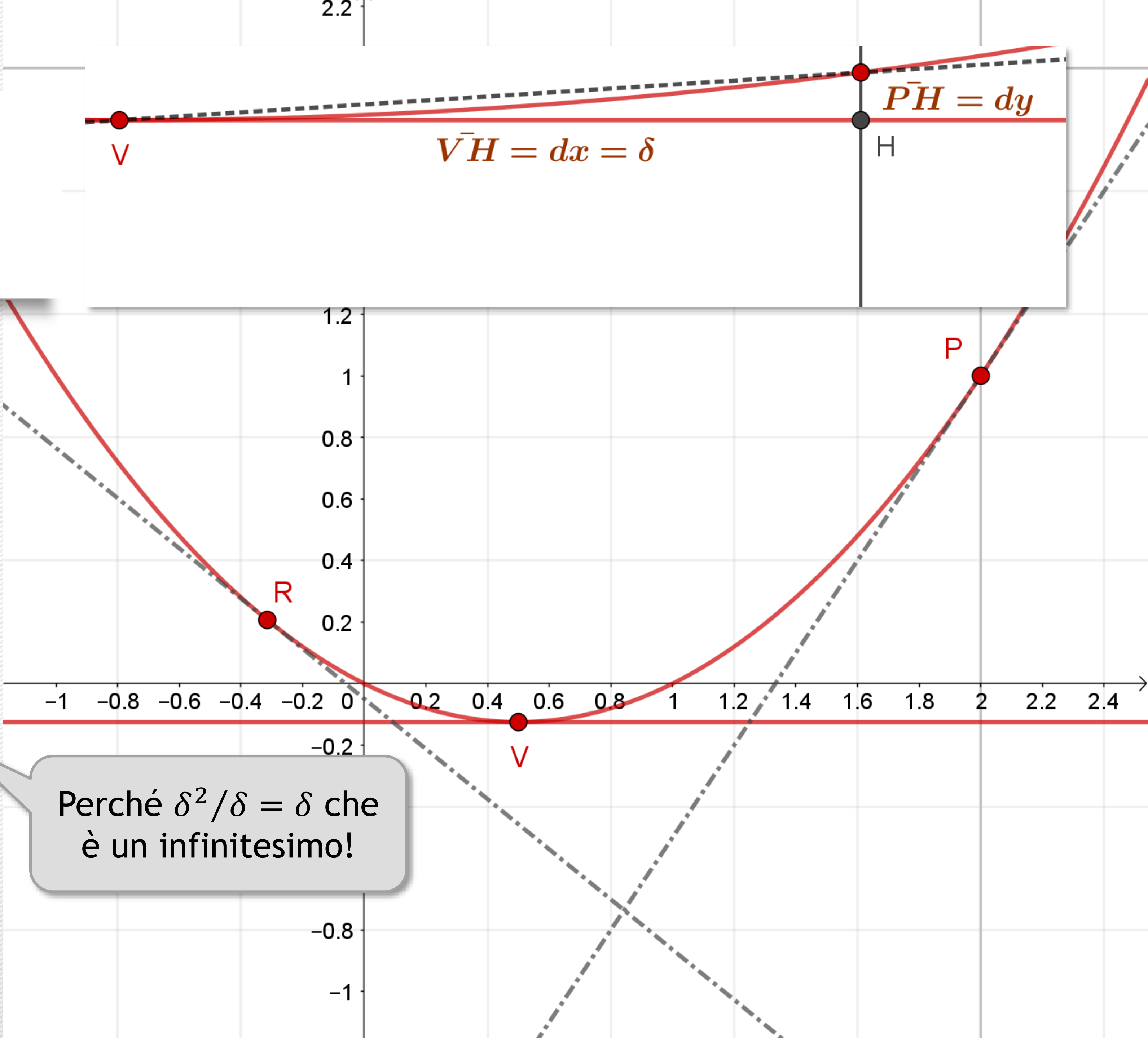
- Vogliamo determinare l'ascissa del vertice di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ (con asse parallelo all'asse delle ordinate)
- Il vertice della parabola è caratterizzato dal fatto di essere l'unico punto per il quale un microscopio ci mostra un segmento di tangenza orizzontale

Usando un linguaggio orientato agli infinitesimi, questo significa che **se ci spostiamo di un tratto infinitesimo dall'ascissa del vertice**, allora **la variazione di ordinata è un infinitesimo di ordine superiore allo spostamento infinitesimo in ascissa**

Operativamente …

- Se $dx = (x + \delta) - x = \delta$ con δ infinitesimo
- La corrispondente variazione dell'ordinata è $dy = \boldsymbol{y(x+\delta)} - \boldsymbol{y(x)}$ da cui: $\boldsymbol{a(x+\delta)^2 + b(x+\delta) + c} - \boldsymbol{(ax^2 + bx + c)}$
- e quindi:
  $2ax\delta + \delta^2 + b\delta = (2ax + b)\delta + \delta$^2
- Il termine $(2ax + b)\delta$ è un infinitesimo dello stesso ordine di dx
- Il termine $a\delta^2$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx
- Quindi, perché la x sia l'ascissa del vertice dovrebbe scomparire il termine $(2ax + b)\delta$
- Quindi $2ax + \mathrm{b} = 0$ da cui $x = -\frac{b}{2a}$

Perché $\delta^2/\delta = \delta$ che è un infinitesimo!



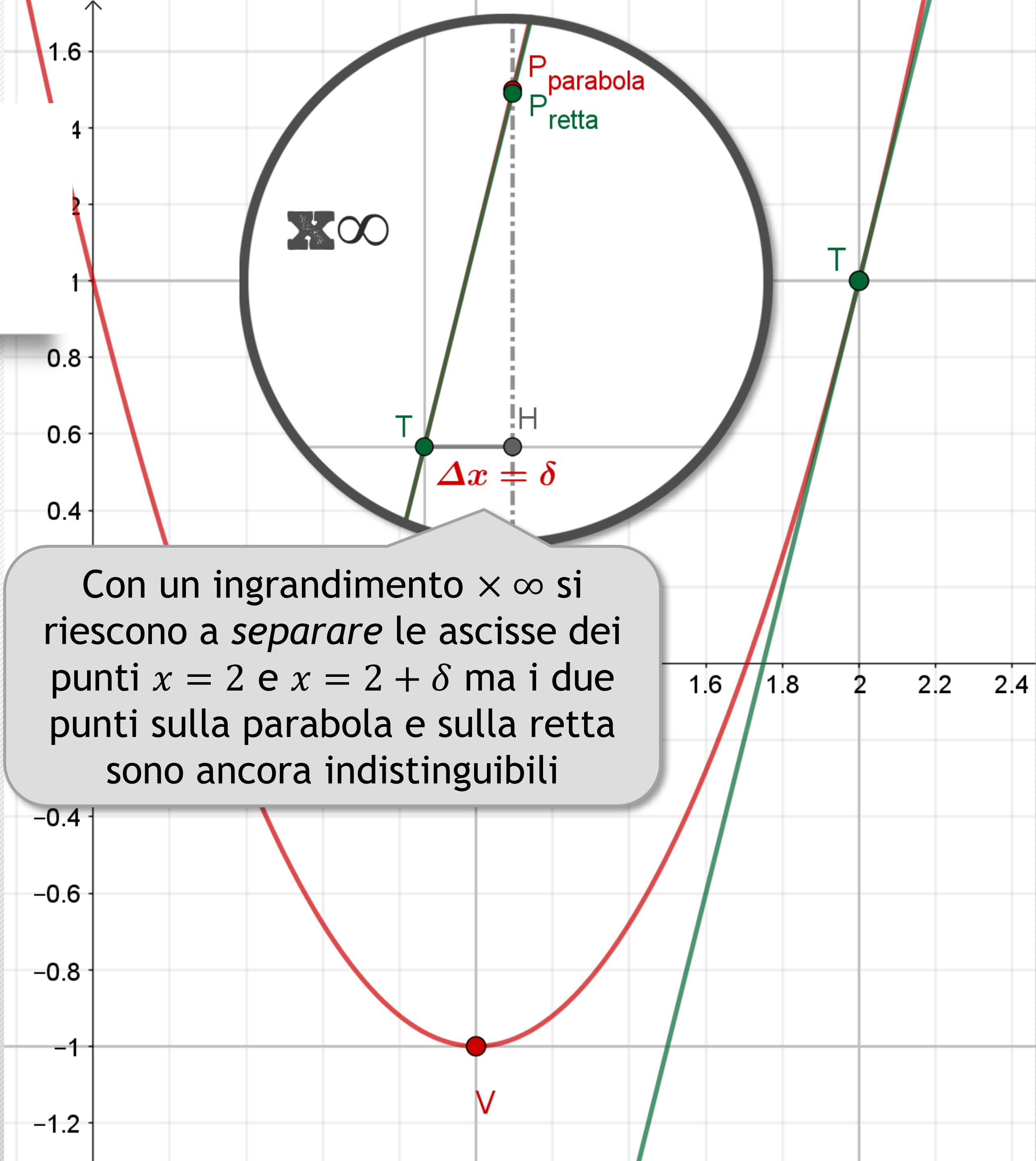
Un secondo problema

- Vogliamo determinare la tangente alla parabola $y = 2x^2 - 4x + 1$ nel suo punto $T(2,1)$
- La tangente è l'unica retta per la quale la differenza tra la sua ordinata e quella della funzione, in un punto a distanza infinitesima dal punto di contatto, risulta essere un infinitesimo di ordine superiore all'incremento infinitesimo in ascissa
- In altre parole, **spostandoci di un infinitesimo** dal punto di contatto, **retta e parabola sono infinitamente vicine**

Più vicine di quanto lo siano $x + \delta$ e x

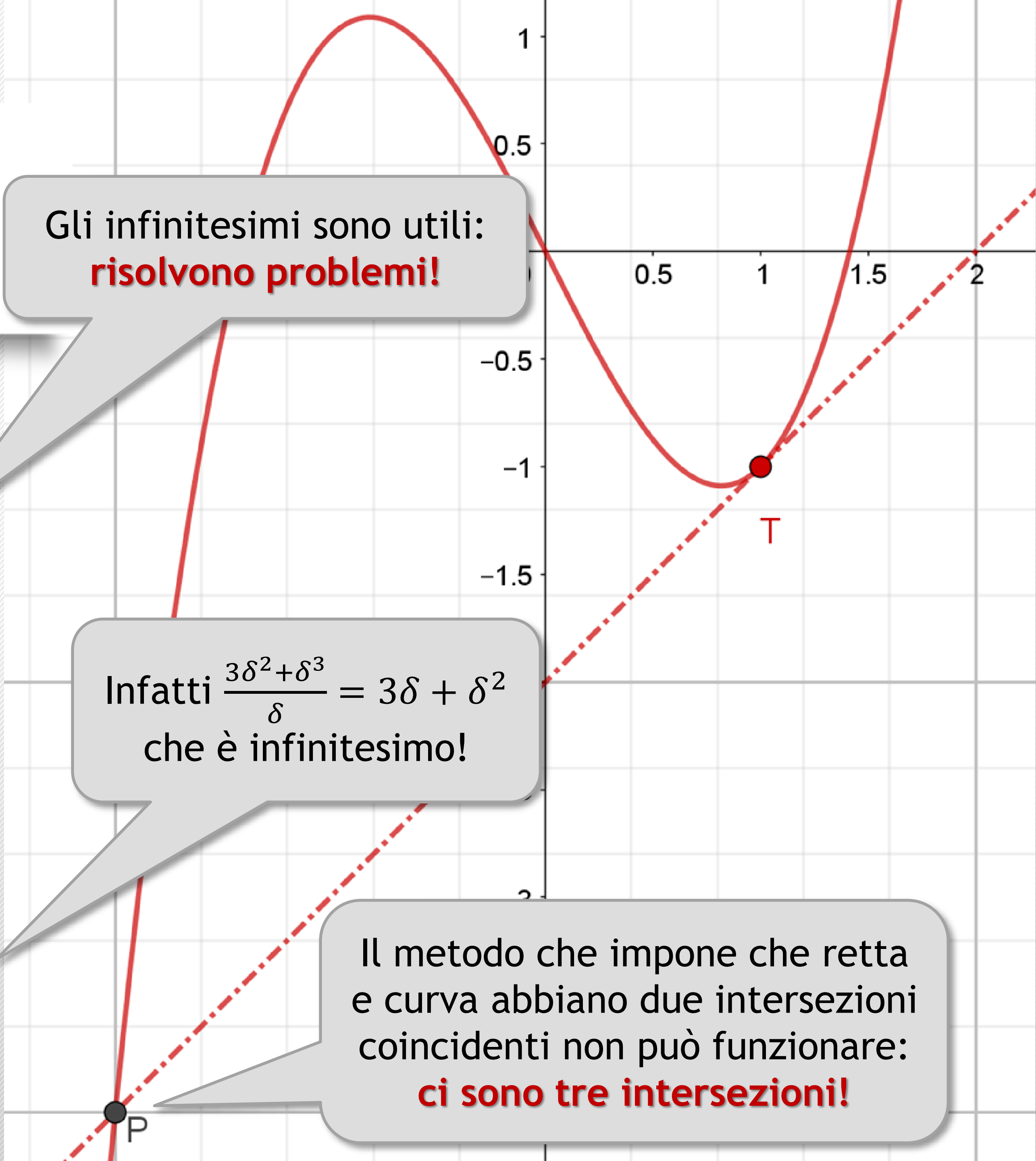
Operativamente …

- La retta passante per $T(2,1)$ è $y = mx - 2m + 1$
- Consideriamo il punto di ascissa $2 + \delta$ con δ infinitesimo:
  - l'ordinata della retta è
    $m(2+\delta) - 2m + 1 = 2m + m\delta - 2m + 1 = m\delta + 1$
  - l'ordinata della parabola è
    $2(2+\delta)^2 - 4(2+\delta) + 1 = 8 + 8\delta + 2\delta^2 - 8 - 4\delta + 1$
    $= 4\delta + 2\delta^2 + 1$
- La differenza tra ordinata della parabola e della retta è:
  $$4\delta + 2\delta^2 + 1 - (m\delta + 1) = (4 - m)\delta + 2\delta^2$$
- Perché questa differenza sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'incremento dell'ascissa deve essere $(4 - m) = 0$
- Ma allora $m = 4$ è la pendenza della retta tangente



Tangente a una cubica (1)

- Trovare la tangente alla cubica di equazione $y = x^3 - 2x$ nel suo punto $T(1, -1)$
- La retta per T: $y = mx - m - 1$
- Consideriamo il punto di ascissa $1 + \delta$ con δ infinitesimo:
  - l'ordinata della retta è $m(1 + \delta) - m - 1 = m + m\delta - m - 1 = \boldsymbol{m\delta - 1}$
  - l'ordinata della cubica è $(1 + \delta)^3 - 2(1 + \delta) = \boldsymbol{\delta + 3\delta^2 + \delta^3 - 1}$
- La differenza di ordinate è: $\boldsymbol{\delta + 3\delta^2 + \delta^3 - 1} - \boldsymbol{(m\delta - 1)} = \boldsymbol{(1 - m)\delta} + 3\delta^2 + \delta^3$
- $3\delta^2$ e δ^3 sono infinitesimi di ordine superiore a δ quindi è sufficiente che $\boldsymbol{(1 - m)} = 0$ per cui $m = +1$



Gli infinitesimi sono utili: **risolvono problemi!**

Infatti $\frac{3\delta^2+\delta^3}{\delta} = 3\delta + \delta^2$ che è infinitesimo!

Il metodo che impone che retta e curva abbiano due intersezioni coincidenti non può funzionare: **ci sono tre intersezioni!**

Qui o dappertutto?

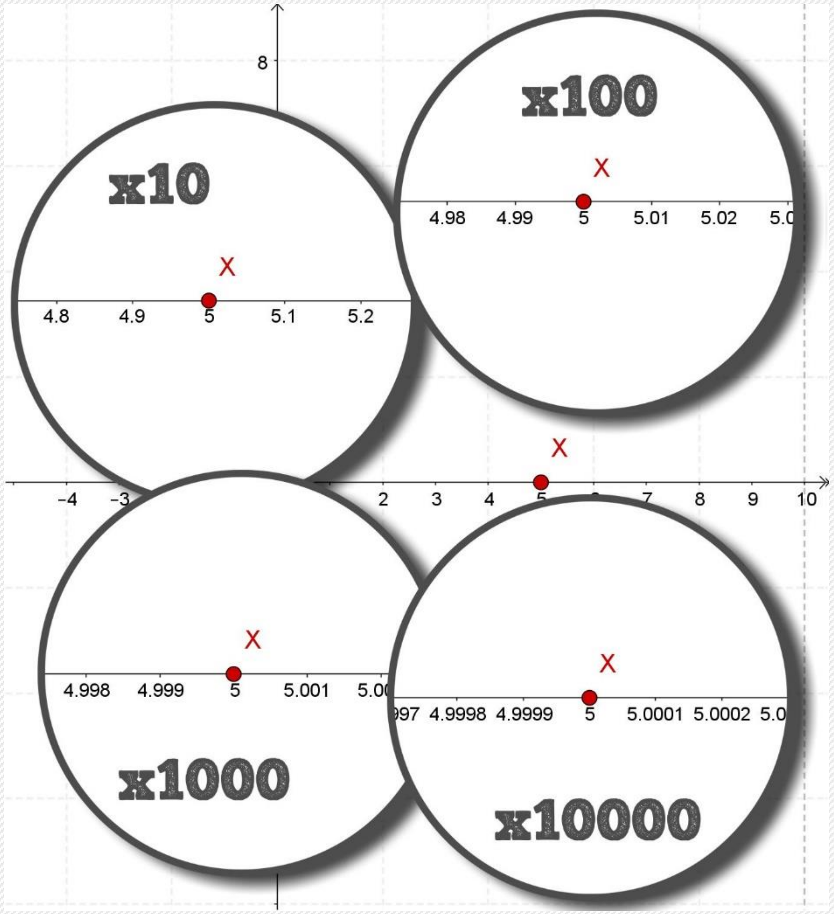
- È bene far notare che il metodo del discriminante in questo esempio non potrebbe funzionare:
  - la retta tangente in T ha due intersezioni con la curva
  - due coincidenti in T e un’altra in P
- Infatti il metodo del discriminante richiede che la retta tangente e la curva abbiano due sole intersezioni (coincidenti) in tutto il dominio
- Ma il metodo che abbiamo usato ***lavora solo localmente***: in punti infinitamente vicini al punto di tangenza

Il metodo che usa gli infinitesimi richiede che la variazione delle ordinate sia di un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla variazione delle ascisse …

… variazioni calcolate per due punti **infinitamente vicini** quindi il processo non è *disturbato* dalla presenza dell’ulteriore intersezione!

Microscopi (1)

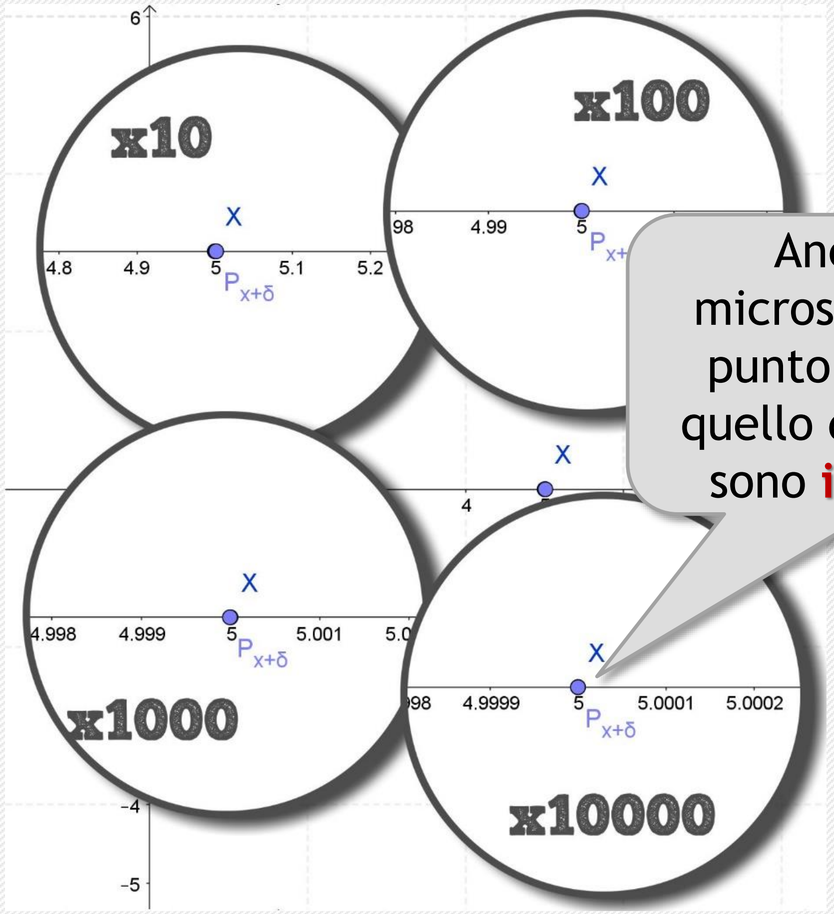
- Un **microscopio standard $\times\, n$** *punta* a un numero reale x e ingrandisce i dintorni di n volte
- Quindi le *tacche* sull'asse delle ascisse diventano $x \pm \frac{1}{n}, x \pm \frac{2}{n}, \ldots$
- Le distanze fra i numeri vicini, ingrandite al microscopio, appaiono uguali alle distanze nelle zone non ingrandite della retta, ma in realtà sono distanze n volte minori



Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard** $\times n$ non hanno un ingrandimento sufficiente:

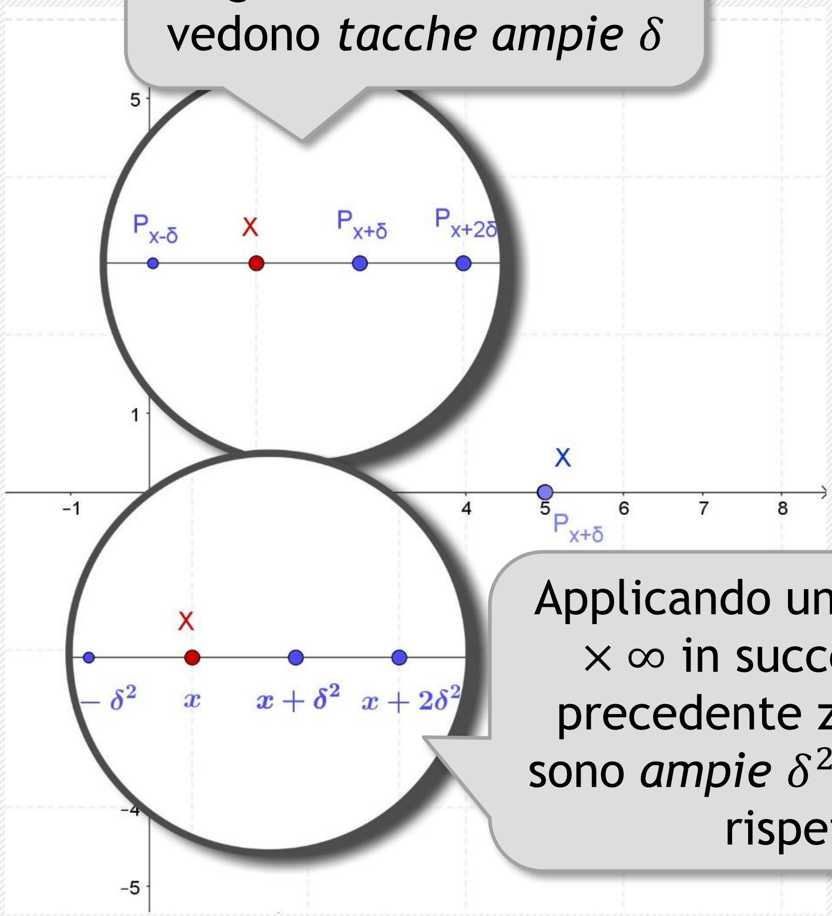
un punto x e un punto infinitamente vicino $x + \delta$ resteranno sempre **indistinguibili**



Anche con un microsopio $x10000$ il punto di ascissa x e quello di ascissa $x + \delta$ sono **indistinguibili**

Microscopi (3)

- Abbiamo bisogno di uno strumento **non standard**
- Un microscopio $\times\,\infty$ capace di infiniti ingrandimenti
- Le *tacche* sugli assi saranno allora i multipli dell'infinitesimo in questione
  - i numeri standard non saranno più visibili
- Usando più volte lo zoom $\times\,\infty$ potremo vedere numeri che sono infinitesimi anche rispetto a un infinitesimo

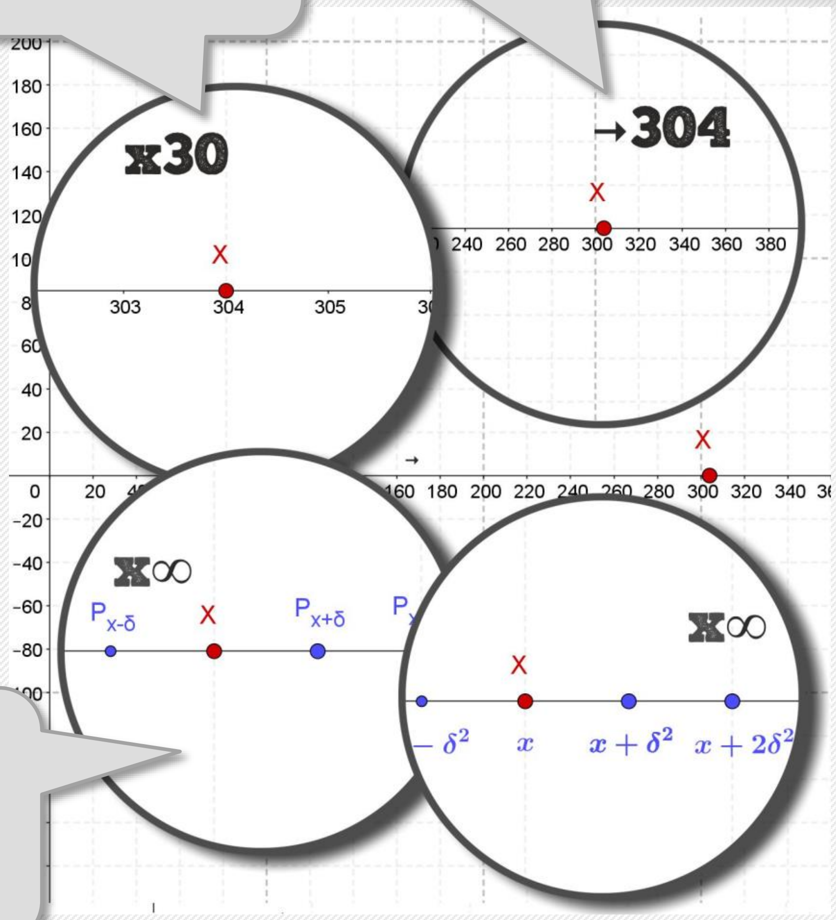


Telescopi

- Un **telescopio → $\boldsymbol{n}$** *punta* a un numero reale n e lo *mette al centro* campo visivo
- Non modifica le *tacche* dell'asse delle ascisse
- Se usato in combinazione con un microscopio mostra i *dintorni* infinitamente vicino a un numero anche molto grande

Un microscopio standard aumenta lo zoom di trenta volte

Il telescopio → 304 porta il numero al centro del campo visivo



Due microscopi non standard permettono di visualizzare i numeri infinitamente vicini e 304

Il postulato di Eudosso-Archimede

- Il postulato di Eudosso-Archimede può essere espresso in una di questa due forme:

  Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore

  Dati due segmenti diversi, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore

- In pratica: è sempre possibile esprimere la lunghezza di un segmento con un numero intero, un multiplo o un sottomultiplo dell’unità di misura scelta (non necessariamente razionale)
- Il postulato esclude l’esistenza di infiniti e infinitesimi

Per definire gli iperreali dobbiamo rinunciare a questo assioma!

Definizioni

- **Standard** $a, b, c, \dots$ i numeri reali
- **Infinitesimi** $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ numeri più piccoli di qualunque numero standard positivo: $|\varepsilon| < x \ \forall x > 0 \ standard$
  - lo zero è minore di ogni numero standard positivo: è l'unico numero standard infinitesimo
- **Finiti**, minori di almeno un numero standard: $|x| < a$ per almeno un $a > 0$ standard
  - quindi gli infinitesimi sono finiti
- **Infiniti** $A, B, C, \dots$ numeri maggiori in valore assoluto di ogni numero standard: $|M| > x \ \forall x > 0 \ standard$
  - i numeri standard non sono infiniti (non sono maggiori di tutti gli standard)

Useremo $x, y, z, \dots$ per indicare un numero qualunque

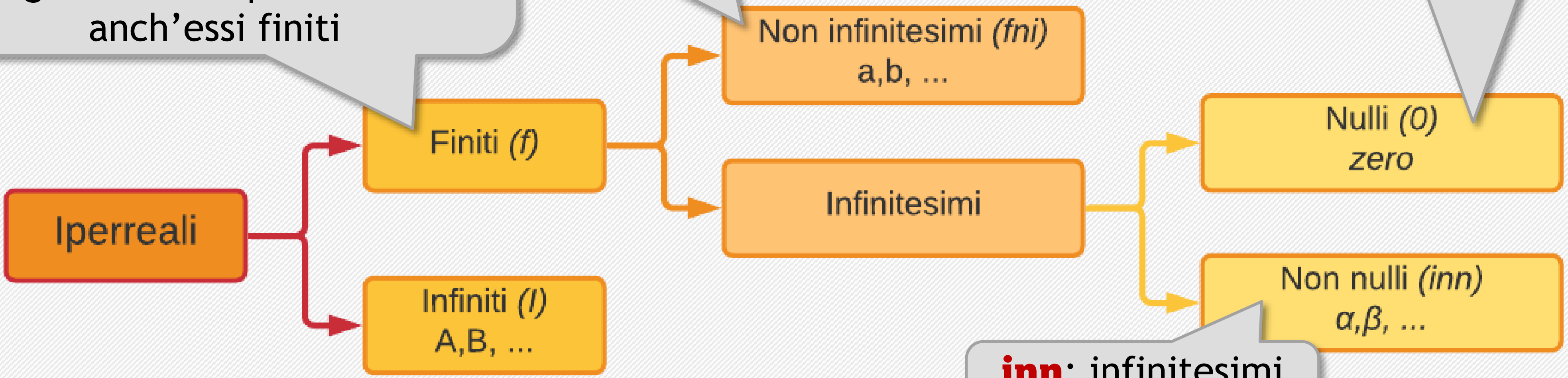
Quindi i numeri standard sono finiti

Iperreali - tipologia

I numeri finiti **f** sono i numeri standard (i reali) e gli infinitesimi che essendo minori di ogni standard positivo sono anch’essi finiti

fni: finiti non infinitesimi

Lo zero è l’unico numero standard minore di ogni altro standard positivo e quindi è un infinitesimo



inn: infinitesimi non nulli

Reciproci

- Il reciproco $1/\delta$ di un infinitesimo **(inn)** δ è un infinito **(I)**, infatti:
  - supponiamo per semplicità $\delta > 0$, $\delta < \frac{1}{n}$ $\forall n$ standard (quindi finito) positivo per definizione
  - quindi $\frac{1}{\delta} > n$ $\forall n$ standard per cui $1/\delta$ è un infinito
- Il reciproco di un infinito **(I)** è un infinitesimo **(inn)**, infatti:
  - Supponiamo per semplicità $M > 0$, allora $M > \frac{1}{n}$ $\forall n$ standard positivo per definizione
  - quindi $\frac{1}{M} < n$ $\forall n$ standard per cui $1/M$ è un infinitesimo

Operazioni: la somma

+	inn	fni	I
inn			
fni			
I			

Operazioni: la somma

La somma di infinitesimi può anche essere nulla: $\delta + (-\delta) = 0$

La somma di finiti non infinitesimi può anche essere nulla: $a + (-a) = 0$

$+$	inn	fni	I
inn	i	fni	I
fni	fni	f	I
I	I	I	?

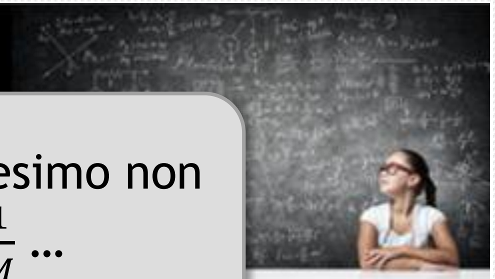
La somma di infiniti può essere un infinito ma anche nulla o addirittura un infinitesimo non nullo: $(N + \varepsilon) + (-N) = \varepsilon$

Operazioni: il prodotto

$\times$	**inn**	**fni**	**I**
inn			
fni			
I			

x	$1/x$
inn	
fni	
I	

Operazioni: il prodotto



Il prodotto di un infinito per un infinitesimo non nullo può anche essere un finito non infinitesimo: $M \cdot \frac{1}{M} = 1$ …

… ma anche un infinitesimo non nullo: $M \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{1}{M}$ …

… o un infinito: $M^2 \cdot \frac{1}{M} = M$

×	inn	fni	I
inn	inn	inn	?
fni	inn	fni	I
I	?	I	I

x	$1/x$
inn	I
fni	fni
I	inn

Ordinamento

- Per i numeri standard vale l'ordinamento consueto:
  - Lo zero è minore di tutti i numeri positivi
  - Gli infinitesimi sono minori di tutti i finiti non infinitesimi positivi
  - I finiti non infinitesimi sono minori degli infiniti positivi
  - Tra i finiti non infinitesimi diremo che $a > b$ se $\mathrm{a} - b > 0$
- Riassumendo:

$$0 < \varepsilon < a < M$$

  - con $\varepsilon > 0$, $a > 0$ e $M > 0$

Un esercizio

- Consideriamo l'espressione $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$:
  - se calcolata per $x = 2$ è impossibile (numeratore e denominatore sono entrambi nulli)
- Proviamo a calcolarla per $x = 2 + \alpha$ che è un numero infinitamente vicino a 2 :

$$\frac{(2+\alpha)^2 - 5(2+\alpha) + 6}{2+\alpha-2} = \frac{4 + 4\alpha + \alpha^2 - 10 - 5\alpha + 6}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$

- A questo punto possiamo raccogliere e semplificare: $\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} = \alpha - 1$
- Il risultato è infinitamente vicino a -1

In pratica, senza un microscopio non standard $\times\, \infty$ i due numeri $\alpha - 1$ e -1 sono **indistinguibili**

Ordinamento di infinitesimi

- ε è **un infinitesimo di ordine superiore** rispetto a δ se ε/δ è un infinitesimo (o se δ/ε è un infinito) : $\varepsilon = \boldsymbol{o}(\delta)$
  - p.es.: ε^3 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\varepsilon^2 + 5\varepsilon$ infatti $\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^2+5\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^3\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{5}{\varepsilon^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+\frac{5}{\varepsilon^2}}$ che è un infinitesimo perché $1/\varepsilon$ e $5/\varepsilon^2$ sono infiniti
- Due infinitesimi ε, δ sono dello stesso ordine se $\varepsilon/\delta = a$
- ε è **un infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a δ se ε/δ è un infinito (o se δ/ε è un infinitesimo) :$\delta = \boldsymbol{o}(\varepsilon)$
  - p.es.: $\varepsilon^2 + 5\varepsilon$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a ε^3 infatti $\frac{\varepsilon^2+5\varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{\varepsilon^3\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{5}{\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{\varepsilon^2}$ che è un infinito perché $1/\varepsilon$ e $5/\varepsilon^2$ sono infiniti
- Quindi $\varepsilon > \delta$ se $\delta = o(\varepsilon)$

Non c'è una simbologia specifica per *ordine superiore*

Ordinamento di infiniti

- A è **un infinito di ordine superiore** rispetto a B se A/B è un infinito (o se B/A è un infinitesimo) : $A = \boldsymbol{O}(B)$
  - p.es.: M^3 è un infinito di ordine superiore rispetto a $M^2 + 5M$ infatti $\frac{M^3}{M^2+5M} = \frac{1}{\frac{1}{M}+\frac{5}{M^2}}$ che è un infinito perché $1/M$ e $5/M^2$ sono infinitesimi
- Due infiniti A, B sono dello stesso ordine se $A/B = a$
- A è **un infinito di ordine inferiore** rispetto a B se A/B è un infinitesimo (o se B/A è un infinito) : $B = \boldsymbol{O}(A)$
  - p.es.: $M^2 + 5M$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a M^3 infatti $\frac{M^2+5M}{M^3} = \frac{M^3\left(\frac{1}{M}+\frac{5}{M^2}\right)}{M^3} = \frac{1}{M} + \frac{5}{M^2}$ che è un infinitesimo perché $1/M$ e $5/M^2$ sono infinitesimi
- Quindi $A > B$ se $A = O(B)$

Non c'è una simbologia specifica per *ordine superiore*

Monadi

Infinitamente vicino è una relazione di equivalenza!

- Un numero x è **infinitamente vicino** a y se $|x-y|$ è un infinitesimo: $x \approx y$
- L'insieme dei numeri infinitamente vicini a x è la **monade** di x e si indica con $\mathbf{mon}(\boldsymbol{x})$
  - p.es.: tutti i numeri del tipo $3+\alpha$, con α infinitesimo, appartengono a $\mathrm{mon}(3)$
  - $\mathrm{mon}(0)$ è l'insieme di tutti gli infinitesimi
  - se x è infinitesimo $x \in \mathrm{mon}(0)$ e $x \approx 0$ sono affermazioni corrette
- Se a, b sono standard con $a \neq b$ allora $|a-b|$ è finita e quindi due numeri standard non possono appartenere alla stessa monade
- Le monadi ricoprono gli iperreali senza sovrapporsi

Ogni monade contiene uno e un solo numero finito

Sono una partizione della retta iperreale

Parte standard

- Se x è un numero iperreale si può scrivere come $x = s + \beta$ dove:
  - s è la sua **parte standard $s = \text{std}(x)$** (anche pari a zero quando il numero è un infinitesimo)
  - β è la sua **parte infinitesima** (anche nulla quando x è un numero standard)
- È importante notare che, se x, y sono due iperreali:
  - $\text{std}(x + y) = \text{std}(x) + \text{std}(y)$
  - La somma delle parti infinitesime è ancora un infinitesimo

Indistinguibili

- $x, y \neq 0$ sono **indistinguibili** $x \sim y$ se la loro differenza è infinitesima rispetto a entrambi:
  - $\frac{|x-y|}{x}$ è un infinitesimo (o anche $\frac{|x-y|}{x} \approx 0$) e …
  - … $\frac{|x-y|}{y}$ è un infinitesimo (o anche $\frac{|x-y|}{y} \approx 0$)
- $x \sim y$ se $\operatorname{std}(x/y) = 1$, infatti:
  - se $x \sim y$ allora $\frac{x-y}{y} = \alpha$ e quindi $x - y = \alpha y$ o anche $x = \alpha y + y = y(\alpha + 1)$
  - da cui $\frac{x}{y} = \frac{y(\alpha+1)}{y} = \alpha + 1$ per cui $\operatorname{std}\left(\frac{x}{y}\right) = 1$

Il rapporto delle parti standard di due numeri indistinguibili è pari a uno

Alcune proprietà …

- $k + \alpha \sim k$ finito più infinitesimo è indistinguibile dal numero finito
- Per i numeri finiti $a \sim b$ e $a \approx b$ è la stessa cosa
  - ma può non essere vero $a = b$, p.es.: $a = s + \alpha$ e $b = s$
- Se $\alpha \approx \beta$ non è detto che $\alpha \sim \beta$ (possono avere $\mathrm{std}\frac{\alpha}{\beta} \neq 1$, p.es: ε e 5ε)
- $M \sim N$ se la differenza è un numero finito, un infinitesimo o un infinito di ordine inferiore:
  - $M \sim M + \alpha$
  - $M \sim M + k$
  - $M^2 \sim M^2 + M$

… e qualche regola

- Sommando due infinitesimi si può trascurare un infinitesimo di ordine superiore: $\alpha + \beta \sim \alpha$ se $\beta = o(\alpha)$
- Sommando un fni con un infinitesimo si può trascurare l'infinitesimo: $a + \varepsilon \sim a$
- Sommando un infinito con un infinitesimo si può trascurare l'infinitesimo:
$$M + \beta \sim M$$
- Sommando un infinito con un fni si può trascurare quest'ultimo:
$$\mathrm{N} + d \sim N$$
- Sommando due infiniti si può trascurare quello di ordine inferiore:
$$M + M^2 \sim M$$

Bibliografia

- AA.VV. – *Elementi di analisi non standard* – 2015, in Matematicamente (pubblicazione della sezione veronese di Mathesis)
- Goldoni, G. – *I numeri iperreali*– 2017, Ilmiolibro
- Robinson, A. - *Non standard analysis – 1996, Priceton University Press*
- Stecca, B. & Zambelli, D. – *Analisi non standard* – 2015, docplayer.it/4477695-Analisi-non-standard-release-0-0-1-b-stecca-d-zambelli.html