Iperreali

04 – derivate e formule di derivazione

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina – www.liceograssilatina.org

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio

La strada ancora da fare ...

Definizione di derivata di una funzione

Rapporto differenziale

è il rapporto incrementale calcolato per un incremento infinitesimo

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

dx è un infinitesimo

Derivata

la parte standard del rapporto differenziale

$$f'(x) = \mathrm{std}\,\frac{df(x)}{dx}$$

Derivate delle funzioni fondamentali

$$D(k) = 0$$

$$D(x) = 1$$

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

per ogni iperreale n non nullo

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Formule di derivazione

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

queste due prime formule permettono di calcolare la derivata di ogni polinomio

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$D[f(g(x))] = f(z) \cdot g'(x)$ con $z = g(x)$

Derivate fondamentali (1)

- Ricordiamo che la derivata $f'(x)$ si una funzione $f(x)$ è **la parte standard del rapporto differenziale** $\frac{df(x)}{dx}$: $\text{std}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$
- Calcoliamo la derivata di alcune funzioni fondamentali:
  - se $y = k$ è la funzione costante abbiamo $df(x) = 0$ per cui $\frac{df(x)}{dx} = 0$ e quindi $(k)' = Dk = 0$
  - sia ora $y = x$ abbiamo $df(x) = x + dx - x = dx$ e $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$ da cui $(x)' = Dx = 1$

Il **differenziale** $df(x)$ di una funzione $f(x)$ è $df(x) = f(x + dx) - f(x)$ dove dx è un infinitesimo

Derivate fondamentali (2)

- Calcoliamo la derivata di $y = x^2$
  - il differenziale della funzione è $df(x) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2 = (2x + dx)\, dx$
  - quindi il rapporto differenziale è:
  - $\frac{df(x)}{dx} = \frac{(2x+dx)\ dx}{dx} = 2x + dx$
  - a questo punto la derivata è: $\mathrm{std}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \mathrm{std}(2x + dx) = 2x$
- Usando lo stesso procedimento è possibile calcolare
  - $(x^3)' = Dx^3 = 3x^2$
  - $(x^4)' = Dx^4 = 4x^3$ …
- Generalizzando, la derivata di x^n sarà:
  - $\boldsymbol{(x^n)'} = Dx^n = \boldsymbol{nx^{n-1}}$

Quindi il coefficiente angolare di una tangente alla parabola $y = x^2$ in un punto x_T è $y'(x_T) = 2x_T$

Derivate fondamentali (3)

- La formula $(x^n)' = nx^{n-1}$ si può generalizzare quando n è un iperreale qualsiasi non nullo
- Esempio: $y = \sqrt[3]{x}$
  - possiamo scrivere $y = (x)^{\mathbf{\frac{1}{3}}}$ per cui $n = \mathbf{\frac{1}{3}}$
  - la derivata allora sarà $y' = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot (x)^{\mathbf{\frac{1}{3}}-1} = \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot (x)^{-\frac{2}{3}}$
  - ricordando le proprietà delle potenze $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Esponente razionale $n = \frac{1}{3}$

- Esempio: $y = \frac{1}{x^4}$
  - possiamo scrivere $y = (x)^{\mathbf{-4}}$ per cui $n = \mathbf{-4}$
  - la derivata allora sarà $y' = \mathbf{-4} \cdot (x)^{\mathbf{-4}-1} = \mathbf{-4} \cdot (x)^{-5}$
  - ricordando le proprietà delle potenze $y' = -\frac{4}{x^5}$

Esponente negativo $n = -4$

Derivate fondamentali (4)

- Calcoliamo la derivata di $y = \sqrt{x}$
  - il differenziale della funzione è

$$df(x) = \sqrt{x + dx} - \sqrt{x}$$

  - quindi il rapporto differenziale è $\frac{df(x)}{dx} = \frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx}$ difficile da *districare*

La stessa derivata si può calcolare ponendo $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ per cui

$$\mathrm{D}\sqrt{x} = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Proviamo a razionalizzare *al contrario*

$$\frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}}{\boldsymbol{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}} = \frac{x + dx - x}{dx\left(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}\right)} = \frac{dx}{dx\left(\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}}$$

- Ma allora, passando alla parte standard, $(\sqrt{x})' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
  - perché $\mathrm{std}\sqrt{x+dx} = \sqrt{x}$

Formule di derivazione (1)

- Applicando la definizione possiamo determinare alcune formule di derivazione
- Derivata di $y = k \cdot f(x)$, il **prodotto di una funzione per una costante**
  - il differenziale della funzione è

$$d\big(k \cdot f(x)\big) = kf(x+dx) - kf(x) = k[f(x+dx) - f(x)]$$

  - da cui $\frac{d\left(k \cdot f(x)\right)}{dx} = k\,\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$
- Quindi la derivata è $\big(k \cdot f(x)\big)' = k \cdot f'(x)$:

  il prodotto della costante per la derivata della funzione $f(x)$

Si usa dire che la derivata **lascia inalterate le costanti moltiplicative** o che le costanti moltiplicative **si possono portar fuori dal simbolo di derivata**

Derivate fondamentali
Formule di derivazione: **moltiplicazione per una costante**

Esempio (1)

- La derivata del prodotto di una costante per una funzione è la costante per la derivata della funzione:
  - se $y = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f(x)}$ allora $y' = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$
- Sia $y = \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{x^4}$ allora $y' = \mathbf{3} \cdot \left(\boldsymbol{x^4}\right)' = \mathbf{3} \cdot \mathbf{4}\boldsymbol{x^3} = 12x^3$
- o anche $y = \mathbf{-2}\sqrt{\boldsymbol{x}}$ allora $y' = \mathbf{-2} \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \mathbf{-2} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$
- o ancora $y = \frac{\mathbf{-3}}{\boldsymbol{x^4}} = \mathbf{-3} \cdot \boldsymbol{x^{-4}}$ da cui
- $y' = \mathbf{-3} \cdot \left(\boldsymbol{x^{-4}}\right)' = \mathbf{-3} \cdot (\mathbf{-4})\boldsymbol{x^{-5}} = +\frac{12}{x^5}$

Formule di derivazione (2): somma

- Derivata di $y = f(x) + g(x)$, la somma algebrica di due funzioni
  - il differenziale della funzione somma è
    $$d\big(f(x) + g(x)\big) = \boldsymbol{f(x+dx) + g(x+dx)} - [\boldsymbol{f(x) + g(x)}]$$
  - riordinando diventa $\boldsymbol{f(x+dx) - f(x)} + \boldsymbol{g(x+dx) - g(x)}$
- Il rapporto differenziale si può scrivere come:
  $$\frac{[f(x+dx) - f(x)]}{dx} + \frac{[g(x+dx) - g(x)]}{dx}$$
- che diventa, passando alla parte standard:
  $$f'(x) + g'(x)$$

Generalizzando, la derivata di una somma (differenza) è uguale alla **somma (differenza) delle derivate**

La derivata di una **somma di funzioni** è la **somma delle derivate** delle due funzioni!

Polinomi

- Le derivate fondamentali e le formule di derivazione ricavate fino a ora permettono di calcolare la derivata di qualsiasi polinomio:
  - $y = \mathbf{3x^3} - \mathbf{5x^2} + \mathbf{\frac{1}{2}x} - 4$ allora:
  - $y' = \mathbf{3 \cdot D(x^3)} - \mathbf{5 \cdot D(x^2)} + \mathbf{\frac{1}{2} \cdot D(x)} - D(4) = \mathbf{3 \cdot 3x^2} - \mathbf{5 \cdot 2x} + \mathbf{\frac{1}{2} \cdot 1} + 0$
  - per cui la derivata è $y = 9x^2 - 10x + \frac{1}{2}$
- Se $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ allora $y' = x^2 + x + 1$
  - infatti $y' = \frac{1}{3} \cdot D(x^3) + \frac{1}{2} \cdot D(x^2) + D(x) - D(1) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 1 + 0$

Formule di derivazione (3): prodotto

- Derivata di $y = f(x) \cdot g(x)$, il prodotto di due funzioni
  - il differenziale della funzione prodotto è
    $$d\big(f(x) \cdot g(x)\big) = f(x + dx) \cdot g(x + dx) - f(x) \cdot g(x)$$
  - *togliamo* e aggiungiamo e il termine $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x + dx)}$:
    $$f(x + dx) \cdot g(x + dx) \boldsymbol{- f(x) \cdot g(x + dx) + f(x) \cdot g(x + dx)} - f(x) \cdot g(x)$$
  - aiutiamoci con un raccoglimento parziale
    $$[\boldsymbol{f(x + dx) - f(x)}] \cdot g(x + dx) + [\boldsymbol{g(x + dx) - g(x)}] \cdot f(x)$$
- Il rapporto differenziale si può scrivere come:
  $$\frac{[\boldsymbol{f(x + dx) - f(x)}]}{dx} \cdot g(x + dx) + \frac{[\boldsymbol{g(x + dx) - g(x)}]}{dx} \cdot f(x)$$
  - che diventa, passando alla parte standard, diventa:
    $$\mathrm{D}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

La parte standard di $g(x + dx)$ è la funzione calcolata nel punto x: $\mathrm{g}(x)$

Esempio (2)

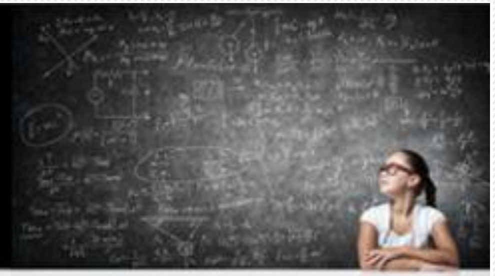
- La derivata del prodotto di due funzioni è data dalla formula:
$$D\big(\boldsymbol{f(x)} \cdot \boldsymbol{g(x)}\big) = \boldsymbol{f'(x)} \cdot \boldsymbol{g(x)} + \boldsymbol{f(x)} \cdot \boldsymbol{g'(x)}$$
- Sia $y = \boldsymbol{x} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x}}$ allora $y' = \boldsymbol{1} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \cdot \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
  - si poteva anche notare che $y = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ quindi $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
- Se $y = \boldsymbol{(x^2 + 1)}\boldsymbol{(2x - x^3)}$ allora:
$$y' = \boldsymbol{2x} \cdot \boldsymbol{(2x - x^3)} + \boldsymbol{(x^2 + 1)} \cdot \boldsymbol{(2 - 3x^2)} = 3x^2 - 5x^4$$

Formule di derivazione (3): quoziente

- La formula di derivazione di $y = f(x)/g(x)$ si può trovare anche derivando $y = \boldsymbol{f(x)} \cdot \boldsymbol{1/g(x)}$ con la formula del prodotto
- Infatti si ha $y' = \boldsymbol{f'(x)} \cdot \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{g(x)}} + \boldsymbol{f(x)} \cdot \left[\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{g(x)}}\right]' = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$
- Da cui, sviluppando:

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Esempio (4)



- La derivata del quoziente di due funzioni è data dalla formula:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

- Sia $y = \frac{x+1}{2x-3}$ allora $y' = \frac{1\cdot(2x-3)-(x+1)\cdot 2}{(2x-3)^2} = \frac{-5}{(2x-3)^2}$
- In generale, se $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ allora:
  - $y' = \frac{a\cdot(cx+d)-(ax+b)\cdot c}{(cx+d)^2} = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Si può usare anche su $y = \frac{1}{x}$: $y' = \frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Derivando una funzione omografica il numeratore è sempre una costante

Anche se è più rapido il metodo:
$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivata di una funzione composta (1)

- Sia $y = f\big(g(x)\big)$ una funzione composta
  - Composizione delle due funzioni $z = g(x)$ e $y = f(z)$
- Il rapporto differenziale è $\dfrac{df\big(g(x)\big)}{dx} = \dfrac{\mathbf{d\big(f(z)\big)}}{\mathbf{dz}} \cdot \dfrac{\mathbf{d\big(g(x)\big)}}{\mathbf{dx}}$
- Quindi la derivata è $y' = \boldsymbol{f'(z)} \cdot \boldsymbol{g'(x)}$
- P.es.: $y = \sqrt{x^2 - 3}$ è la composizione di $y = \boldsymbol{\sqrt{z}}$ e $z = \boldsymbol{x^2 - 3}$
  - ricordiamo che $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ e che $(x^2 - 3)' = 2x$
  - la derivata della funzione composta sarà $y' = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{z}}} \cdot \mathbf{2x}$
- Se ora sostituiamo $z = x^2 - 3$ abbiamo $y' = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-3}}} \cdot \mathbf{2x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

Dove $z = g(x)$

Si fa la derivata della funzione *più esterna* rispetto al proprio argomento e la si moltiplica per la derivata della funzione *più interna*.

Dove $z = x^2 - 3$

Derivata di una funzione composta (2)

- Sia $y = \sqrt{f(x)}$
  - ricordiamo che se $y = \sqrt{x}$ allora $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- La $y = \sqrt{f(x)}$ è la composizione di $y = \sqrt{\mathbf{z}}$ e $z = \boldsymbol{f(x)}$
- La derivata sarà:

$$y' = (\sqrt{z})' \cdot f'(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{z}}} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

- Quindi $y' = \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}}$

Derivata di una funzione composta (3)

- Sia $y = [f(x)]^n$ con $n \neq 0$
  - ricordiamo che se $y = x^n$ allora $y' = n \cdot x^{n-1}$
- La $y = [f(x)]^n$ è la composizione di $y = \boldsymbol{z^n}$ e $z = \boldsymbol{f(x)}$
- La derivata sarà:

$$y' = (\boldsymbol{z^n})' \cdot \boldsymbol{f'(x)} = \boldsymbol{n \cdot z^{n-1}} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

- Quindi $y' = \boldsymbol{n[f(x)]^{n-1}} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

In pratica, è una generalizzazione della formula $(x^n)' = nx^{n-1}$

Esempio (5)

- La derivata di una funzione composta è data dalla formula:

$$D\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'(z) \cdot g'(x) \text{ con } z = g(x)$$

- Sia $y = \left(x^2 + 4x\right)^3$ allora $y' = D\left(z^3\right) \cdot D\left(x^2 + 4x\right) = 3z^2(2x + 4)$
- quindi si ri-sostituisce z con $x^2 + 4x$: $y' = 3\left(x^2 + 4x\right)^2(2x + 4)$
- Allo stesso modo se $y = \sqrt[3]{3x - 2} = (3x - 2)^{\frac{1}{3}}$:
  - allora $y' = \frac{1}{3}(3x - 2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 3 = (3x - 2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}}$
  - infatti $f(z) = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$ per cui $f'(z) = z^{\frac{1}{3}-1}$
  - mentre $g(x) = 3x - 2$ da cui $g'(x) = 3$

Notare che la derivata della funzione *esterna* (la radice cubica) è calcolata come se l'argomento fosse la sola z

Dimostrazione della derivata di x^n

- Dimostriamo per induzione che $(x^n)' = D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$:
- $n = \mathbf{1}$: abbiamo dimostrato in precedenza che $x' = \mathbf{1} \cdot x^{\mathbf{1}-1} = 1$
- $\boldsymbol{n-1}$: supponiamo vero che $\left(x^{\boldsymbol{n-1}}\right)' = (\boldsymbol{n-1}) \cdot x^{n-2}$
- $\boldsymbol{n}$: dimostriamo che $(x^{\boldsymbol{n}})' = \boldsymbol{n} \cdot x^{\boldsymbol{n}-1}$
  - possiamo scrivere $x^n = x \cdot x^{n-1}$
  - utilizzando la formula per la derivata di un prodotto abbiamo:

$$\left(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}}\right)' = \boldsymbol{x'} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}} + \boldsymbol{x} \cdot \left(\boldsymbol{x^{n-1}}\right)' = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x^{n-1}} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{(n-1)x^{n-2}} =$$
$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1}$$

  - quindi, raccogliendo, $(x^n)' = (1 + n - 1)x^{n-1} = n \cdot x^n$

Qui usiamo
$(x^{n-1})' = (n-1) \cdot x^{n-2}$

Derivate fondamentali Formule di derivazione: moltiplicazione per una costante

Tabella derivate fondamentali e formule di derivazione

Tabella delle derivate fondamentali

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n \; n \neq 0$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = f\big(g(x)\big)$ con $z = g(x)$	$y = f'(z) \cdot g'(x)$ con $z = g(x)$

Bibliografia

- AA.VV. – *Elementi di analisi non standard* – 2015, in Matematicamente (pubblicazione della sezione veronese di Mathesis)
- Goldoni, G. – *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale* – 2014, Amazon fulfillment)
- Goldoni, G. – *I numeri iperreali*– 2017, Ilmiolibro
- Robinson, A. - *Non standard analysis – 1996, Priceton University Press*
- Stecca, B. & Zambelli, D. – *Analisi non standard* – 2015, docplayer.it/4477695-Analisi-non-standard-release-0-0-1-b-stecca-d-zambelli.html

Derivate fondamentali
Formule di derivazione:
moltiplicazione per una costante
somma
prodotto
quoziente
Derivata di una funzione composta
Dimostrazione di $Dx^n = nx^{n-1}$
Tabella derivate fondamentali e formule di derivazione