Iperreali
03 – calcolo differenziale

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina – www.liceograssilatina.org

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio

Un problema

- Abbiamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità iniziale v_0 e accelerazione $a > 0$ a partire da una posizione s_0
- L'equazione del moto sarà $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$, vogliamo calcolare la velocità istantanea v
- Per definizione la velocità istantanea sarà:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{s(t+dt) - s(t)}{(t+dt) - t}$$

Ricordiamo che la velocità media è $v_{media} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{(t+\Delta t) - t}$ ma in questa espressione dt è un infinitesimo

Usando un linguaggio orientato agli infinitesimi, è il rapporto tra la variazione dello spazio e il tempo trascorso **per un intervallo di tempo infinitesimo dt**

Operativamente

Gli infinitesimi continuano a **risolvere problemi!**

- La posizione del punto all'istante t è $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$
- La posizione all'istante $t+\alpha$, dove α è un tempo infinitesimo, è:

$$s(t+\alpha)=\frac{1}{2}a(t+\alpha)^2+v_0(t+\alpha)+s_0=\frac{1}{2}at^2+a\alpha t+\frac{1}{2}a\alpha^2+v_0t+v_0\alpha+s_0$$

- per cui:

$$s(t+\alpha)-s(t)=\frac{1}{2}at^2+\boldsymbol{a\alpha t}+\boldsymbol{\frac{1}{2}a\alpha^2}+v_0t+\boldsymbol{v_0\alpha}+s_0-\frac{1}{2}at^2-v_0t-s_0$$

- ma allora:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\alpha(at+v_0)+\frac{1}{2}a\alpha^2}{\alpha}=at+v_0+\frac{1}{2}a\alpha$$

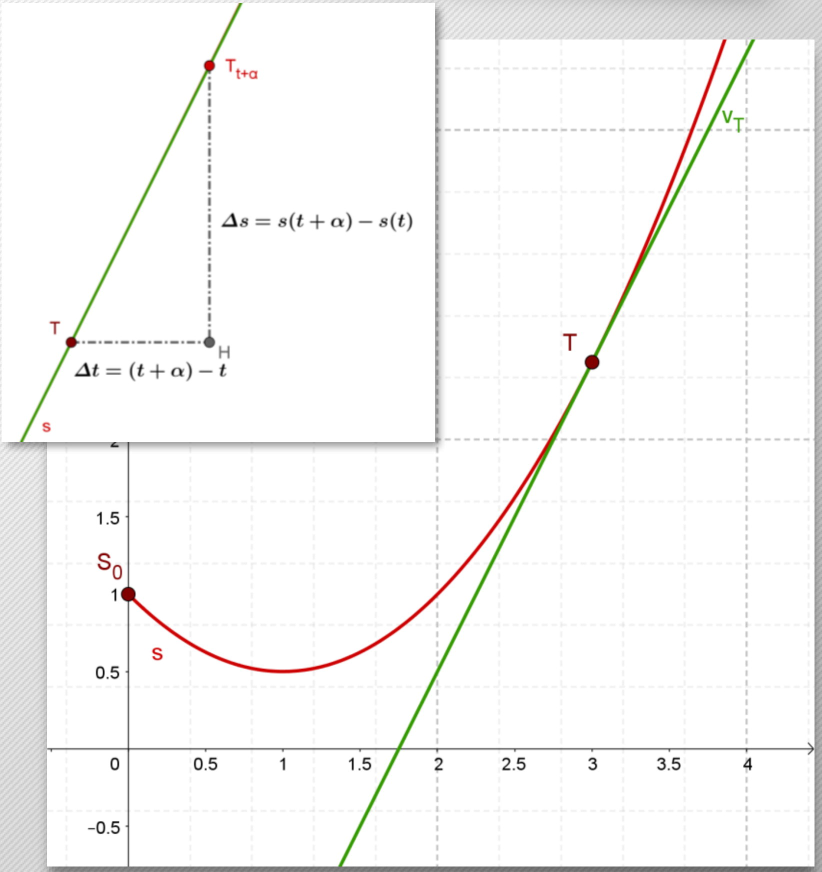
- Considerato che α è un infinitesimo:

$$\boldsymbol{v(t)=\mathrm{std}\left(at+v_0+\frac{1}{2}a\alpha\right)=at+v_0}$$

… che è proprio la legge della velocità in un moto uniformemente accelerato

Abbiamo fatto molto di più!

- In realtà la soluzione è molto più *ricca* di quanto possa sembrare a prima vista:
  - std $\frac{ds}{dt}$ è il tasso di variazione istantanea dello spazio (variazione rispetto al tempo)
  - Se rappresentiamo $s(t)$ su un piano cartesiano il tasso di variazione istantaneo corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente
  - Ma abbiamo risolto questo problema per un istante (per un'ascissa) t qualunque, quindi, in un certo senso:
- Abbiamo trovato **tutti i coefficienti angolari delle tangenti** alla $s(t)$ per ogni possibile $t \epsilon \mathbb{R}$



Un punto materiale, inizialmente posto nell'origine O di un piano cartesiano Oxy parte da fermo con velocità costante $v_0 = 3\, m/s$ e accelerazione $a = 4\, m/s^2$ (sia $\vec{v}$ che $\vec{a}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse delle x:

- Determinare la legge oraria del moto
- Usare il procedimento appena visto per dimostrare che la velocità istantanea è data da $v(t) = 3 + 4t$
- Rappresentare su un piano cartesiano Ots la legge oraria del moto e determinare l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $\bar{t} = 1$, verificare che il coefficiente angolare della retta tangente è proprio $v(1)$

$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}\cdot 4t^2 + 3t + 0 = 2t^2 + 3t \rightarrow V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right) \quad s(1) = 5$

$s(t+\alpha) = 2(t+\alpha)^2 + 3(t+\alpha) = 2t^2 + 4\alpha t + 2\alpha^2 + 3t + 3\alpha$

$s(t+\alpha) - s(t) = 2t^2 + 4\alpha t + 2\alpha^2 + 3t + 3\alpha - (2t^2 + 3t) = 4\alpha t + 2\alpha^2 + 3\alpha = (4t+3)\alpha + 2\alpha^2$

$\frac{ds}{dt} = \frac{(4t+3)\alpha + 2\alpha^2}{t+\alpha-t} = 4t + 3 + 2\alpha = 4t + 3 \Rightarrow v(t) = 4t+3$

↳ α è infinitesimo

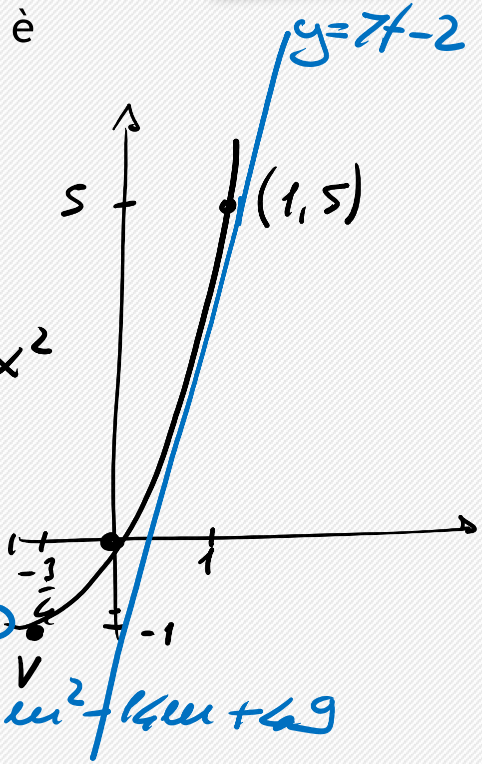
$s - 5 = m(t-1) \quad s = mt - m + 5 \Rightarrow 2t^2 + 3t = mt - m + 5 \quad 2t^2 + 3t - mt + m - 5 = 0$

$2t^2 + (3-m)t + m - 5 = 0 \quad \Delta = (3-m)^2 - 8(m-5) = 9 + m^2 - 6m - 8m + 40 = m^2 - 14m + 49$

$\Delta = (m-7)^2 = 0 \quad m = 7 \quad y = 7t - 2$

$v(1) = 4 + 3 = 7$

il coefficiente angolare è proprio la velocità in quell'istante



non è un moto rettilineo uniformemente accelerato

Un punto materiale si muove sull'asse delle ascisse con legge oraria $s(t) = -t^3 + 2t$:

- Determinare la legge $v(t)$ che rappresenta la velocità istante per istante (si otterrà $v(t) = -3t^2 + 2$)
- Quanto vale la velocità iniziale v_0 del moto?
- Utilizzando GeoGebra rappresentare su un piano cartesiano Ots la legge oraria del moto e determinare l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $\bar{t} = 1$, verificare che il coefficiente angolare della retta tangente è proprio $v(1)$

6

$s(t) = -t^3 + 2t \qquad s(t+\alpha) = -(t+\alpha)^3 + 2(t+\alpha) = -t^3 - 3t^2\alpha - 3t\alpha^2 - \alpha^3 + 2t + 2\alpha =$

$s(t+\alpha) - s(t) = -t^3 - 3t^2\alpha - 3t\alpha^2 - \alpha^3 + 2t + 2\alpha + t^3 - 2t = -3t^2\alpha - 3t\alpha^2 - \alpha^3 + 2\alpha$

$= (-3t^2 + 2)\alpha - 3t\alpha^2 - \alpha^3$

infinitesimo perché α è infinitesimo

infinitesimo perché " "

$\frac{ds}{dt} = \frac{(-3t^2+2)\alpha - 3t\alpha^2 - \alpha^3}{\alpha} = -3t^2 + 2 - 3t\alpha - \alpha^2 = -3t^2 + 2$

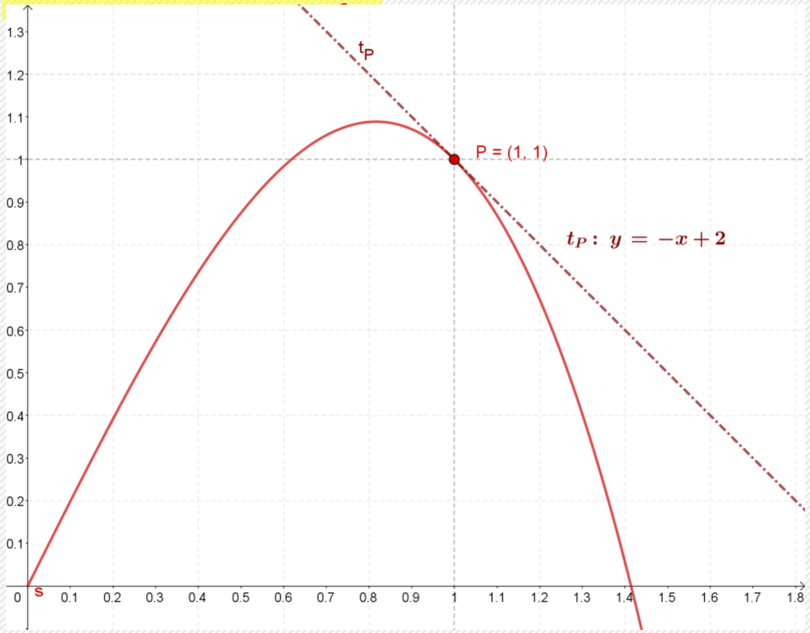
$v(t) = -3t^2 + 2$

istante iniziale

$v(0) = +2 \Rightarrow v_0 = 2$

velocità all'istante $\bar{t} = 1$

$v(1) = -3 + 2 = -1$



Riproviamo

- Vogliamo trovare la tangente a una parabola $y = ax^2 + bx + c$ nel punto x generico con lo stesso metodo:

$$dy = y(x+\delta) - y(x) = (2ax+b)\delta + a\delta^2$$

- Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2ax+b)\delta + a\delta^2}{\delta} = 2ax + b + a\delta$$

- Tenendo conto che δ è infinitesimo abbiamo $\frac{dy}{dx} \sim 2ax + b$ o meglio, che il coefficiente angolare è $\boldsymbol{m} = \mathrm{std}\frac{dy}{dx} = \mathrm{std}(2ax + b + a\delta) = \boldsymbol{2ax + b}$

Al variare di x questa espressione fornisce il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel suo punto di ascissa x!

Attenzione: per un ascissa x qualsiasi!

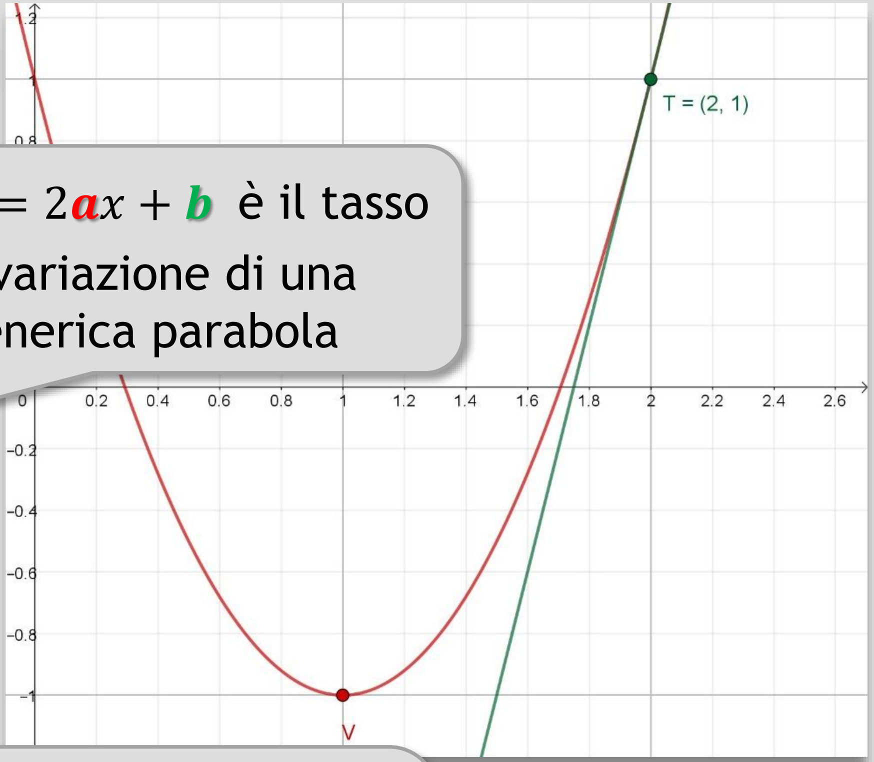
Un esercizio

- Vogliamo determinare la tangente alla parabola $y = \mathbf{2}x^2 - \mathbf{4}x + 1$ nel suo punto $T(\mathbf{2}, 1)$
- Il coefficiente angolare di una tangente generica a questa parabola è

$$m = \operatorname{std}\frac{dy}{dx} = 2\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b} = 2 \cdot \mathbf{2} \cdot x - \mathbf{4} = 4x - 4$$

- Se vogliamo la tangente per $x = \mathbf{2}$ dobbiamo semplicemente sostituire: $m = 4 \cdot \mathbf{2} - 4 = 4$
- Ora non resta che sostituire il coefficiente angolare nell'equazione della generica retta passante per T

Rapido, efficace, semplice!



$\operatorname{std}\frac{dy}{dx} = 2\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ è il tasso di variazione di una generica parabola

Questi numeri iperreali sembrano davvero sempre più utili per **risolvere i problemi!**

- Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 2$ usando il procedimento appena visto
- Determinare ancora la tangente alla parabola nel suo punto di ascissa $x_1 = 3$

$\rightarrow a$ $\quad \rightarrow b$

9

$std\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2ax + b = -x + 4$ se $x_0 = 2 \Rightarrow m_2 = -2 + 4 = 2$

coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto di ascissa 2

$\rightarrow$ stessa formula se $x_1 = 3 \Rightarrow m_3 = -3 + 4 = -1$

coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto di ascissa 3

- È possibile determinare, con un metodo simile, una legge, una funzione, che fornisca il coefficiente angolare – al variare della x – alla cubica di equazione $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$?

$$y(x+\delta) = \frac{1}{3}(x+\delta)^3 + \frac{1}{2}(x+\delta)^2 = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x\delta + \delta^2) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2\delta + x\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\delta + \frac{1}{2}\delta^2$$

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 \qquad + \frac{1}{2}x^2$$

$$dy = x^2\delta + x\delta + \frac{1}{3}\delta^3 + x\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^2 = (x^2+x)\delta + \left(x+\frac{1}{2}\right)\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3$$

infinitesimi di ordine superiore rispetto a δ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x)\delta + \left(x+\frac{1}{2}\right)\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3}{x+\delta-x} = x^2 + x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\delta + \frac{1}{3}\delta^2$$

↳ questa è la parte standard di $\frac{dy}{dx}$ ⇒

⇒ $std\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + x$ è una funzione che restituisce tutti i coeff. angolari delle tangenti a $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$!!

 23/04/2022

- È possibile determinare, con un metodo simile, una legge, una funzione, che fornisca il coefficiente angolare – al variare della x – alla generica cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$?
- Usare la legge appena trovata per scrivere l'equazione della retta tangente alla $y = x^3 - 2x + 3$ nel suo punto di ascissa nulla

$$y(x+\delta) = a(x+\delta)^3 + b(x+\delta)^2 + c(x+\delta) + d =$$
$$= ax^3 + 3ax^2\delta + 3ax\delta^2 + bx^2 + 2bx\delta + b\delta^2 + cx + c\delta + d$$
$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$dy = 3ax^2\delta + 3ax\delta^2 + 2bx\delta + b\delta^2 + c\delta$$
$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 3ax\delta + 2bx + b\delta + c \Rightarrow std\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3ax^2 + 2bx + c$$

questa formula (funzione) fornisce tutti i coefficienti angolari a tutte le funzioni del tipo $ax^3 + \ldots$

calcolata per $x=0 \Rightarrow m = c$

nel caso particolare se $y = x^3 - 2x + 3 \Rightarrow std\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x^2 - 2 \Rightarrow m = -2$

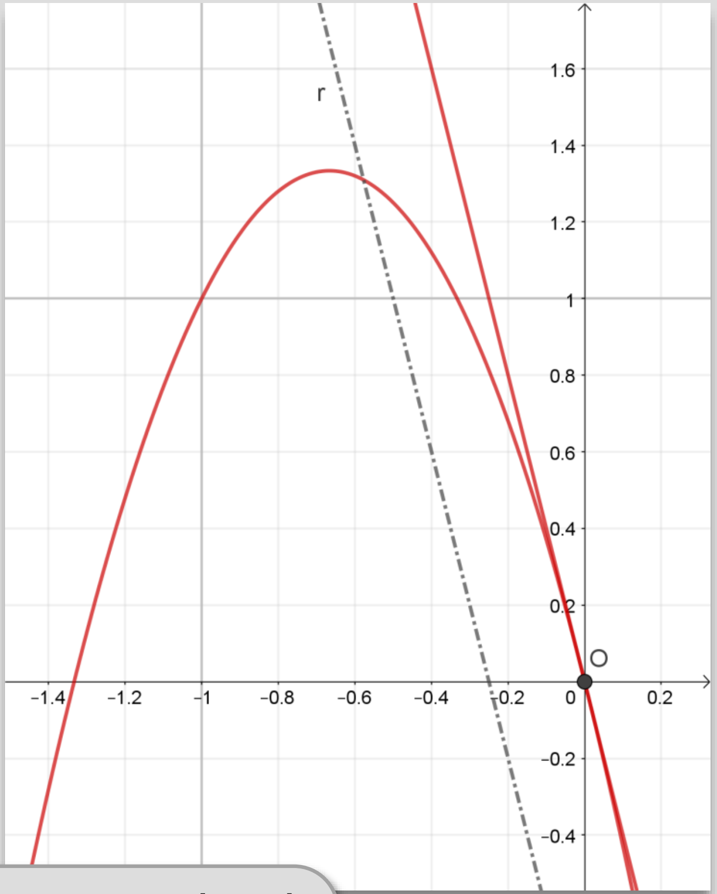
Ancora un problema

- Determinare l'equazione della tangente alla parabola $y = \mathbf{-3}x^2 \mathbf{- 4}x$ parallela alla retta $r: y = \mathbf{-4}x + 1$
- La retta è tangente alla parabola nel punto in cui il tasso di variazione istantaneo è pari a $\mathbf{-4}$
- Ci basta quindi determinare questo punto imponendo che $\mathrm{std}\frac{dy}{dx} = 2\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b} = 2(\mathbf{-3})x \mathbf{- 4}$ sia $\mathbf{-4}$:

$$-6x - 4 = \mathbf{-4} \text{ da cui } x = 0$$

- La tangente cercata è la retta per l'origine di coefficiente angolare $\boldsymbol{m = -4}$:

$$y = \mathbf{-4}x$$



Abbiamo usato ancora una volta il generico coefficiente angolare della tangente a una parabola applicato alla nostra curva

- Determinare la retta tangente alla parabola $y = -3x^2 - 2x + 2$ parallela alla retta $y = 2x$
- Determinare la retta tangente alla stessa parabola parallela alla retta $y = -2x$

Ragioniamoci un po' su

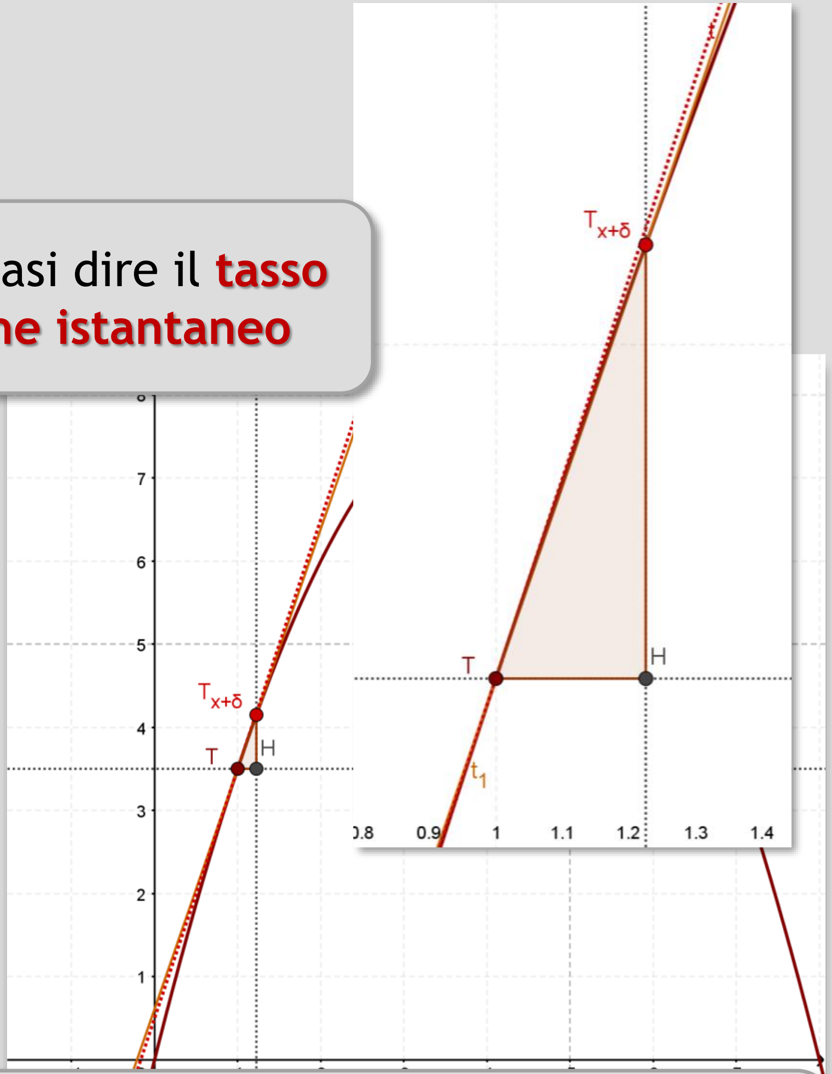
- Il **tasso di variazione medio** è il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tra i due punti di una parabola di ascissa x e $x + \Delta x$
- Il **tasso di variazione** $\mathrm{std}\frac{dy}{dx}$ è questo rapporto calcolato tra due punti distanti un infinitesimo δ

Equivale al coefficiente angolare della retta tangente nel punto x

- Abbiamo calcolato il tasso di variazione $\mathrm{std}\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ per una parabola generica $y = ax^2 + bx + c$

Questa formula si può usare in una miriade di problemi sulle parabole!

Potremmo quasi dire il **tasso di variazione istantaneo**

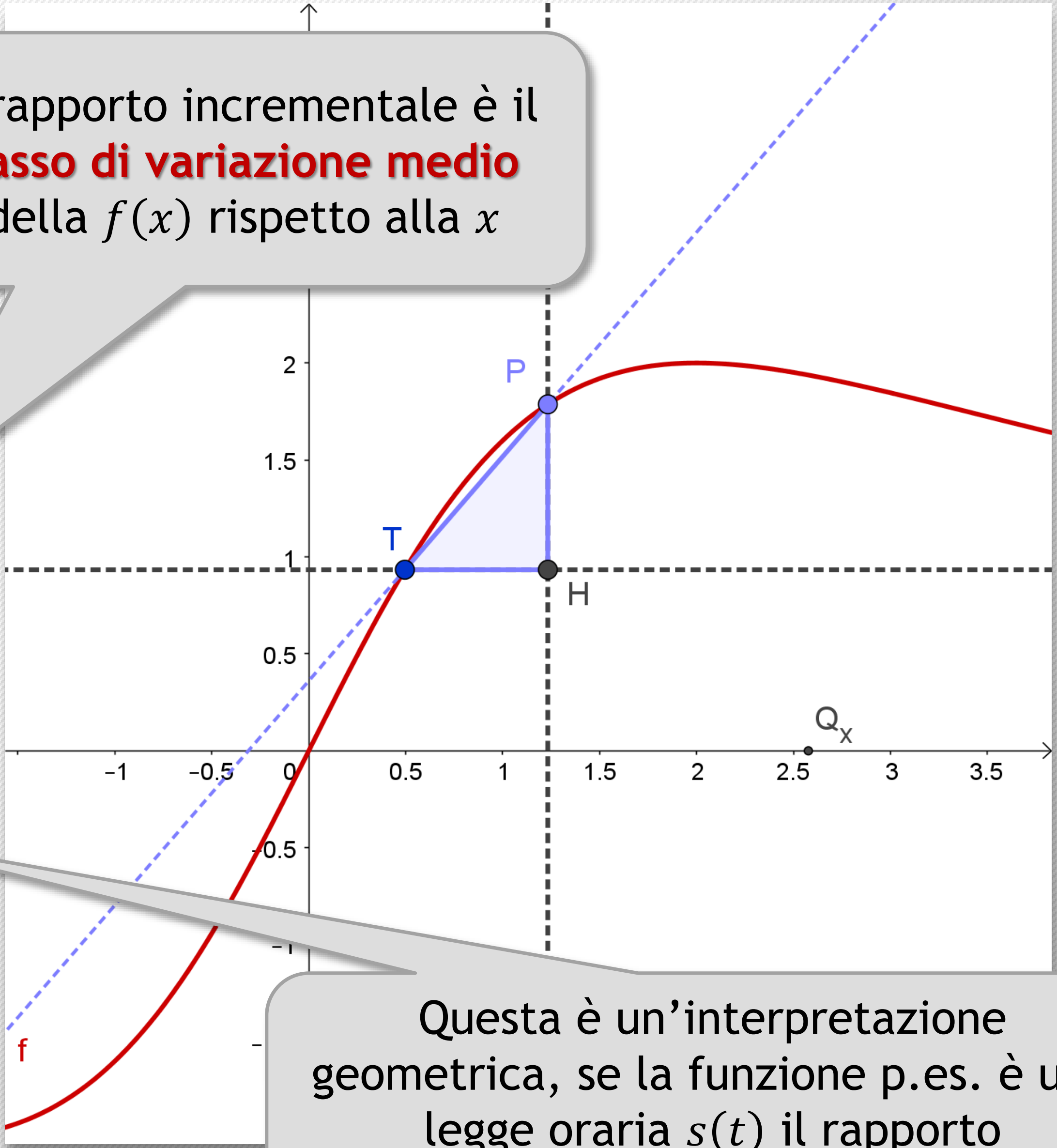


Con dy indichiamo la variazione infinitesima della y corrispondente alla variazione infinitesima dx della x

Generalizziamo: rapporto incrementale

- Sia $y = f(x)$ una funzione qualsiasi e sia x appartenente al dominio della funzione
- Il **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ nel punto x è
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$
- Il rapporto incrementale corrisponde al coefficiente angolare della retta che passa per i punti della curva di ascissa x e $x + \Delta x$ …

… e ora immaginiamo di scegliere Δx infinitesimo …



Il rapporto incrementale è il **tasso di variazione medio** della $f(x)$ rispetto alla x

Questa è un'interpretazione geometrica, se la funzione p.es. è una legge oraria $s(t)$ il rapporto incrementale $\Delta s / \Delta t$ è la velocità media

Differenziale

- Nelle funzioni in genere a incrementi infinitesimi della variabile x corrispondono incrementi infinitesimi della funzione $\mathrm{f}(x)$
- Sia $y = f(x)$ una funzione qualsiasi e sia x appartenente al dominio della funzione
- Il **differenziale della funzione** $f(x)$ nel punto x è:

$$\boldsymbol{df(x)} = f(x + dx) - f(x)$$

per un incremento infinitesimo dx (il **differenziale della variabile** x)

- Useremo dx anziché Δx per indicare un incremento infinitesimo e $df(x)$ per un incremento infinitesimo della funzione $f(x)$
  - un incremento che dipende dalla corrispondente variazione dx della variabile indipendente x

$df(x)$ si legge *de effe x*
e non *di effe x*

Derivata

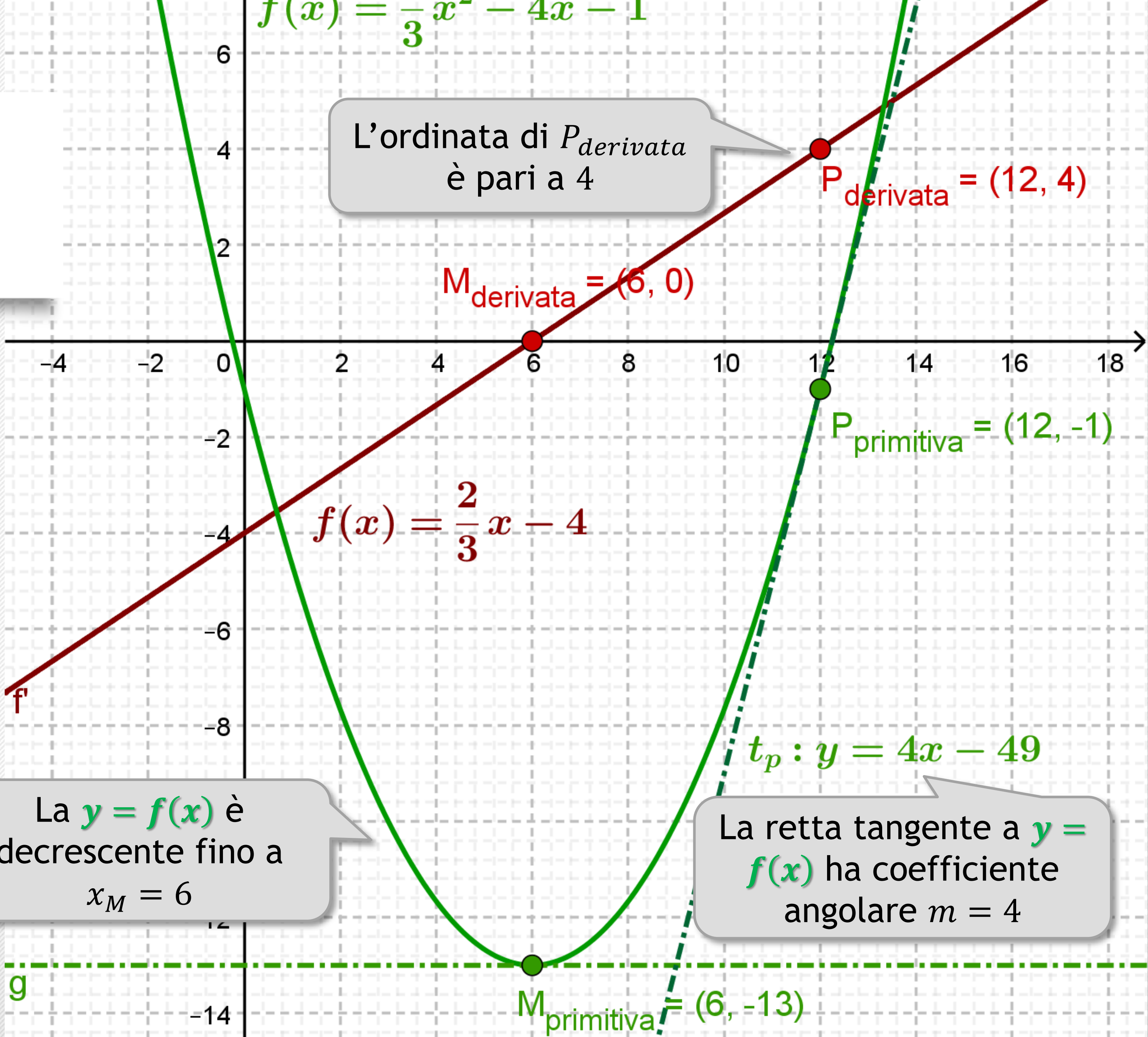
Più precisamente, $f'(x) = \text{std}\,\frac{df(x)}{dx}$ è la **derivata della $f(x)$ fatta rispetto alla x**

- Se calcoliamo il rapporto incrementale per variazioni infinitesime abbiamo il **rapporto differenziale $df(x)/dx$**
- Il tasso di variazione istantaneo della funzione è $\text{std}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ se:
  - il rapporto $\frac{df(x)}{dx}$ ha un valore finito
  - la parte standard di $\frac{df(x)}{dx}$ non dipende da dx
- La **derivata** di una funzione $f(x)$ in un punto x appartenente al dominio di $f(x)$ è $\boldsymbol{f'(x) = Df(x) = \text{std}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}$ se sono rispettate le due condizioni indicate sopra

La derivata $f'(x)$ è una funzione ricavata dalla $f(x)$ che fornisce punto per punto il tasso di variazione istantaneo della funzione!

Esempio grafico (1)

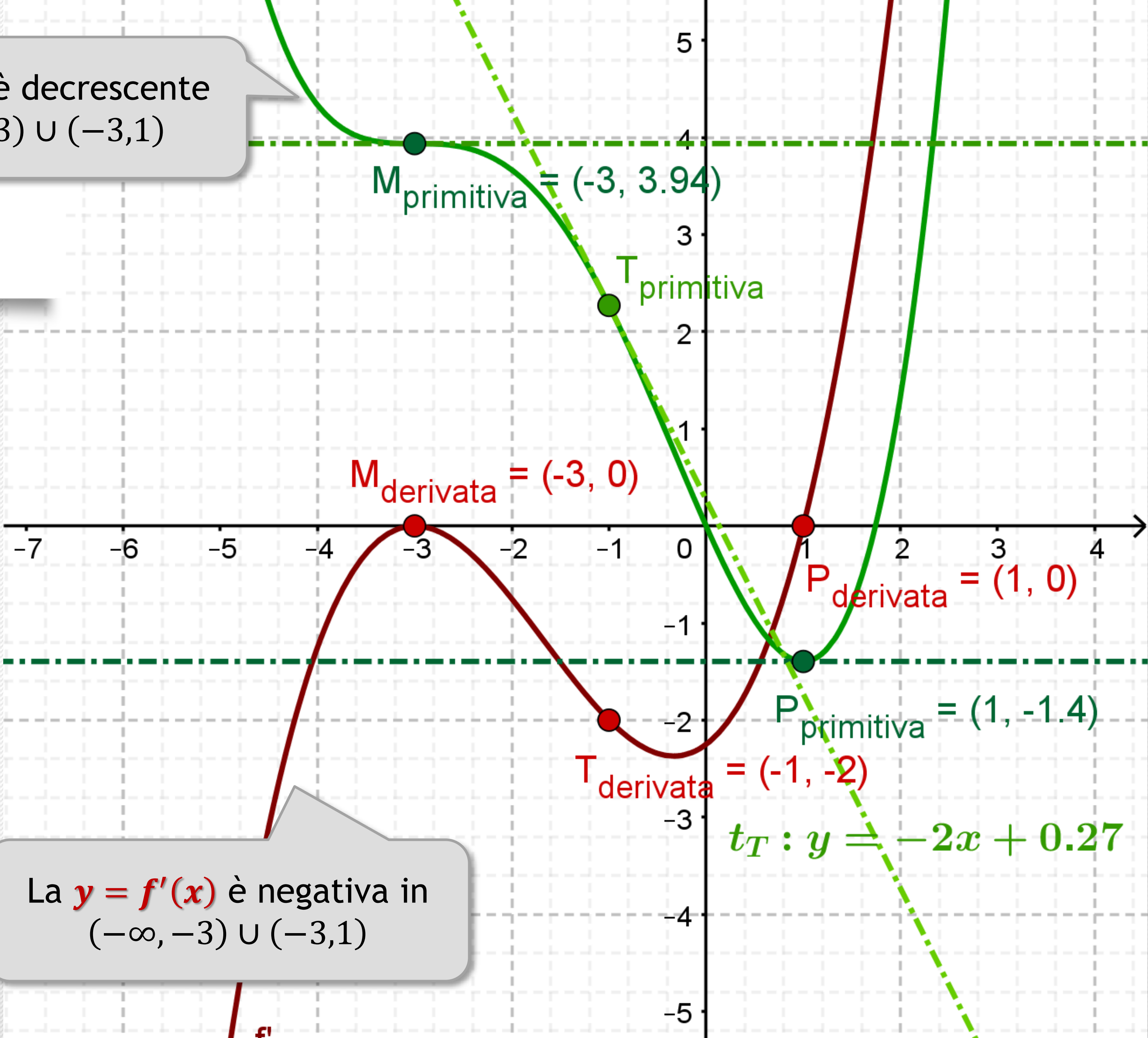
- La parabola $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x - 1$ è tracciata in verde
- La sua derivata $y = f'(x) = \frac{2}{3}x - 4$ è tracciata in rosso scuro
- Confrontare ordinata dei punti della $y = f'(x)$ con i coefficienti angolari della $y = f(x)$
  - I punti $M_{primitiva}$ e $M_{derivata}$ hanno la stessa ascissa
  - Così come i punti $P_{primitiva}$ e $P_{derivata}$
- Confrontare anche il segno della derivata$y = f'(x)$ con gli intervalli in cui la primitiva$y = f(x)$ è crescente o decrescente



Esempio grafico (2)

- La curva $\boldsymbol{y = f(x)}$ è la primitiva ed è tracciata in verde
- La sua derivata $\boldsymbol{y = f'(x)}$ è tracciata in rosso scuro
- Confrontare ordinata dei punti della $\boldsymbol{y = f'(x)}$ con i coefficienti angolari della $\boldsymbol{y = f(x)}$
  - I punti $M_{primitiva}$ e $M_{derivata}$ hanno la stessa ascissa
  - Così come i punti $P_{primitiva}$ e $P_{derivata}$ e i punti $T_{primitiva}$ e $T_{derivata}$
- Confrontare il segno della derivata$\boldsymbol{y = f'(x)}$ con gli intervalli in cui la primitiva$\boldsymbol{y = f(x)}$ è crescente o decrescente

La $\boldsymbol{y = f(x)}$ è decrescente in $(-\infty, -3) \cup (-3,1)$



La $\boldsymbol{y = f'(x)}$ è negativa in $(-\infty, -3) \cup (-3,1)$

Un esempio

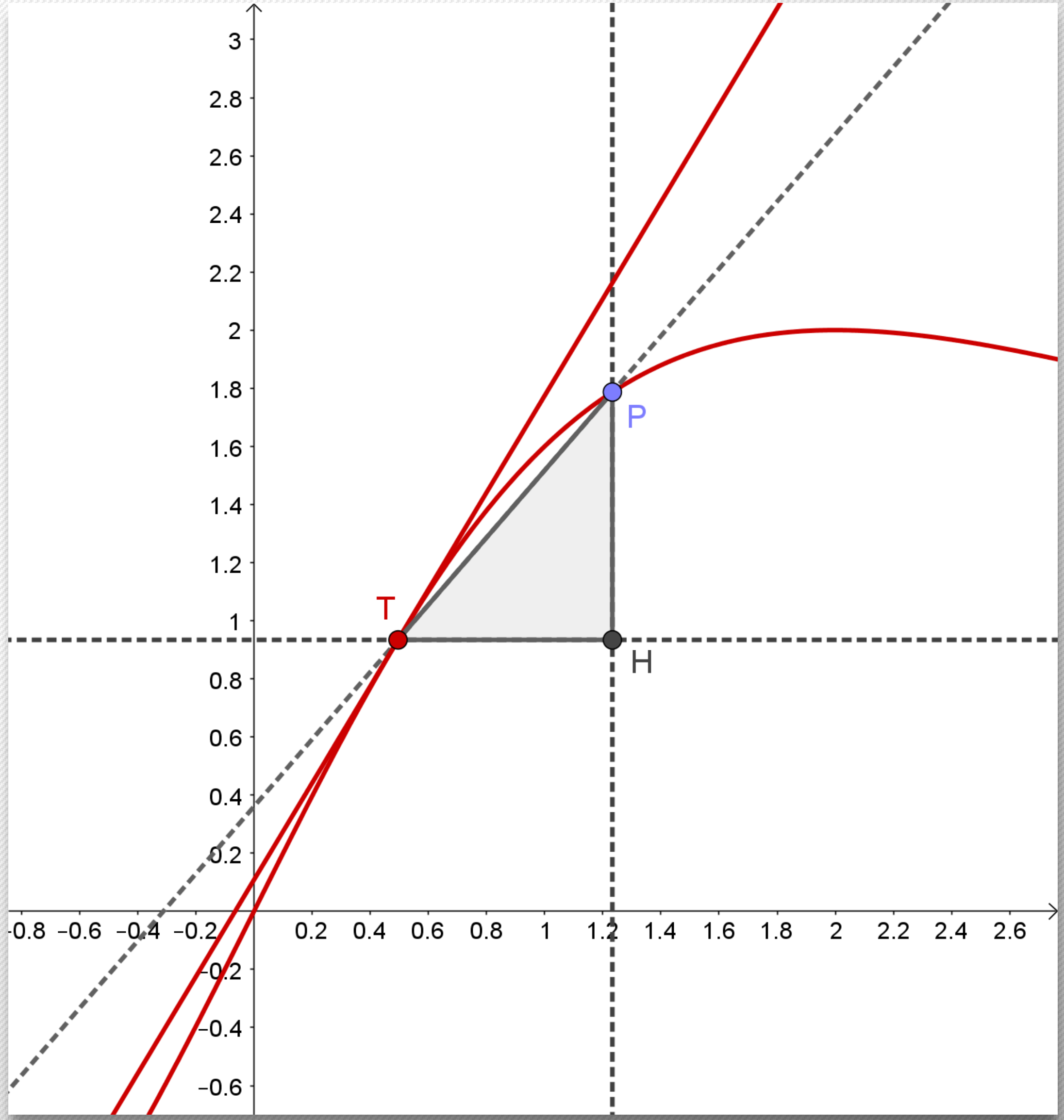
- Prendiamo la funzione $f(x) = -3x^2 - 4x$
  - Il differenziale della funzione è:
    $df(x) = f(x + dx) - f(x) = \mathbf{-3(x + dx)^2 - 4(x + dx)} - \mathbf{(-3x^2 - 4x)}$
  - con qualche calcolo:
    $df(x) = -3x^2 - 6xdx - 3dx^2 - 4x - 4dx + 3x^2 + 4x = (-6x - 4)dx - 3dx^2$
  - La derivata è la parte standard del rapporto $\frac{df(x)}{dx}$:
    $$f'(x) = \text{std}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \text{std}\left(\frac{(-6x - 4)dx - 3dx^2}{dx}\right) = \text{std}(-6x - 4 - 3dx)$$
  - E quindi $\boldsymbol{f'(x) = -6x - 4}$
- Notare che il rapporto $\text{std}\frac{df(x)}{dx}$:
  - è finito per ogni x finito
  - non dipende da dx

La derivata che abbiamo trovato è esattamente il tasso di variazione istantanea che avevamo calcolato in precedenza!

Significato geometrico

- Sia $y = f(x)$ una funzione qualsiasi e sia x appartenente al dominio della funzione
- La **derivata** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il coefficiente angolare della funzione nel punto di ascissa x_0, infatti:
  - le due ascisse x_0 e $x_0 + dx$ sono indistinguibili
  - le due ordinate $f(x_0 + dx)$ e $f(x_0)$ sono anch'essi indistinguibili
- Quindi i due punti $T\left(x_0, f(x_0)\right)$ e $P\left(x_0 + dx, f(x_0 + dx)\right)$ coincidono

La retta che passa per T e P è la tangente alla curva in T!



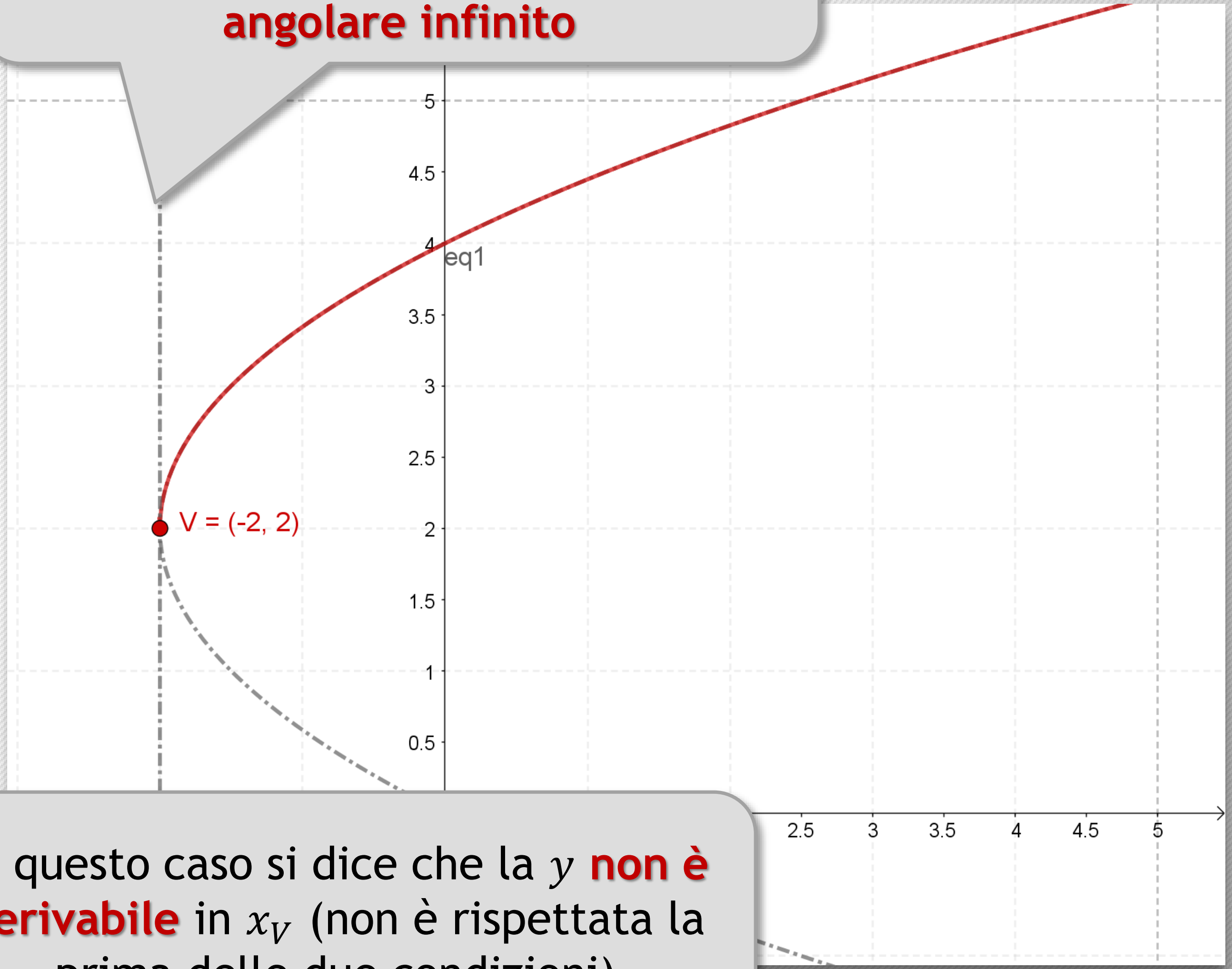
Attenzione alle condizioni

- Si deve prestare attenzione alle due condizioni di esistenza:
  - il rapporto $\frac{df(x)}{dx}$ ha un valore finito
  - la parte standard di $\frac{df(x)}{dx}$ non dipende da dx
- Determiniamo la derivata della semiparabola $y = 2 + \sqrt{4+2x}$
  - $\frac{dy}{dx} = \frac{2+\sqrt{4+2(x+dx)}-(2+\sqrt{4+2x})}{dx} = \frac{\sqrt{4+2(x+dx)}-\sqrt{4+2x}}{dx}$
  - razionalizzando *al contrario*

$$\frac{\sqrt{4+2(x+dx)}-\sqrt{4+2x}}{dx}\cdot\frac{\sqrt{4+2(x+dx)}+\sqrt{4+2x}}{\sqrt{4+2(x+dx)}+\sqrt{4+2x}}$$
$$= \frac{2dx}{dx\left(\sqrt{4+2(x+dx)}+\sqrt{4+2x}\right)}$$

  - da cui $\boldsymbol{y'} = \mathrm{std}\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{4+2x}}}$
- Se ora calcoliamo $y'(-2) = 1/\sqrt{0}!!!$

La retta tangente nel vertice della parabola (di ascissa $x_V = -2$) è verticale, quindi **ha un coefficiente angolare infinito**



In questo caso si dice che la y **non è derivabile** in x_V (non è rispettata la prima delle due condizioni)

Esercizi: data la semiellisse di equazione $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{2}$:

- Determinare l'equazione della tangente nel suo punto P di ascissa $x_P = 2$ utilizzando il metodo appena visto (suggerimento, per semplificare il rapporto differenziale razionalizzare *al contrario*)
- Una volta calcolata la derivata della y, determinare le tangenti nei sui punti di ascissa $x_{V_1} = -4$, $x_{V_2} = 4$ e $x_{V_3} = 0$, cosa si può dire della derivata in questi casi?

$$y(x+dx) = \frac{\sqrt{16-(x+dx)^2}}{2} \qquad dy = \frac{1}{2}\left[\sqrt{16-(x+dx)^2} - \sqrt{16-x^2}\right]$$

notare che $st\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{0}{0}$ se calcolata ora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{16-(x+dx)^2}-\sqrt{16-x^2}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{16-(x+dx)^2}+\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16-(x+dx)^2}+\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{16-x^2-2x\,dx-dx^2-16+x^2}{dx\left(\sqrt{16-(x+dx)^2}+\sqrt{16-x^2}\right)} =$$

infinitesimo

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-2x\,dx-dx^2}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \frac{1}{2}\,\frac{-2x-dx}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}$$

$$st\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{16-x^2}} \Rightarrow m_{V_1} = -\frac{-4}{2\sqrt{16-16}} = +\frac{4}{0}!!!$$

$$m_{V_2} = -\frac{4}{2\sqrt{16-16}} = -\frac{4}{0}!!!$$

$$m_{V_3} = -\frac{0}{\sqrt{16}} = 0$$

in questi punti la funzione non è derivabile e la tangente è "verticale" (con coeff. angolare infinito)

qui la tangente è "orizzontale"

I prossimi passi

- Proviamo a immaginare come procedere, se riuscissimo a determinare …
  - le derivate delle funzioni fondamentali come $y = x$, $y = x^n$, $y = \sqrt{x}$, …
  - proprietà e formule delle operazioni tra le derivate, per esempio la formula per derivare $y = k \cdot f(x)$, $y = f(x)/g(x)$, …
  - proprietà e formule per derivare le funzioni composte come $y = \sqrt{f(x)}$
- Potremmo affrontare tutto un insieme di problemi utilizzando questo strumento!

Senza ogni volta calcolare il rapporto differenziale e la derivata ma utilizzando le formule e le derivate fondamentali!

Bibliografia

- AA.VV. – *Elementi di analisi non standard* – 2015, in Matematicamente (pubblicazione della sezione veronese di Mathesis)
- Goldoni, G. – *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale* – 2014, Amazon fulfillment)
- Goldoni, G. – *I numeri iperreali*– 2017, Ilmiolibro
- Robinson, A. - *Non standard analysis – 1996, Priceton University Press*
- Stecca, B. & Zambelli, D. – *Analisi non standard* – 2015, docplayer.it/4477695-Analisi-non-standard-release-0-0-1-b-stecca-d-zambelli.html

Problemi introduttivi
Esercizi
Ragioniamo
Ragioniamo
Rapporto incrementale
Differenziale
Derivata
Esempio
Significato geometrico
Attenzione alle condizioni
Prossimi passi