Iperreali

06 – Ritorno a *Hyperreal Mountain*

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina – www.liceograssilatina.org

© 2021, Gualtiero Grassucci

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio

Un nuovo numero

- Definiamo un nuovo numero $e = \mathrm{std}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ dove ε è, come di consueto, un infinitesimo
- Una definizione diversa è $e = \mathrm{std}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}$ dove questa volta M è un infinito
- Le due definizioni sono equivalenti tenendo conto che:
  - se ε è un infinitesimo allora $\frac{1}{\varepsilon}$ è un infinito
  - se M è un infinito allora $\frac{1}{M}$ è un infinitesimo
- La definizione rigorosa è $e = \mathrm{std}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}$ con N *ipernaturale* infinito ma si può dimostrare che $e = \mathrm{std}\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}$ per un qualsiasi infinito M

Sì, ma quanto vale e?

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando

Una curiosa proprietà

$e = 2.71828$ … è un **numero irrazionale trascendente** detto **numero di Eulero**

- Si può facilmente intuire che $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, infatti:
  - sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $f(x) = e^x$
  - la derivata prima, come vedremo più avanti, è $f'(x) = e^x$, la derivata seconda $f''(x) = e^x$, …
  - ricordando che la formula di Taylor è

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^k(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

  - e scegliendo $x_0 = 0$ si ha $e^x \approx 1 + x + \cdots + \frac{x^k}{k!}$
  - a questo punto se calcoliamo l'approssimazione per $x = 1$ e ricordiamo che, per definizione, $0! = 1$ e $1! = 1$ abbiamo

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

- Per $n = 10$ abbiamo, per esempio, $e \approx \frac{9864101}{3628800} = \mathbf{2.7182818}01146385$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

Qualche applicazione (1)

- Consideriamo l'espressione $\frac{1}{x}\ln(x+1)$
- Proviamo a calcolare il valore di questa espressione per $x = \varepsilon$ con ε infinitesimo, si ha $\frac{1}{\varepsilon}\ln(\varepsilon+1)$
- Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo scriverla come:

$$\ln(\varepsilon+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

- Ma sappiamo che $\mathrm{e} = \mathrm{std}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ quindi

$$\mathrm{std}[\ln(\varepsilon+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}] = \ln e = 1$$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando

Vedremo nei prossimi anni che la quantità $\frac{1}{x}\ln(x+1)$ vale proprio uno quando la x tende a diventare infinito e il limite corrispondente sarà detto **notevole**

© 2020 Gualtiero Grassucci - gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Qualche applicazione (2)

- Consideriamo l'espressione $\frac{e^x-1}{x}$
- Proviamo a calcolare il valore di questa espressione per $x = \varepsilon$ con ε infinitesimo, si ha $\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}$
- Poniamo $\delta = e^\varepsilon - 1$, quindi $\varepsilon = \ln(\delta + 1)$ e l'espressione precedente diventa

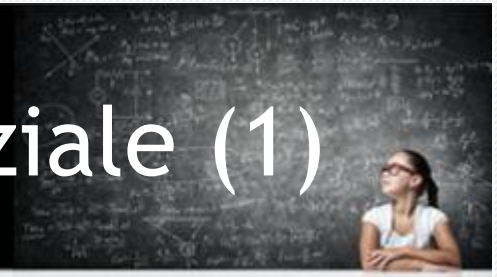
$$\frac{\delta}{\ln(\delta+1)} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}\cdot\ln(\delta+1)}$$

- Sappiamo però che $\frac{1}{\varepsilon}\ln(\varepsilon+1) = 1$ per cui

$$\operatorname{std}\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon} = \operatorname{std}\frac{1}{\frac{1}{\delta}\cdot\ln(\delta+1)} = 1$$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

La derivata della funzione esponenziale (1)



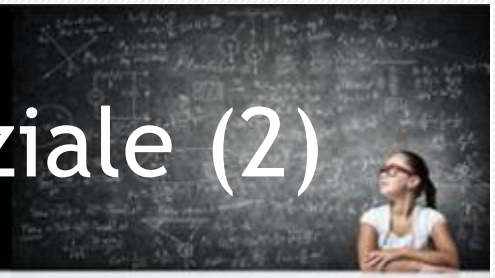
- Sia $y = e^x$ la funzione esponenziale
  - il rapporto differenziale è $\frac{de^x}{dx} = \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx}$ con dx infinitesimo
  - usando le proprietà delle potenze possiamo scrivere $\frac{de^x}{dx} = e^x \frac{e^{dx}-1}{dx}$
  - sappiamo che, se δ è infinitesimo, $\text{std}\frac{e^{\delta}-1}{\delta} = 1$ per cui $\text{std}\, e^x \frac{e^{dx}-1}{dx} = e^x$
- Ricordando che la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ è, per definizione, $f'(x) = \text{std}\frac{df(x)}{dx}$ ecco la nostra derivata:

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

La derivata della funzione esponenziale (2)



- Sia $y = e^{f(x)}$ una funzione esponenziale il cui esponente è una funzione $f(x)$ derivabile
  - ricordando che la formula per la derivazione delle funzioni composte è

$$[f(g(x))]' = \boldsymbol{f'(z)} \cdot \boldsymbol{g'(x)} \text{ con } \boldsymbol{z = g(x)}$$

- calcoliamo la derivata di $y = e^{f(x)}$ come funzione composta:

$$\boldsymbol{\left(e^{f(x)}\right)'} = (e^z)' \cdot f'(x) = \boldsymbol{e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

- Dove abbiamo posto $z = f(x)$
- Per esempio $\boldsymbol{\left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} \cdot (2x+1)}$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

$y = e^{x^2-2x} \qquad y' = e^{x^2-2x} \cdot (2x-2) = (2x-2)\, e^{x^2-2x}$

$y = e^{\frac{1}{x}} \qquad y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y = e^{-x} \qquad y' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

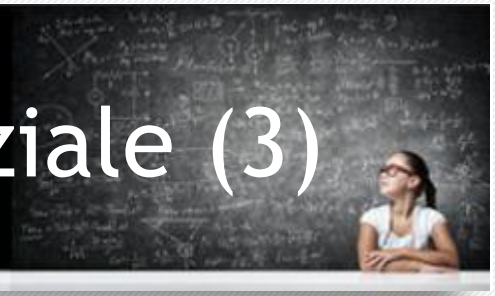
$y = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow y' = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = e^x \frac{e^x+1-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$(e^{2x})' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$

$y = \frac{e^x}{e^{2x}+1} \Rightarrow y' = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = e^x \frac{e^{2x}+1-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = e^x \frac{1-e^{2x}}{(e^{2x}+1)}$

© 2020 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

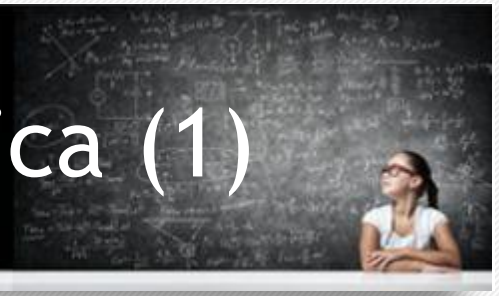
La derivata della funzione esponenziale (3)



- Sia ora $f(x) = a^x$
- Per le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere $a^x = e^{x \cdot \ln a}$
  - infatti $e^{x \cdot \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x = a^x$ visto che $e^{\ln a} = a$
- Quindi $f'(x) = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \ln a = \boldsymbol{a^x \cdot \ln a}$
  - Abbiamo usato la formula $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ con $f(x) = x \cdot \ln x$
- Per esempio:
  - $\boldsymbol{(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3}$
  - Notare che, avendo la formula, non è stato necessario *passare* per la trasformazione $3^x = e^{x \cdot \ln 3}$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

La derivata della funzione logaritmica (1)



- Possiamo usare i risultati ottenuti anche per determinare la derivata della funzione logaritmica $y = \ln x$
- Il rapporto differenziale è $\frac{\ln(x+dx)-\ln x}{dx} = \frac{1}{dx}\ln\frac{x+dx}{x} = \ln\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}}$
- L'argomento del logaritmo può diventare:

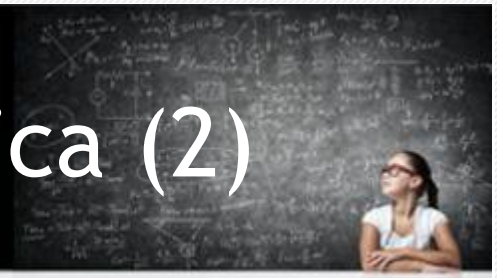
$$\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}} = \left(1+\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}} = \left(1+\frac{1}{x/dx}\right)^{\frac{1}{dx}} = \left[\left(1+\frac{1}{x/dx}\right)^{\frac{x}{dx}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

- Tenendo conto che $\frac{x}{dx}$ è infinito (perché dx è infinitesimo) si ha che
- $\text{std}\left(1+\frac{1}{x/dx}\right)^{\frac{x}{dx}} = e$ per cui $\text{std}\left[\left(1+\frac{1}{x/dx}\right)^{\frac{x}{dx}}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$

Quindi, in conclusione $\mathbf{(\ln x)'} = \text{std}\frac{\ln(x+dx)-\ln x}{dx} = \text{std}\ln\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \mathbf{\frac{1}{x}}$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

La derivata della funzione logaritmica (2)



- Calcoliamo ora la derivata della funzione $y = \log_a x$ con $a \neq 0{,}1$ e positivo
- Per le proprietà dei logaritmi $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
- Ma allora:

$$\boldsymbol{(\log_a x)'} = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \boldsymbol{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}}$$

- dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\frac{1}{\ln a}$ è una costante moltiplicativa
- Per esempio $(\log_3 x)' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x}$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

La derivata della funzione logaritmica (3)

- Calcoliamo ora la derivata della funzione $y = \ln f(x)$
  - Ricordiamo ancora una volta che la formula per la derivazione delle funzioni composte è

$$[f(g(x))]' = \boldsymbol{f'(z) \cdot g'(x)} \text{ con } \boldsymbol{z = g(x)}$$

- Ma allora:

$$\boldsymbol{(\ln f(x))'} = \ln z \cdot f'(x) = \frac{1}{z} f'(x) = \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

- dove abbiamo posto $\boldsymbol{z = f(x)}$
- Per esempio $\boldsymbol{\left(\ln\left(2x - x^3\right)\right)' = \frac{2-3x^2}{2x-x^3}}$

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

Comportamento agli estremi (1)

- Gli iperreali possono tornare molto utili per determinare il comportamento delle funzioni agli estremi del loro dominio
- Facciamo un esempio, sia $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
  - il dominio della funzione $f(x)$ è $D = (-\infty, +\infty)$
  - questo vuol dire che **non possiamo** calcolare la funzione per $x = \pm\infty$
  - però **possiamo** calcolarla **infinitamente vicino** a questi *punti*
- Sia M un infinito allora $f(M) = \frac{M}{M^2+1}$ che è un rapporto di infiniti
  - se raccogliamo M a denominatore abbiamo $\frac{M}{M\left(M+\frac{1}{M}\right)} = \frac{1}{M+\frac{1}{M}}$
  - ma $\frac{1}{M}$ è un infinitesimo, $M + \frac{1}{M}$ un infinito e $\frac{1}{M+\frac{1}{M}}$ un infinitesimo
- In conclusione $\mathbf{std}\,\frac{M}{M^2+1} = \mathrm{std}\,\frac{1}{M+\frac{1}{M}} = \mathbf{0}$

Un nuovo numero

Stesso risultato si poteva ottenere ricordando che M^2 è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a M

esponenziale
La derivata della

Tutti gli infinitesimi sono **infinitamente vicini a zero!**

Asintoti

Avvicinandosi a infinito la funzione diventa **infinitamente vicina a zero!**

$y = \ln \frac{1}{x}$ $\quad y' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$

$\hookrightarrow (x^n)' = n\,x^{n-1}$ con $n = -1$

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$\hookrightarrow y = \ln \frac{1}{x} = \ln(x^{-1}) = (-1)\ln x = -\ln x$

$\hookrightarrow$ proprietà dei logaritmi: n. 3

$y' = (-\ln x)' = -\frac{1}{x}$

© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad y' = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1)$$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

la derivata di una somma è più facile della derivata di un prodotto

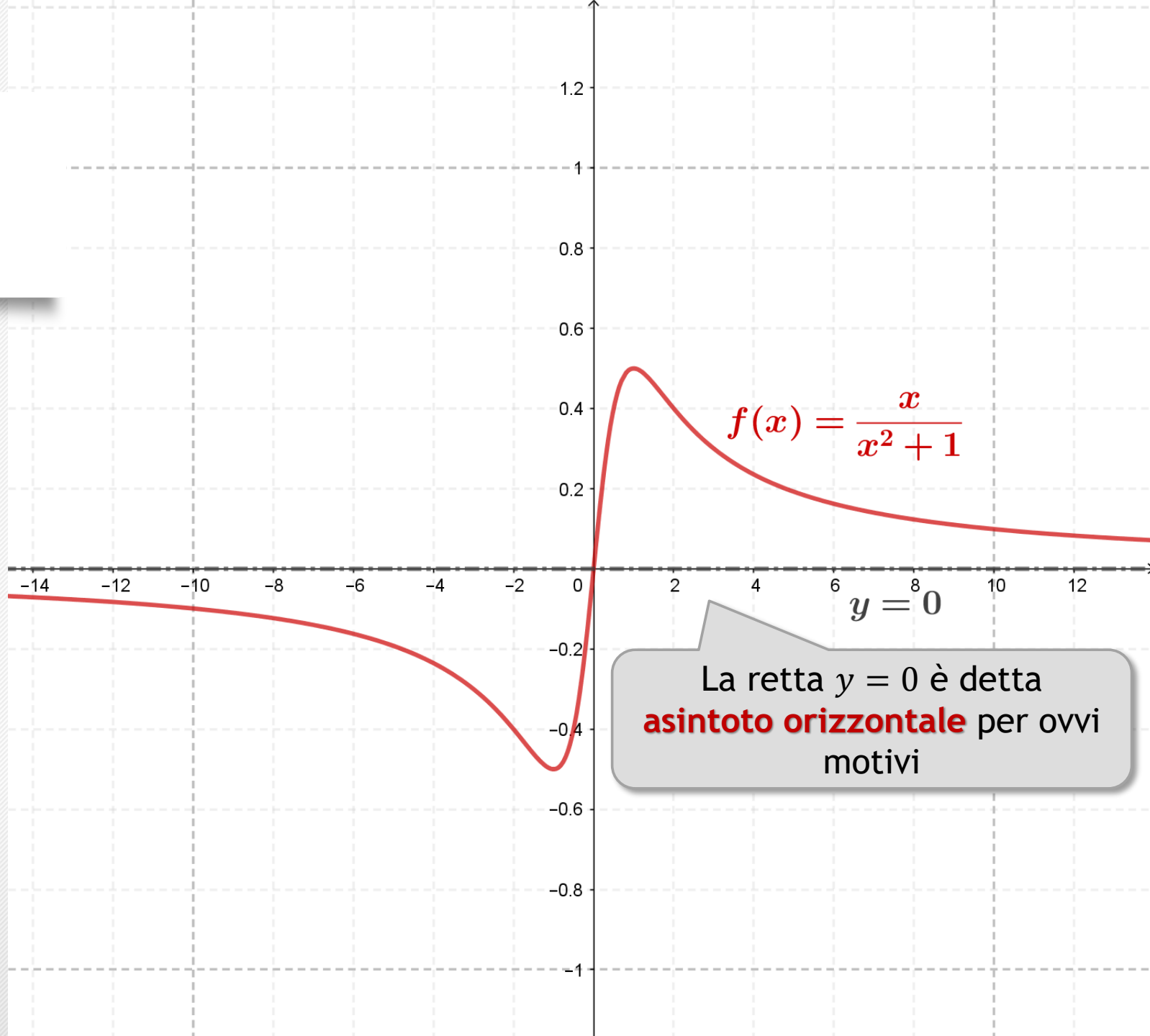
© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Asintoto orizzontale

- In rosso la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
- Si vede subito che la retta $y = 0$ è un asintoto per la funzione:

La distanza tra funzione e retta diventa infinitesima quando la x è molto grande, infinita: $x = M$

- Lo stesso risultato si ottiene calcolando la funzione per x infinita ma negativa: $x = -M$



$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $D = (-\infty, +\infty)$ sia $n > 0$ infinito

$f(-n) = -\frac{n}{n^2+1} = -\frac{n}{n(n+\frac{1}{n})}$

↳ infinitesimo

↳ $\text{std}[f(-n)] = -\frac{1}{n}$ → infinitesimo

la $f(x)$ quando x è infinito e negativo è un infinitesimo

© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Comportamento agli estremi (2)

- Facciamo un altro esempio, sia $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
  - il dominio della funzione $f(x)$ è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
  - questo vuol dire che **non possiamo** calcolare la funzione per $x = 0$
  - però possiamo calcolarla **infinitamente vicino** a questo punto
- Sia $\varepsilon > 0$ un infinitesimo allora $f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon}$ che è un rapporto di infinitesimi
  - se raccogliamo ε a numeratore abbiamo $\frac{\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$
  - Ma ε è un infinitesimo, $\frac{1}{\varepsilon}$ un infinito e $\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$ un infinito a sua volta

Avvicinandosi a zero la funzione diventa **infinitamente grande!**

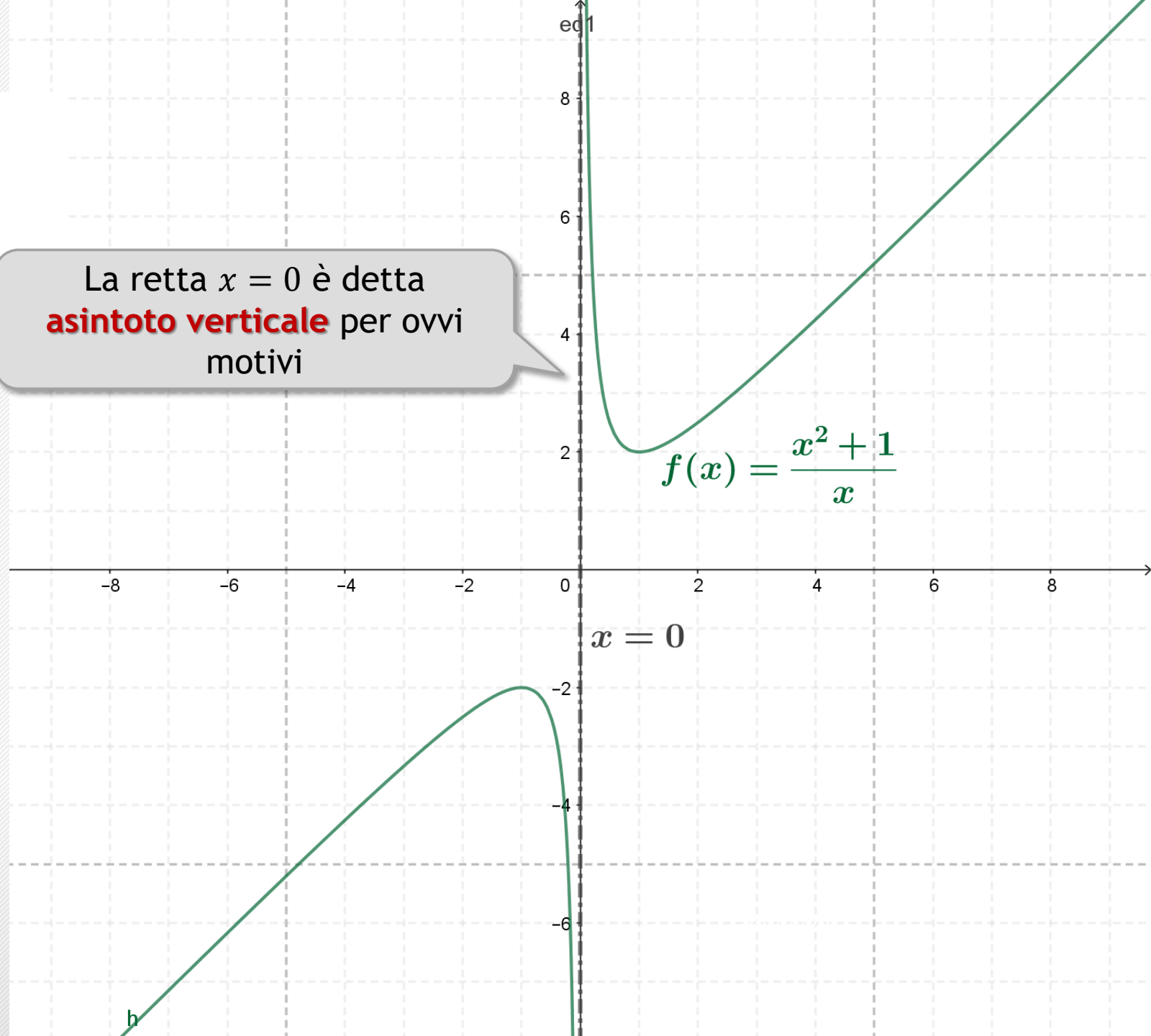
Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento

Asintoto verticale

- In verde la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
- Si vede subito che la retta $x = 0$ è un asintoto per la funzione:

La distanza tra funzione e retta diventa infinitesima quando la x è infinitamente vicina a zero: $x = \varepsilon$

- Lo stesso risultato si ottiene calcolando la funzione per x infinitamente vicina a zero ma negativa: $x = -\varepsilon$
- Notare che la funzione sembra avere un andamento asintotico anche quando la x tende a diventare infinitamente grande!



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f(n) = \frac{n^2+1}{n} = \frac{n\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n} = n + \frac{1}{n}$$

→ infinitesimo

$$\text{std}(f(n)) = n$$ → infinito (come si evince dal grafico)

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$f(n) = n + \frac{1}{n}$$ ... anche più facile!

© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Comportamento agli estremi (3)

Più rapidamente: M^2+1 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $M+1$ e quindi il loro rapporto è un infinito

- Ancora un esempio, sia $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$
  - il dominio della funzione $f(x)$ è $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$
- Sia $M>0$ un infinito, $f(M)=\frac{M^2+1}{M+1}$ che è un rapporto di infiniti
  - se raccogliamo M abbiamo $\frac{M(M+1)}{M\left(1+\frac{1}{M}\right)}=\frac{M+1}{1+\frac{1}{M}}$ che è un infinito
- Proviamo a studiare allora l'andamento della derivata in M:
  - $f'(x)=\frac{(x^2+2x-1)}{(x+1)^2}$ e $f'(M)=\frac{(M^2+2M-1)}{(M+1)^2}$
  - raccogliendo M^2 si ha $\frac{M^2\left(1+\frac{2}{M}-\frac{1}{M^2}\right)}{M^2\left(1+\frac{1}{M}\right)^2}$ e quindi $\operatorname{std} f'(M)=1$

Avvicinandosi a infinito la funzione ha un andamento tale da avvicinarsi **infinitamente a una retta** di coefficiente angolare 1!

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

Comportamento agli estremi (4)

- La retta a cui si *appoggia* la $f(x)$ è del tipo $y = 1 \cdot x + q$
  - Il coefficiente angolare è, come visto, $\text{std}\, f'(M)$
- Ora cerchiamo la quota q in modo che la differenza in M tra la funzione e la retta stessa sia infinitesima
- Scegliamo quindi la quota q come $q = f(M) - 1 \cdot M$:
  - $\frac{M^2+1}{M+1} - M = \frac{M^2+1-M^2-M}{M+1} = \frac{1-M}{M+1}$ per cui $\text{std}\frac{1-M}{M+1} = \mathbf{-1}$
- La retta $y = x \mathbf{- 1}$ è infinitamente vicina alla funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ quando la x è infinita
- In altre parole, $\boldsymbol{y = x - 1}$ è un **asintoto obliquo** per la funzione

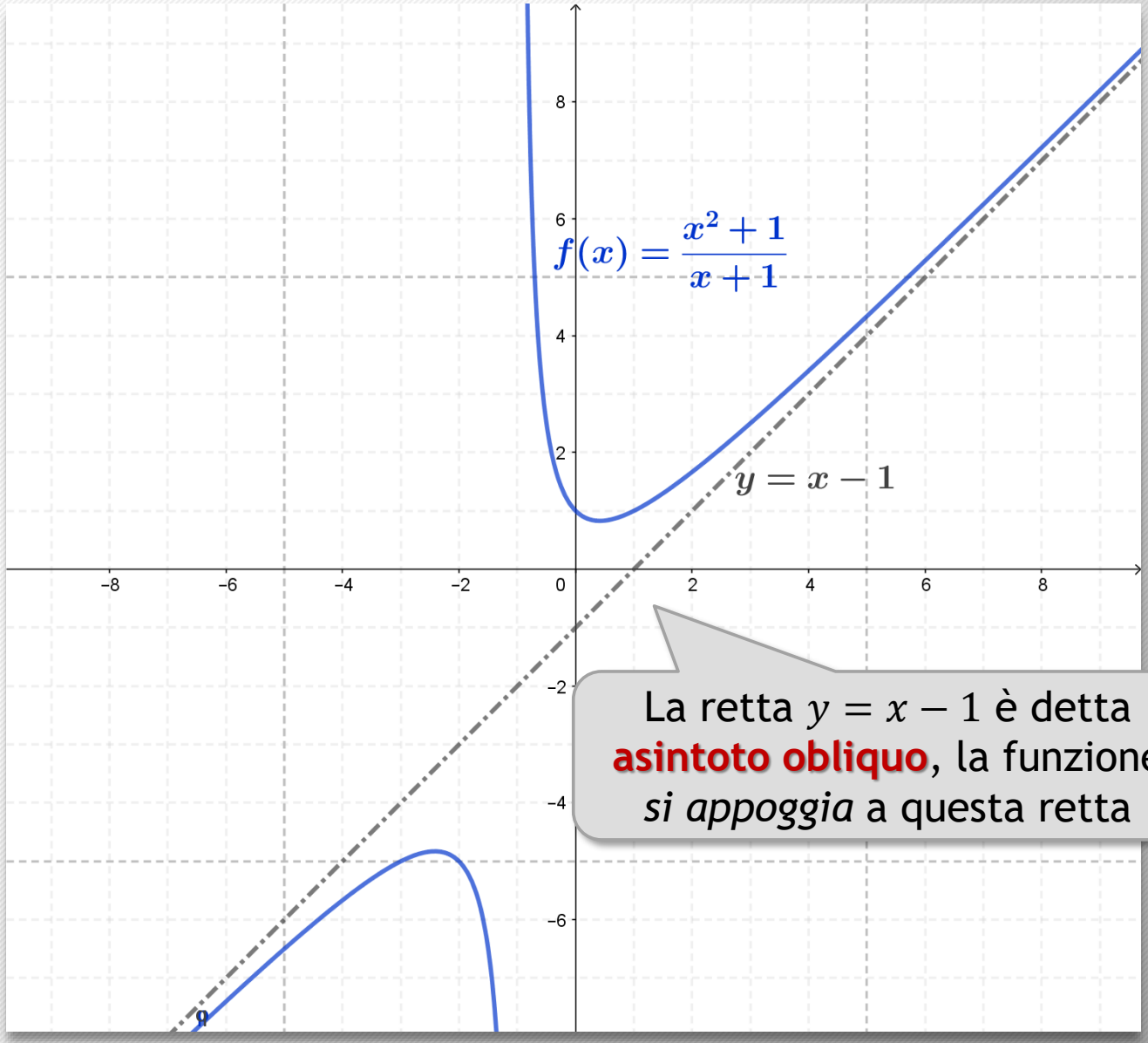
Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

Asintoto obliquo

- In azzurro la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
- Si vede subito che $y = x - 1$ è un asintoto per la funzione:

La distanza tra funzione e retta diventa infinitesima quando la x è infinitamente grande: $x = M$

- Lo stesso risultato si ottiene calcolando la funzione per x infinitamente grande ma negativa: $x = -M$
- Notare che la funzione sembra avere un andamento asintotico anche quando la x è infinitamente vicina a -1!



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \qquad D \equiv (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty) \qquad \delta > 0 \text{ infinitesimo}$$

$$f(-1+\delta) = \frac{(-1+\delta)^2+1}{\cancel{-1}+\delta\cancel{+1}} = \frac{1-2\delta+\delta^2+1}{\delta} =$$

$$= \frac{2-2\delta+\delta^2}{\delta} = \frac{\cancel{\delta}\left(\frac{2}{\delta}-2+\delta\right)}{\cancel{\delta}} = \frac{2}{\delta} - 2 + \delta$$

$\to$ infinito

$\to$ infinitesimo

$\to$ finito non nullo

$$\text{std}[f(-1)] = \text{std}\left[\frac{2}{\delta}-2+\delta\right] = M$$

se x è infinitamente vicino a -1 la $f(x)$ è infinita!

© 2019 Gualtiero Grassucci - gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Ricapitolando

- Nel seguito $\delta > 0$ è un infinitesimo e $M > 0$ un infinito
- Se $\mathbf{std}\, f(x_0 \pm \delta) = \pm M$ allora $x = x_0$ è un **asintoto verticale** per la funzione $f(x)$
- Se $\mathbf{std}\, f(\pm M) = y_0$ allora $y = y_0$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione $f(x)$
- Se $\mathbf{std}\, f(\pm M) = N$, con N un infinito, allora la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ dove …
  - $\mathbf{m = std}\, f'(\pm M)$ se $m \neq 0$ è finito e …
  - $\mathbf{q = std}(f(\pm M) - mM)$ se q è finito

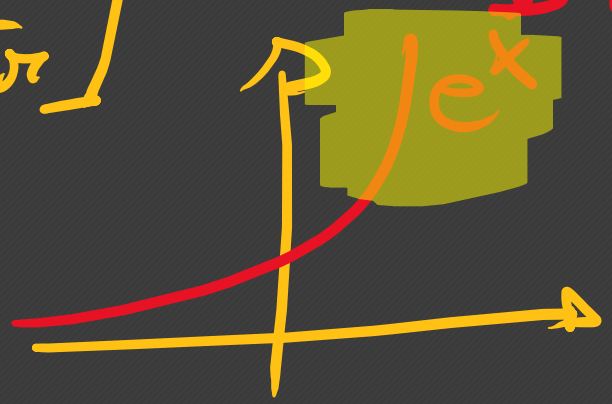
Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad (1) \qquad D: \; e^x+1 \neq 0 \Rightarrow D = (-\infty, +\infty)$$

$$f(n) = \frac{e^n}{e^n+1} \quad \begin{matrix} \hookrightarrow \text{infinito} \\ \hookrightarrow \text{infinito} \end{matrix} \quad = \frac{e^n}{e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^n}} \quad \begin{matrix} \to \text{infinitesimo} \\ \hookrightarrow \text{infinito} \end{matrix}$$

$$\text{std}[f(n)] = \text{std}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{e^n}}\right] = 1 \Rightarrow$$

$y=1$ asintoto orizzontale destro



© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

② $p(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$p(-\pi) = \dfrac{e^{-\pi}}{e^{-\pi}+1}$ → infinitesimo

↳ infinitesimo

$\text{std}[p(-\pi)] = 0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale sinistro

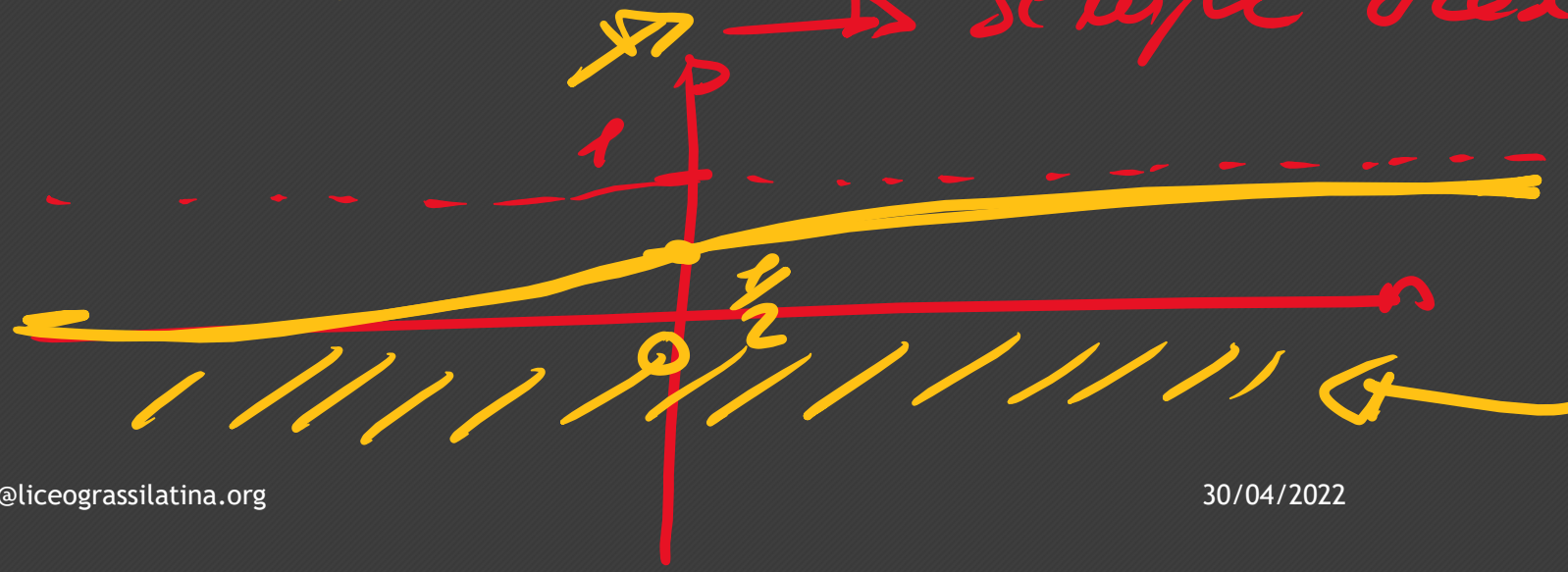
© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

③ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} \geq 0$ $\Longrightarrow$ $+$ la funzione è sempre positiva

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(\dots)^2} = e^x \dfrac{e^x+1-e^x}{(e^x+1)^2} =$

$= \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \geq 0 \Rightarrow$ $\Longrightarrow$ la funzione è sempre crescente

$f(0) = \dfrac{e^0}{e^0+1} = \dfrac{1}{2}$



© 2019 Gualtiero Grassucci – gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Asintoti (1)

- Prendiamo in esame l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Il nostro obiettivo è determinare la tangente all'iperbole all'infinito (si limitiamo al primo quadrante)
- Innanzitutto la semi-iperbole superiore è $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$
- Sia $x = M$ con $M > 0$ infinito allora:
  - $y(M) = b\sqrt{\frac{M^2}{a^2} - 1} = bM\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{M}}$ da cui $\text{std}\left(bM\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{M}}\right) = \frac{b}{a}M$
- Possiamo definire $P\left(M, \frac{b}{a}M\right)$ il punto dell'iperbole all'infinito, nel primo quadrante

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche applicazione
La derivata della funzione esponenziale
La derivata della funzione logaritmica
Comportamento agli estremi
Ricapitolando
Asintoti

Asintoti (2)

- La derivata del ramo di iperbole considerato è

$$y = b\frac{\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}} = \frac{bx}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}$$

- La derivata calcolata nel punto P è

$$y'(M) = \frac{bM}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{M^2}{a^2}-1}} = \frac{bM}{a^2}\cdot\frac{1}{M\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{M^2}}}$$

- E quindi $\mathbf{std}\ \boldsymbol{y(M)} = \frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{1/a} = \boldsymbol{\frac{b}{a}}$, questo è il coefficiente angolare della tangente all'iperbole nel punto P
- La retta tangente, allora è $y - \frac{b}{a}M = \frac{b}{a}(x-M)$ da cui

$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}$$

È proprio il coefficiente angolare di uno degli asintoti dell'iperbole

La tangente a infinito è quindi l'asintoto, proprio come ci aspettavamo!

Un nuovo numero
Una curiosa proprietà
Qualche
logaritmica
Comportamento agli estremi
Asintoti