Iperreali

05 – applicazioni delle derivate

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina – www.liceograssilatina.org

© 2021, Gualtiero Grassucci

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

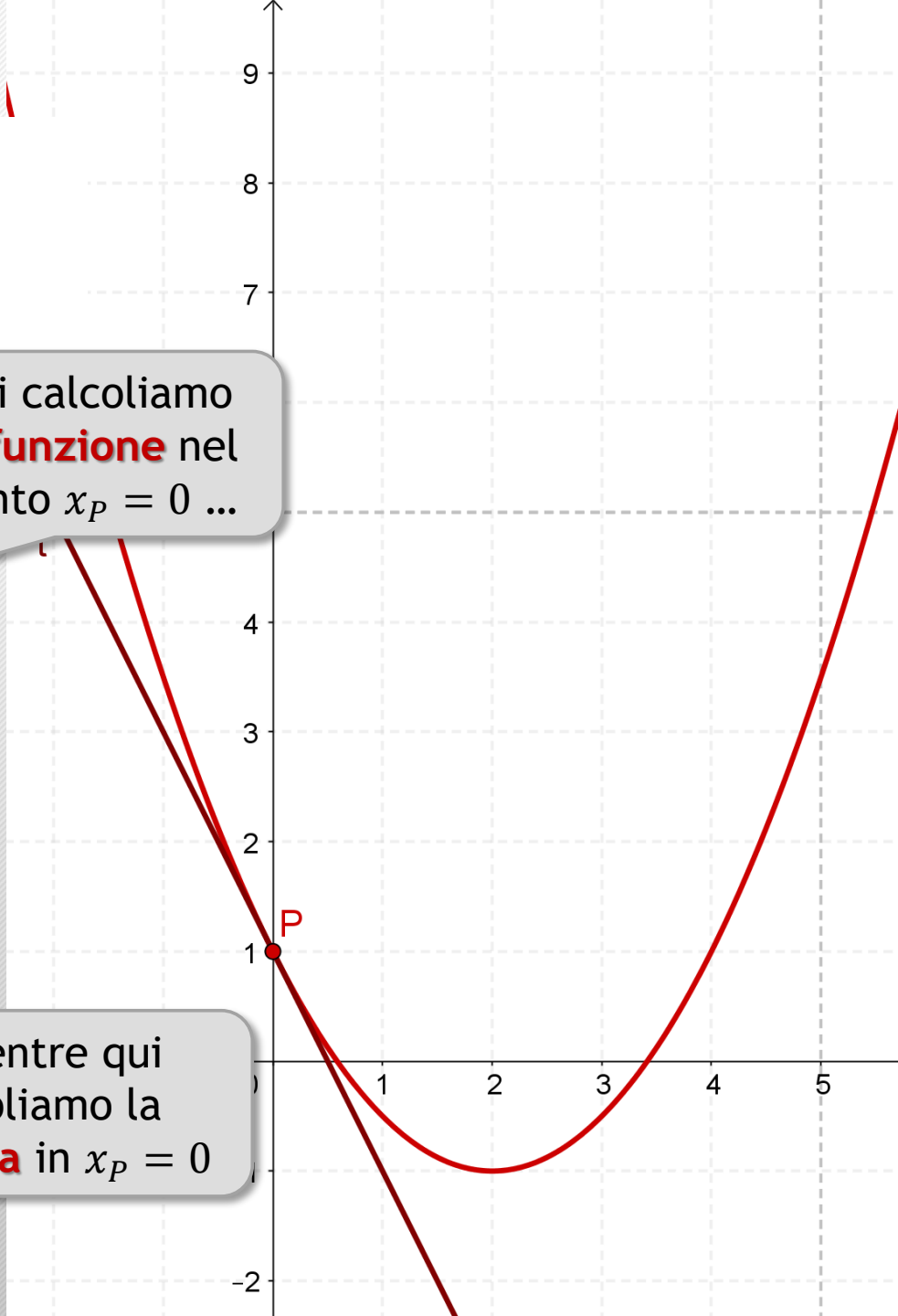
In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio

Quando si può usare la derivata (1)

- Equazione della tangente alla parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ **nel suo punto** P di ascissa nulla
- Calcoliamo l'ordinata di P: $y_P = y(0) = 1$
  - la generica retta passante per P è $y = mx + 1$
- Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nell'ascissa del punto, quindi:
  - la derivata è $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = x - 2$
  - la derivata calcolata nell'ascissa del punto P è $y'(0) = (x-2)\Big|_{x=0} = -2$
- La retta tangente è allora $t: y = -2x + 1$

Qui calcoliamo la **funzione** nel punto $x_P = 0$ …

… mentre qui calcoliamo la **derivata** in $x_P = 0$

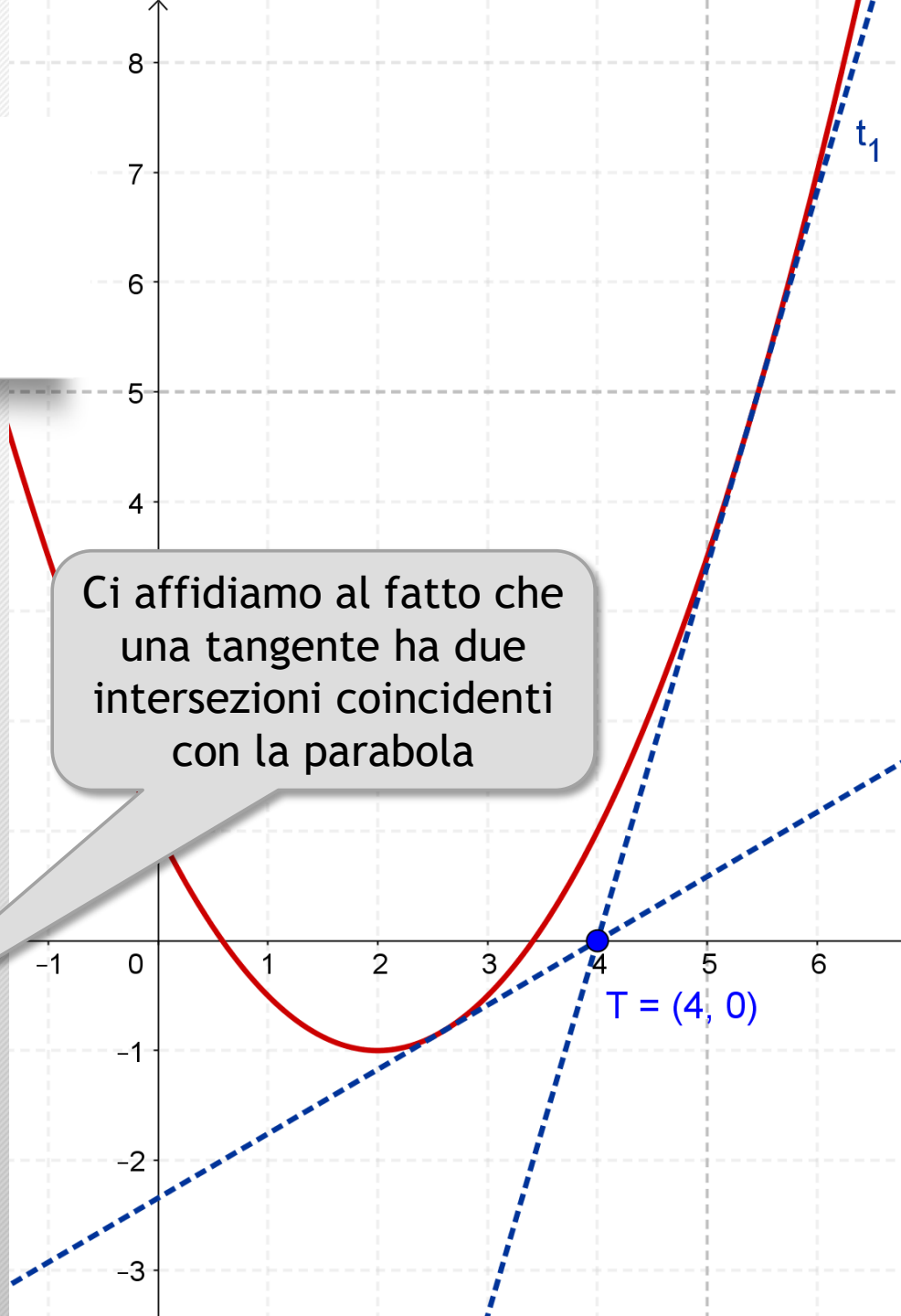


Quando non si può usare la derivata

- Equazione della tangente alla parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ tracciate da $T(4,0)$
- La derivata fornisce il coefficiente angolare in un punto della curva

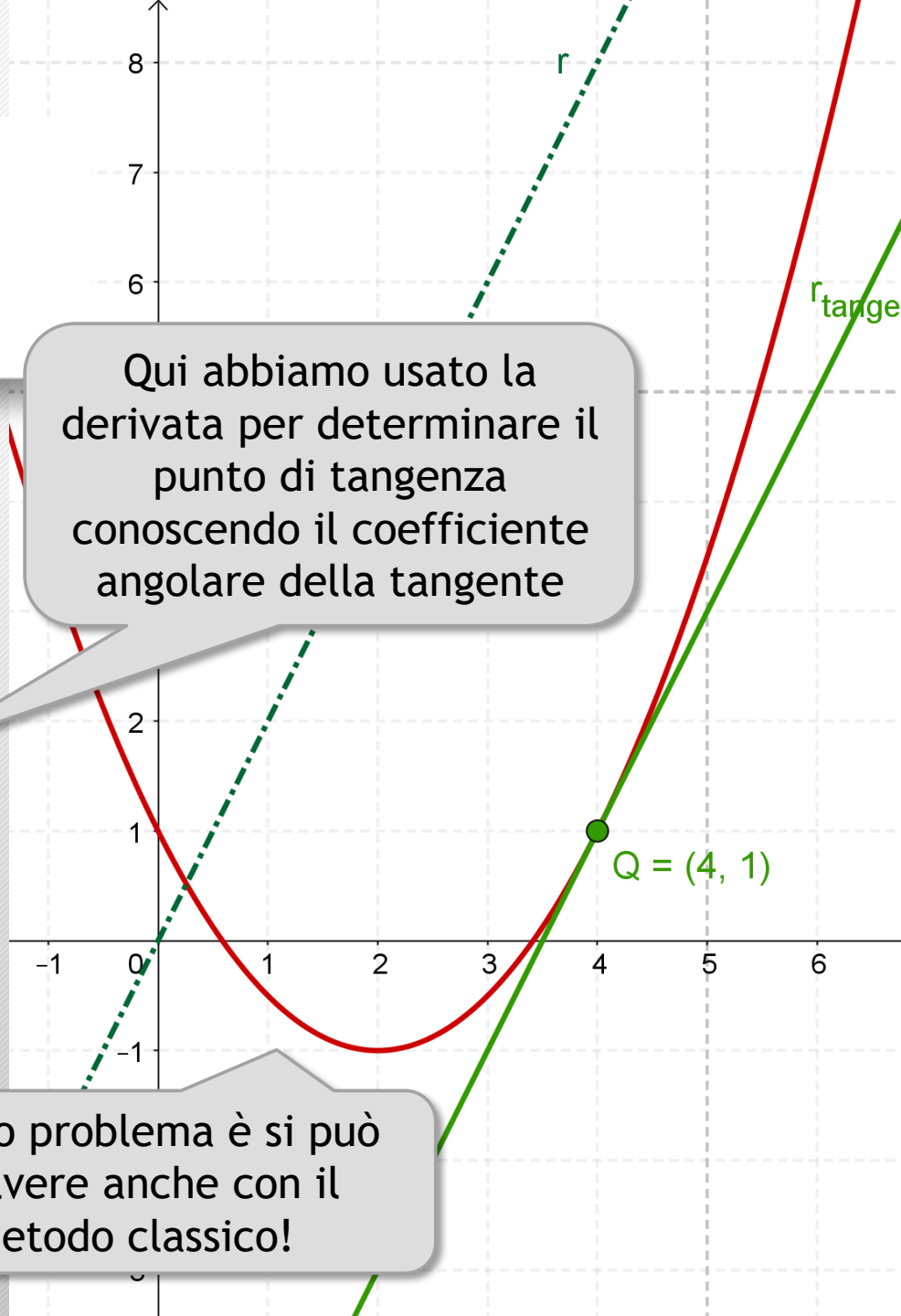
per poterla usare dobbiamo conoscere le coordinate del punto di tangenza (o almeno la sua ascissa)

- In questo caso non conosciamo il punto di tangenza e quindi non ci rimane che il metodo analitico:
  - equazione della retta per T: $y = m(x - 4)$
  - sistema con l'equazione della parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
  - imporre che il discriminante dell'equazione sia nullo!



Quando si può usare la derivata (2) … ma anche no

- Equazione della tangente alla circonferenza $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ **parallela** alla retta $r: y = 2x$
- Il punto di tangenza è il punto in cui la derivata della funzione è pari al coefficiente angolare della retta data
  - la derivata è $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = x - 2$
  - imponiamo che sia pari a due: $x - 2 = 2$, l'ascissa del punto di tangenza è $x_Q = 4$
- Da qui procediamo come in precedenza:
  - ordinata del punto di tangenza:
    $$y_Q = y(4) = \frac{1}{2}16 - 2 \cdot 4 + 1 = 1$$
  - generica retta per Q: $y - 1 = m(x - 4)$
- La retta tangente è $y = 2x - 7$ (il coefficiente angolare è $m = 2$



Tangente a una circonferenza (1)

- Non è possibile utilizzare la derivata per calcolare il coefficiente angolare della retta tangente a una circonferenza:

  l'equazione che la descrive non è una funzione

- Le circonferenze non sono funzioni perché non univoche, in altre parole, non è vero che a ogni valore delle ascisse x corrisponde un solo valore delle ordinate y
- È possibile però aggirare questo ostacolo cercando non la tangente alla circonferenza ma la tangente a una semicirconferenza

Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un'ellisse
Tangente a un'iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a una circonferenza (2)

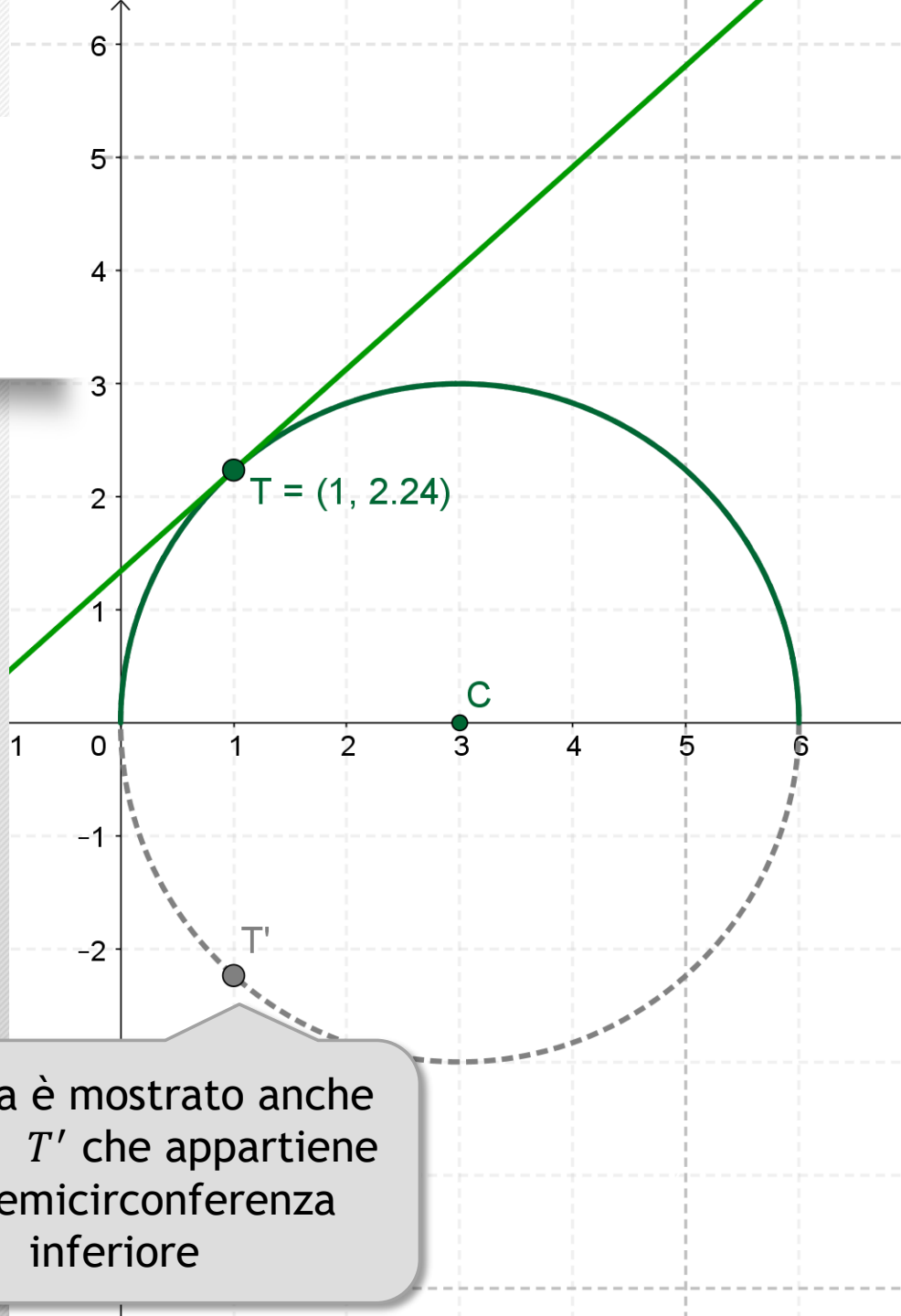
- Scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x = 0$ nel suo punto $T\left(1, \sqrt{5}\right)$
- Procediamo in questo modo:
  - ci sono due punti della circonferenza con ascissa $x = 1$
  - il punto T – che ci interessa - si trova sulla semicirconferenza superiore la cui equazione è $y = \sqrt{6x - x^2}$
- L'equazione di una semicirconferenza ottenuta in questo modo è una funzione
  - è univoca, a ogni ascissa corrisponde una sola ordinata

Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un'ellisse
Tangente a un'iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a una circonferenza (3)

- L'equazione della semicirconferenza è
$$y = \sqrt{6x - x^2}$$
- Calcoliamo la derivata di $y = \sqrt{6x - x^2}$
  - si tratta di una funzione composta, la composizione di $y = f(z) = \sqrt{z}$ e di $z = g(x) = 6x - x^2$
  - quindi
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (6 - 2x) = \frac{3 - x}{\sqrt{6x - x^2}}$$
  - il coefficiente angolare della retta tangente è
$$m = y'(1) = \frac{3 - 1}{\sqrt{6 - 1}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$
- La retta tangente è $y - \sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}(x - 1)$



In figura è mostrato anche il punto T' che appartiene alla semicirconferenza inferiore

- Scrivere l'equazione della retta tangente a $x^2 + y^2 - 6x = 0$ nel suo punto $T(1, -\sqrt{5})$

l'eq.ne della circonferenza non è una funzione ⇒

⇒ $y = \pm\sqrt{6x - x^2}$

il punto T si trova sulla semicirconferenza "inferiore" ⇒ $y = -\sqrt{6x - x^2}$

la derivata è la stessa, solo cambiata di segno

$$y' = -\frac{6 - 2x}{2\sqrt{6x - x^2}} = -\frac{3 - x}{\sqrt{6x - x^2}} \qquad m_T = y'(1) = -\frac{2}{\sqrt{6 - 1}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$t: \; y + \sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}(x - 1) \qquad y = \dots$

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a un’ellisse (1)

- Il problema si ripresenta se si cerca di determinare la tangente a un’ellisse

  l’equazione che descrive un’ellisse non è una funzione

- Si procede come in precedenza:
  - si scrive l’equazione della semiellisse che ci interessa: sarà una funzione
  - si determina la derivata della funzione trovata
  - si calcola la derivata nell’ascissa del punto di tangenza

La derivata calcolata nel punto di tangenza è il coefficiente angolare della retta tangente!

Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un’ellisse
Tangente a un’iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a un'ellisse (2)

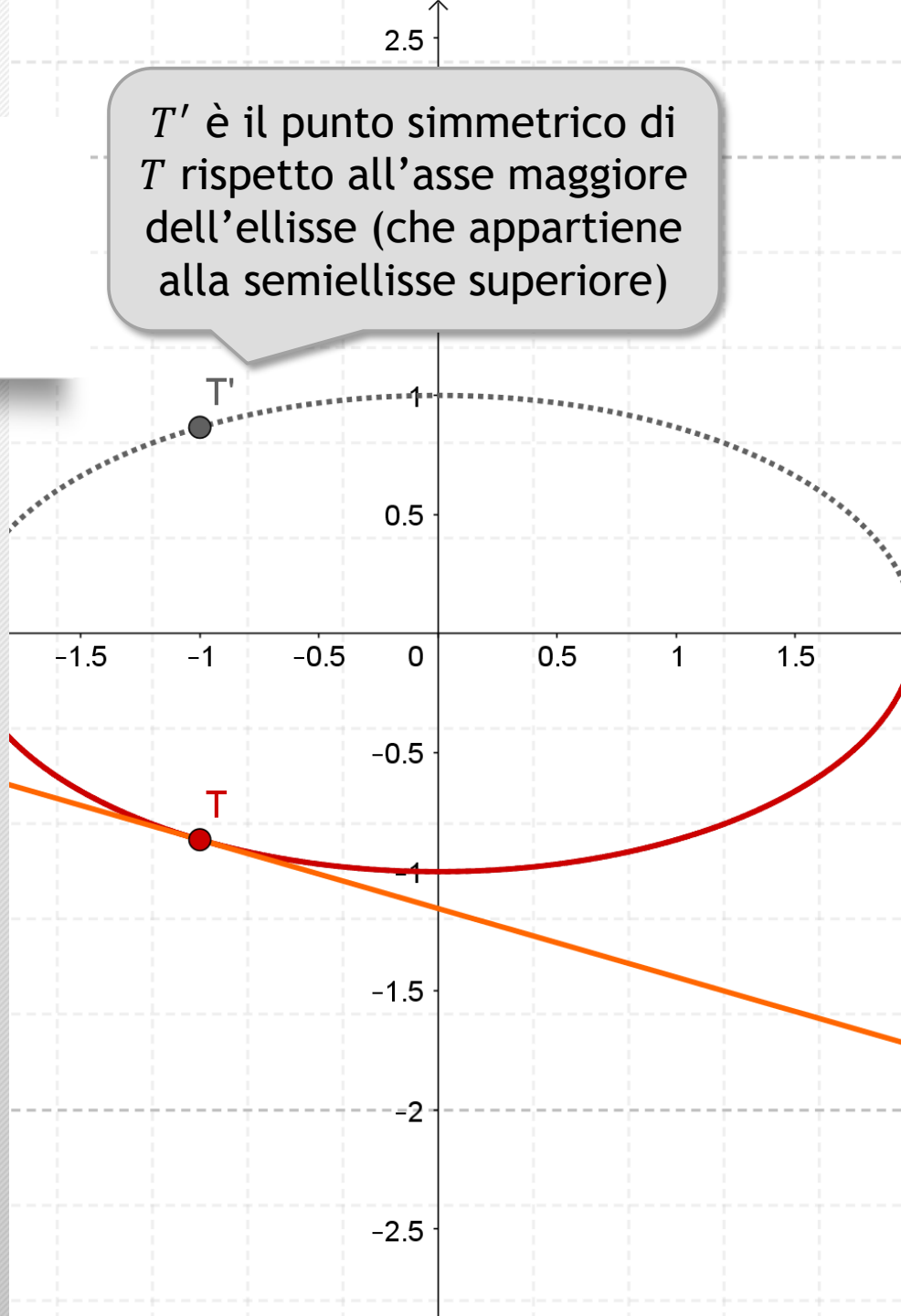
- Determinare la tangente all'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nel suo punto $T\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
  - la semiellisse che ci interessa è $y = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$
  - si tratta di una funzione composta, la composizione di $y = f(z) = -\sqrt{z}$ e di $z = g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$
  - quindi

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \left(-\frac{1}{4}2x\right) = \frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

  - il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m = y'(-1) = \frac{-1}{4\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

- La retta tangente è $y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x + 1)$



Scrivere l’equazione della retta tangente a $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ nel suo punto $Q\left(-1, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a un'iperbole

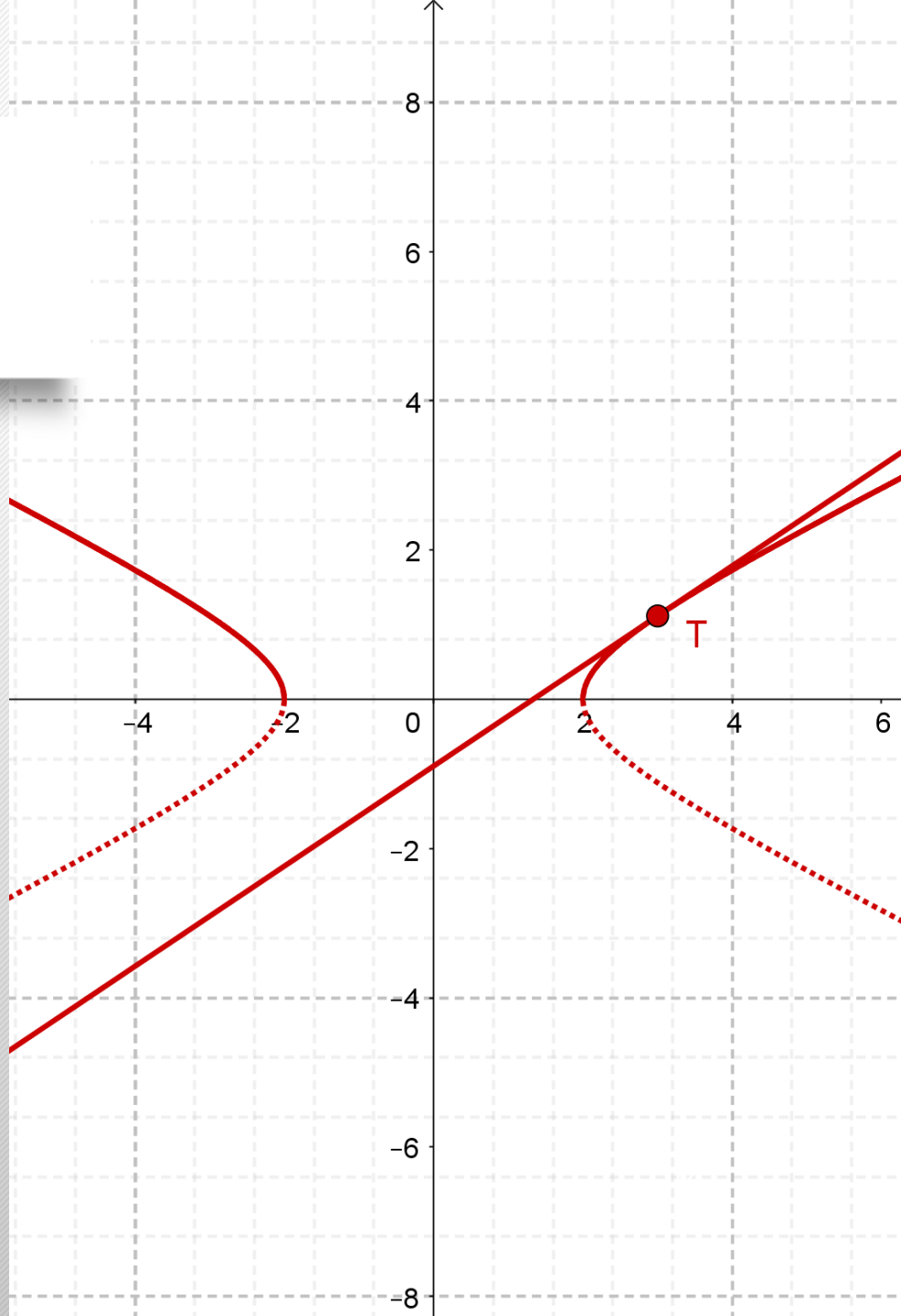
- Determinare la tangente all'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ nel suo punto $T\left(3, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$
  - la semiellisse che ci interessa è $y = +\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$
  - si tratta di una funzione composta, con $y = f(z) = +\sqrt{z}$ e con $z = g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$
  - quindi

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \left(\frac{1}{4} 2x\right) = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}}$$

  - il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m = y'(3) = \frac{3}{4\sqrt{\frac{9}{4} - 1}} = 3\frac{\sqrt{5}}{10}$$

- La retta tangente è $y - \frac{\sqrt{5}}{4} = 3\frac{\sqrt{5}}{10}(x - 3)$



Scrivere l'equazione della retta tangente a $x^2 + y^2 - 6x = 0$ nel suo punto $Q(2, -2\sqrt{2})$

$y^2 = 6x - x^2 \qquad y = \pm\sqrt{6x - x^2}$

$y' = \dfrac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \dfrac{2(3-x)}{2\sqrt{6x-x^2}} = \dfrac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}$

$y'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{12-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = m_Q$

$-\dfrac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$y + 2\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2) \quad t: y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Tangente a una funzione omografica

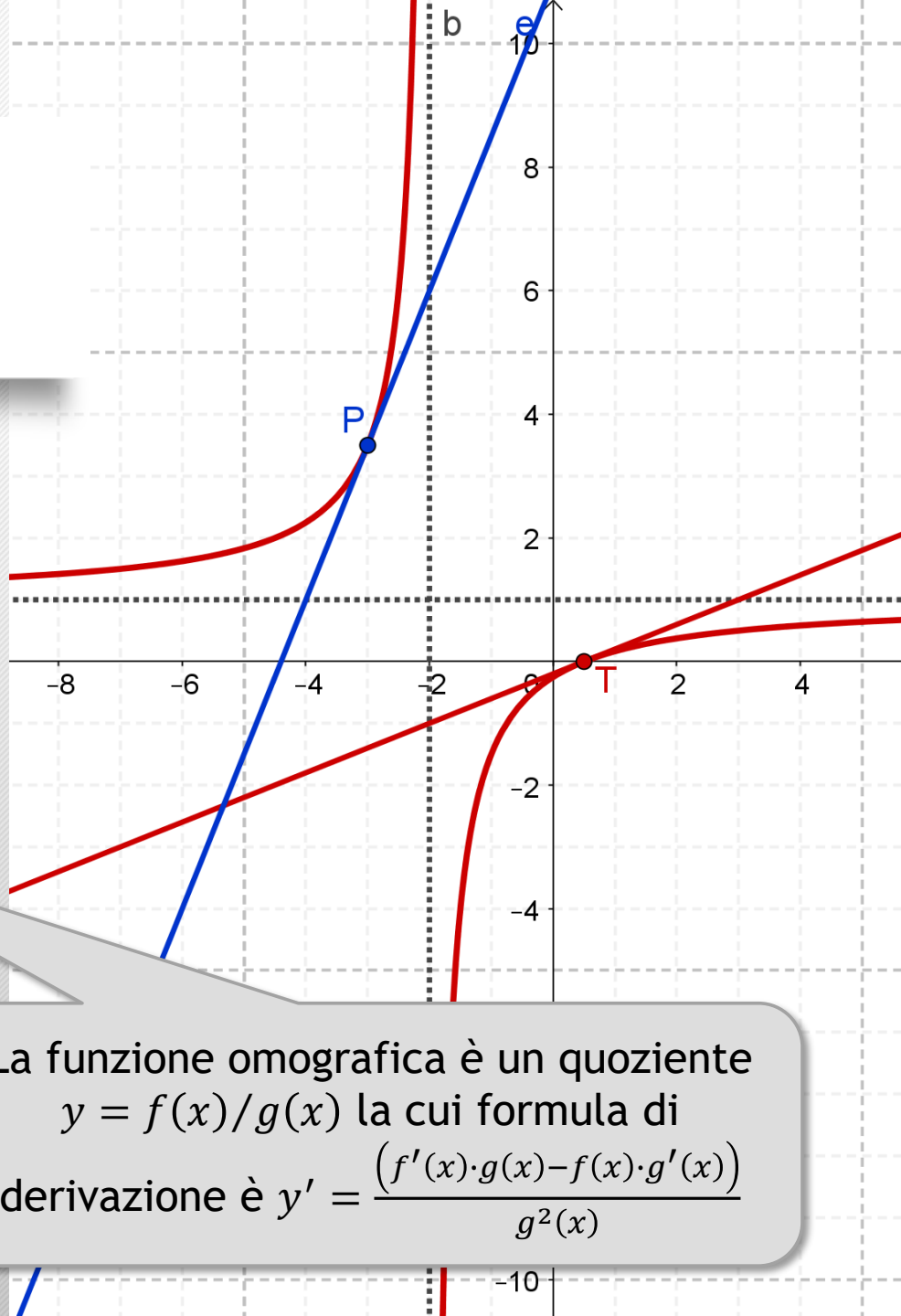
- Determinare la tangente alla funzione omografica $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ nel suo punto $T\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
- La funzione omografica è una funzione, per cui si può direttamente usare la derivata:

$$y' = \left(\frac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{2x+4}}\right)' = \frac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{(2x+4)} - \mathbf{(2x-1)}\cdot\mathbf{2}}{\mathbf{(2x+4)^2}} = \frac{10}{(2x+4)^2}$$

  - il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m = y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{(1+4)^2} = \frac{2}{5}$$

- La retta tangente è $y = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)$



La funzione omografica è un quoziente $y = f(x)/g(x)$ la cui formula di derivazione è $y' = \frac{\left(f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)\right)}{g^2(x)}$

Esercizi:

- Scrivere l'equazione della retta tangente a $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ nel suo punto $P\left(-\frac{3,7}{2}\right)$, far notare che non è necessario ricalcolare la derivata!

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Scrivere l’equazione della tangente alla parabola $x = 3y^2 - 2$ nei suoi punti di ascissa $x = 1$ utilizzando la derivata.

© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Parabola tangente a una retta data (1)

- Determinare la parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse il cui vertice ha ascissa $x_V = -5$ tangente alla retta $t: y = -3x - 2$ nel punto $T(-2,4)$
- Possiamo imporre tre condizioni:
  - l'ascissa del vertice è -5
  - la parabola *passa* per il punto T
  - **la derivata della parabola in T è pari al coefficiente angolare della retta tangente**
- Quest'ultima condizione è la più interessante, conoscere il coefficiente angolare della retta tangente in un punto equivale a conoscere il valore della derivata nell'ascissa corrispondente!

Questo ci consente di risolvere il problema solo risolvendo il sistema, senza dover imporre la tangenza usando il metodo classico!

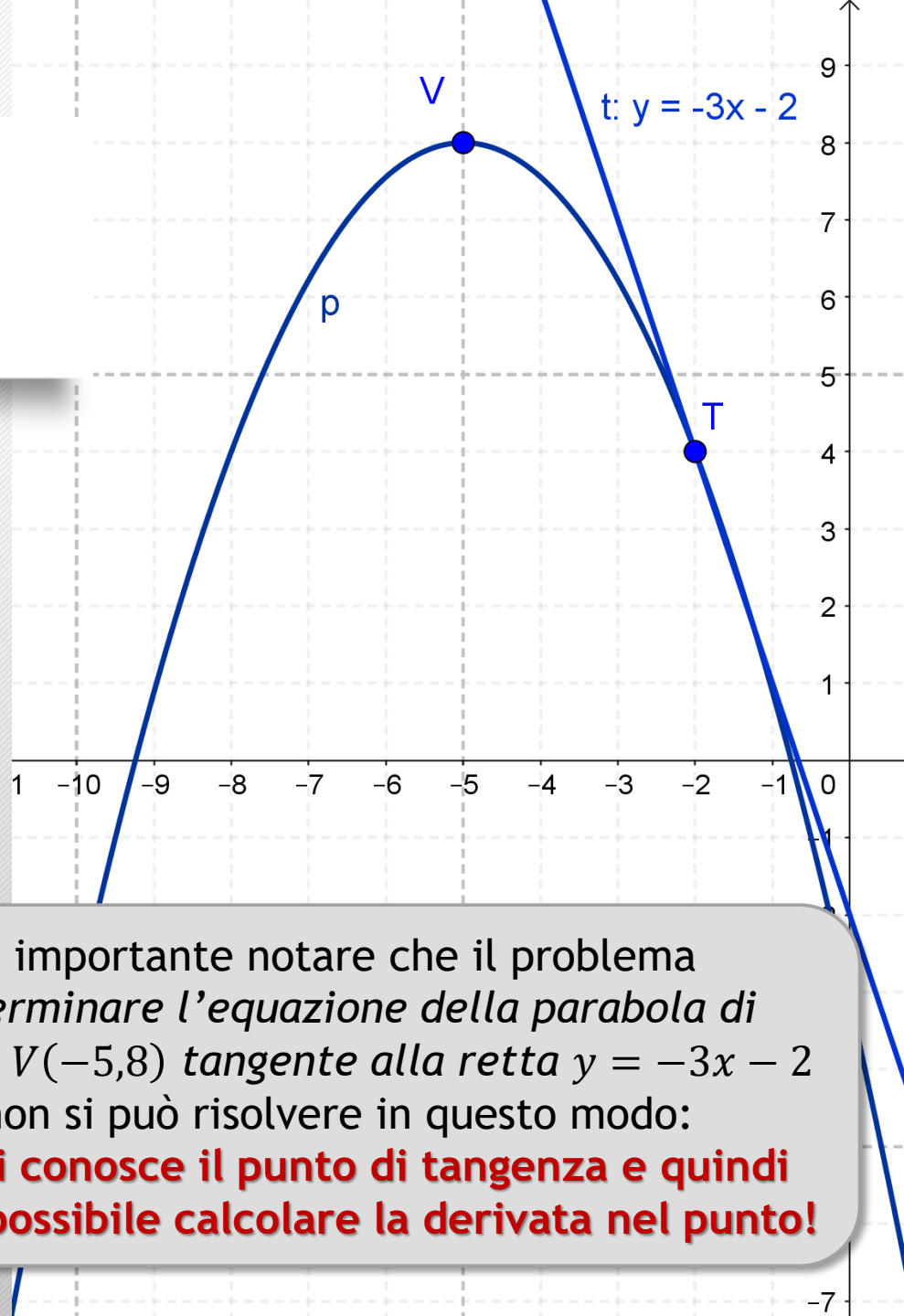
Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un'ellisse
Tangente a un'iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

Parabola tangente a una retta data (2)

- Sia $y = ax^2 + bx + c$ la generica parabola, la derivata sarà $y' = 2ax + b$
- Imponiamo le tre condizioni:
  - ascissa del vertice: $-b/2a = -5$
  - passaggio per T: $4a - 2b + c = 4$
  - derivata nel punto uguale al coefficiente angolare della retta tangente $y'(-2) = 4a + b = -3$
- Risolvendo il sistema si ottiene

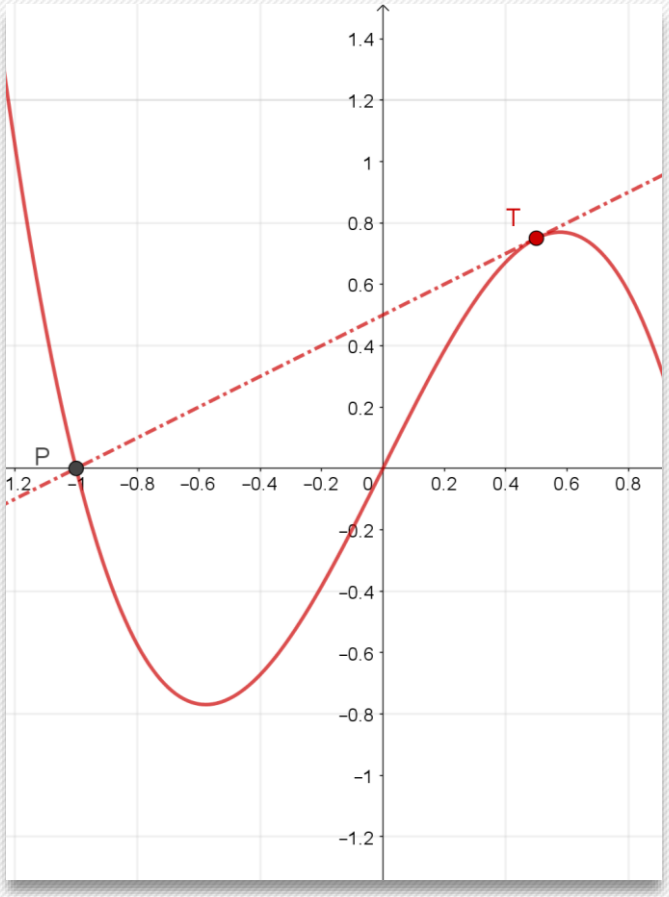
$$a = -\frac{4}{9}, b = -\frac{40}{9}, c = -\frac{28}{9}$$

- La parabola quindi è: $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{9}x - \frac{28}{9}$



È importante notare che il problema *determinare l'equazione della parabola di vertice $V(-5,8)$ tangente alla retta $y = -3x - 2$* non si può risolvere in questo modo:
non si conosce il punto di tangenza e quindi non è possibile calcolare la derivata nel punto!

Quando si può usare solo la derivata



- Determiniamo la tangente alla cubica di equazione $y = -2x^3 + 2x$ in $T\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
  - la derivata è $y' = -6x^2 + 2$
  - il coefficiente angolare è $y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$
  - la retta quindi è $y - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- Attenzione: in questo esempio non si può usare il metodo del discriminante …
- … perché richiede che la retta e la curva abbiano due sole intersezioni in tutto il dominio

La derivata, invece, *lavora* solo localmente, in punti infinitamente vicini a *T*

Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un'ellisse
Tangente a un'iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

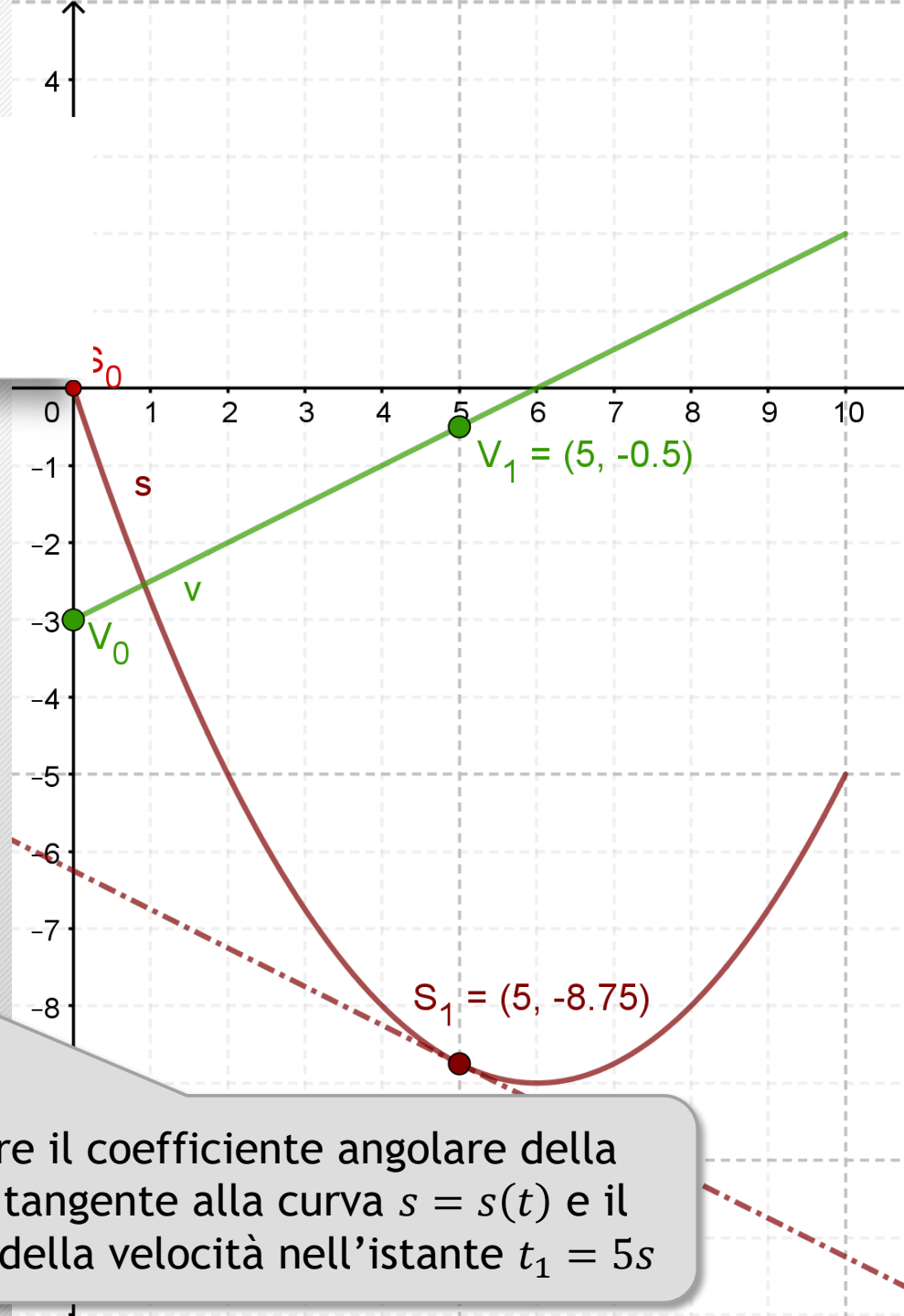
Applicazioni alla fisica: velocità e accelerazione

- La velocità media è il rapporto tra lo spazio percorso Δs in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo Δt stesso: $v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta \mathrm{t}}$
  - dove $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$
- Se calcoliamo lo stesso rapporto calcolato per un tempo infinitesimo dt abbiamo la velocità istantanea: $v = \frac{s(t+dt)-s(t)}{(t+d\mathrm{t})-t}$
- Possiamo pensare alla velocità istantanea come la parte standard di questo rapporto: $v(t) = \mathrm{std}\frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$
  - allo stesso modo $a(t) = \mathrm{std}\frac{dv(t)}{dt} = v'(t)$
- In generale, ogni grandezza fisica definita come variazione rispetto a … può essere pensata come la derivata della grandezza fatta rispetto a …

Quando si può usare la derivata
Quando non si può usare la derivata
Quando si può … ma anche no
Tangente a una circonferenza
Tangente a un'ellisse
Tangente a un'iperbole
Tangente a una funzione omografica
Parabola tangente a una retta data
Quando si può usare solo la derivata
Velocità e accelerazione

Moto uniformemente accelerato

- Sia $s(t) = \frac{1}{4}t^2 - 3t$ la legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea nell'intervallo di tempo $[0,10]$ dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi
- Determinare:
  - la legge $v(t)$ della velocità del moto
  - la velocità iniziale v_0
  - la posizione e la velocità all'istante $t_1 = 5s$
  - la retta tangente alla curva $s = s(t)$ nel suo punto di ascissa $t_1 = 5$
  - dimostrare che l'accelerazione è costante
  - costruire il grafico tempo-spazio del moto
  - costruire anche il grafico tempo-velocità del moto

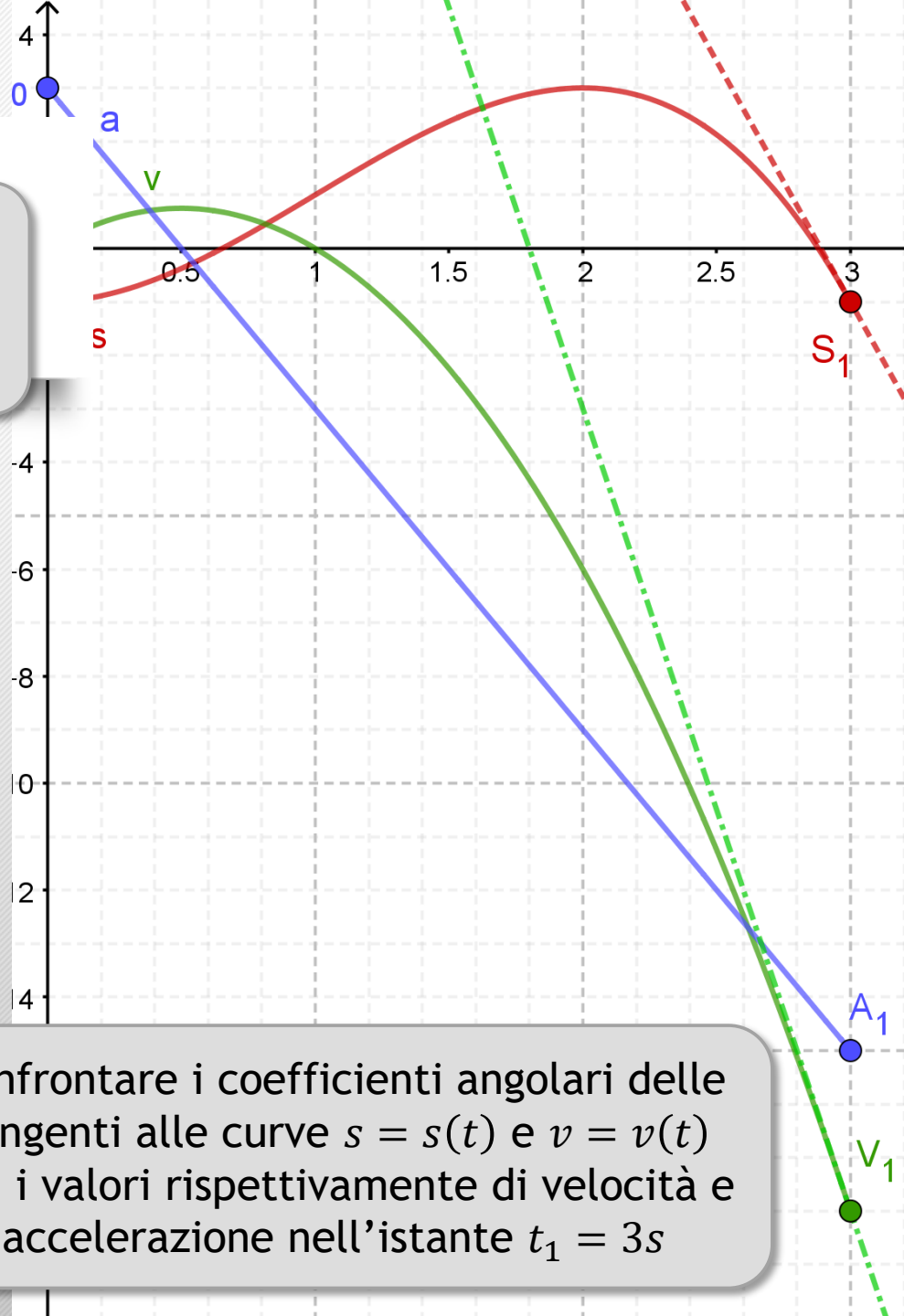


Notare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $s = s(t)$ e il valore della velocità nell'istante $t_1 = 5s$

Moto qualsiasi

L'esercizio precedente si poteva svolgere anche senza utilizzare mai le derivate, **ma questo?**

- Sia $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 1$ la legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea nell'intervallo di tempo$[0,3]$ dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi
- Determinare:
  - la legge $v(t)$ della velocità del moto e la legge che descrive l'accelerazione istante per istante dimostrando che non si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato
  - la velocità iniziale v_0 e l'accelerazione iniziale a_0
  - la velocità finale all'istante $t_1 = 3s$ e l'accelerazione nello stesso istante, le rette tangenti alla $s = s(t)$ e alla $v = v(t)$
  - in quale istante la velocità è nulla?
  - costruire anche il grafico tempo-velocità del moto
  - costruire infine il grafico tempo-accelerazione del moto



Confrontare i coefficienti angolari delle tangenti alle curve $s = s(t)$ e $v = v(t)$ con i valori rispettivamente di velocità e accelerazione nell'istante $t_1 = 3s$

Sia $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 1$ la legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea nell'intervallo di tempo$[0,3]$ dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi
Determinare:

- la legge $v(t)$ della velocità del moto e la legge che descrive l'accelerazione istante per istante dimostrando che non si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato
- la velocità iniziale v_0 e l'accelerazione iniziale a_0
- la velocità finale all'istante $t_1 = 3s$ e l'accelerazione nello stesso istante, le rette tangenti alla $s = s(t)$ e alla $v = v(t)$
- in quale istante la velocità è nulla?
- costruire anche il grafico tempo-velocità del moto
- costruire infine il grafico tempo-accelerazione del moto

$v(t) = std\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = s'(t) = -3t^2 + 6t \longrightarrow v(0) = v_0 = 0$

$a(t) = v'(t) = -6t + 6 \Rightarrow$ l'accelerazione non è costante! $\longrightarrow a(0) = 6$

$v(3) = -3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 = -27 + 18 = -9 \qquad a(3) = -6 \cdot 3 + 6 = -18 + 6 = -12$

$s'(t) = -3t^2 + 6t \Rightarrow m_{3s} = -9 \qquad s - s(3) = -9(t-3) \ldots$

$v'(t) = -6t + 6 \Rightarrow m_{3v} = -12 \qquad v - v(3) = -12(t-3)$

$v(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Rightarrow -3t(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} t=0 \\ t=2 \end{matrix}$