Modelli matematici per le epidemie

gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org

Definizioni (1)

- N: popolazione
- $I(t)$: **infettivi**, numero dei contagiati all'istante (al giorno) t
  - $I_0 = I(0)$ numero iniziale di infettivi
- $S(t)$: **suscettibili**, numero degli individui non ancora contagiati all'istante (al giorno) t
  - $S_0 = S(0) = N - I_0$ numero iniziale suscettibili
- $R(t)$: **rimossi**, numero degli individui che non possono più contrarre la malattia (perché guariti o deceduti) all'istante (al giorno) t
  - $R_0 = R(0) = 0$ non ci sono rimossi all'inizio del contagio
- N.B.: in ogni istante si ha $N = S(t) + I(t) + R(t)$

Facciamo l'ipotesi che la popolazione sia costante (magari perché la durata della malattia è molto inferiore alla vita media dei soggetti)

Definizioni (2)

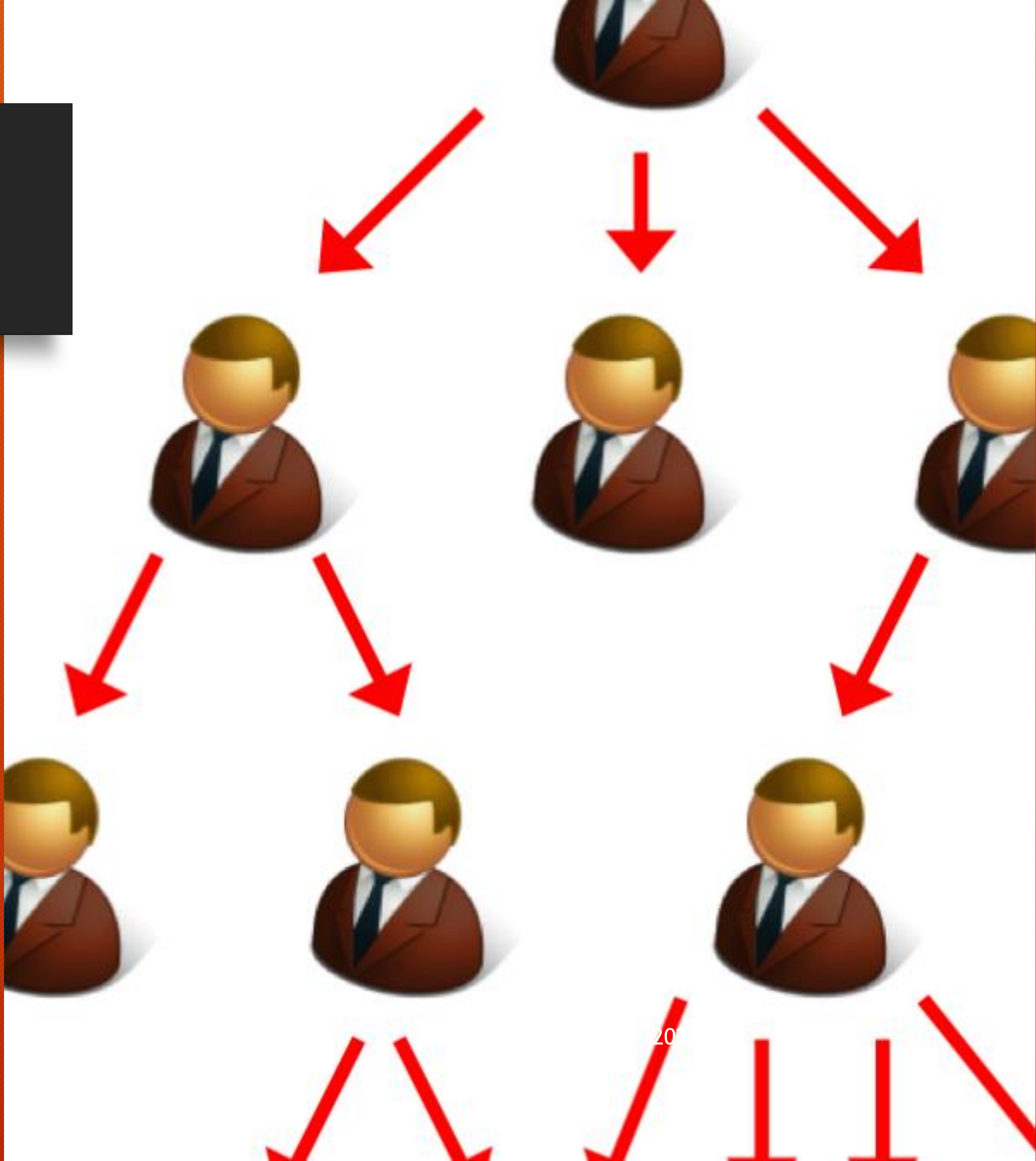
- λ *(lambda)*: tasso di contagio per ogni infetto nell’unità di tempo (giorno)
  - In altre parole, è la **probabilità di contagio di un suscettibile da parte di un infettivo al giorno**
- γ *(gamma)*: tasso di guarigione, tasso di rimossi nell’unità di tempo
  - In altre parole, la **probabilità che un infettivo sia rimosso** (perché guarito o deceduto)
  - **La durata della malattia è** quindi $1/\gamma$

Modello esponenziale (1)

- $I(t) = I(0) \cdot (1 + \lambda S_0)^t$
- Il contagio non si ferma più, tutta la popolazione contrae la malattia
- Ma gli infettivi tendono a diventare più della popolazione: *c'è qualcosa che non va!*

Nessuno guarisce o muore:
non ci sono rimossi!

- La legge è una *classica* crescita esponenziale!



Modello esponenziale (2)

- Il modello più semplice:
  - se all'istante $t_0 = 0$ c'è un numero I_0 di infettivi (persone che attualmente hanno la malattia e sono in grado di contagiare altri) e la probabilità di contagio è λ

allora il numero di persone contagiate nell'unità di tempo (un giorno) da ogni infettivo è $\boldsymbol{\lambda \cdot S_0}$

- Al giorno ***zero*** ci sono $\boldsymbol{I_0}$ malati
- Al primo giorno $(t = 1)$ $I_0 + \lambda \cdot S_0 \cdot I_0 = \boldsymbol{I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)}$ contagiati

Modello esponenziale (3)

- Se al primo giorno ci sono $I_0 + \lambda \cdot S_0 \cdot I_0 = \boldsymbol{I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)}$ contagiati
- Al secondo giorno $(t = 2)$ ci sono:

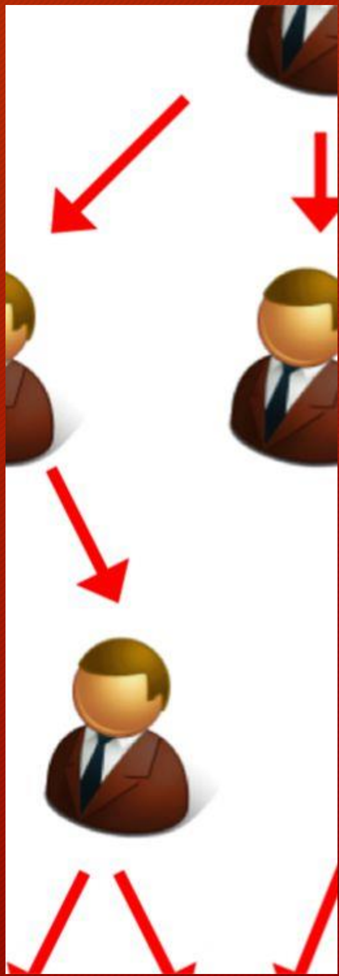
$$\boldsymbol{I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)} + \boldsymbol{I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0) \cdot \lambda \cdot S_0} =$$
$$= I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0) \cdot (1 + \lambda \cdot S_0) = I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)^2$$

  - dove $\boldsymbol{I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)}$: il numero di malati il giorno precedente
  - e $I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0) \cdot \lambda \cdot S_0$ *conta* quante persone sono state contagiate il secondo giorno (contagiate proprio da $I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)$ infettivi)
- Proseguendo in questo modo avremo che, in generale, al giorno t il numero di infettivi $I(t)$ sarà

$$\boldsymbol{I(t) = I_0 \cdot (1 + \lambda \cdot S_0)^t} \text{ per } \boldsymbol{t \in [0, +\infty)}.$$

Modello esponenziale (4)

- Il modello esponenziale si può determinare anche facendo ricorso alle equazioni differenziali
- La rapidità con cui il contagio si diffonde è la derivata rispetto al tempo del numero di infettivi $\frac{dI(t)}{dt} = I'(t)$
- Da quello che ci siamo detti sul modello esponenziale è chiaro che la velocità del contagio è proporzionale al numero di contagiati all'istante t: $I'(t) = rI(t)$ con $I(0) = I_0$
- Si tratta di un'equazione differenziale (un problema di Cauchy) a variabili separabili la cui soluzione particolare è $I(t) = I_0 e^{rt}$

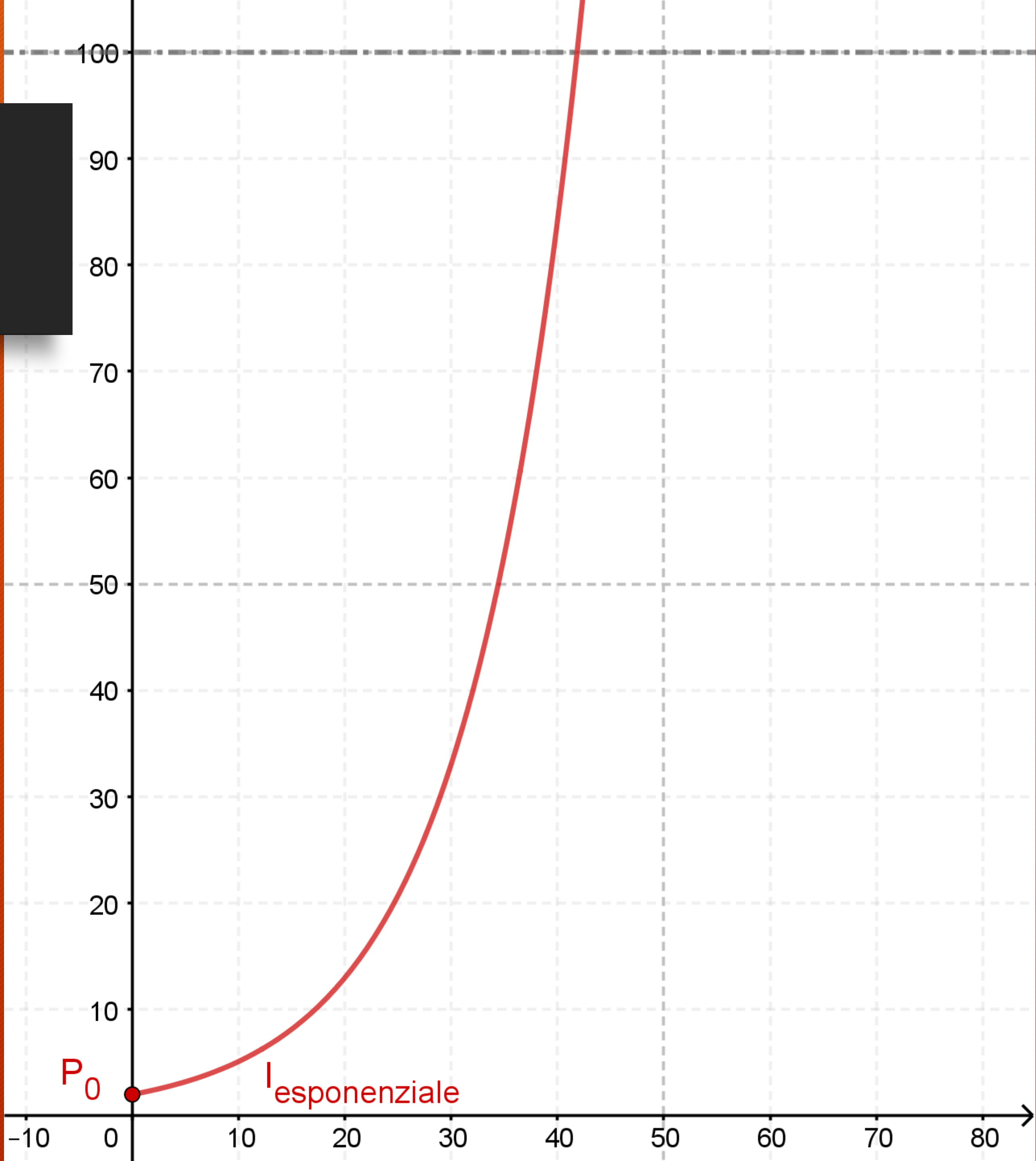


Modello esponenziale (4)

- Qui a destra la curva esponenziale
$$I(t) = I_0 \cdot (1 + \lambda S_0)^t$$
- Con $I_0 = 2$, $N = 100$, $\lambda = 0.001$
- Il problema del modello esponenziale, la sua scarsa aderenza con la realtà, si deduce immediatamente dal grafico:

Il numero di infettivi supera il numero di individui. Impossibile!

- Il motivo è semplice: nessuno guarisce, nessuno muore!



Legge di massa-azione (1)

- L'idea è di calcolare l'aumento degli infettivi in un tempo Δt:
$$I(t+\Delta t) - I(t)$$
- $p = \lambda \cdot \Delta t$ è la probabilità che **un determinato** infettivo contagi un suscettibile nel tempo Δt
- $p' = 1 - (1-p)^I$ è la probabilità che **almeno un** infettivo contagi un suscettibile ma si ha $p' \approx Ip = I \cdot \lambda \Delta t$
- $p'' = p' \cdot S = I\lambda \cdot \Delta t \cdot S$ è la probabilità che **almeno un** infettivo contagi **almeno un** suscettibile, allora $I(t+\Delta t) - I(t) = I \cdot \lambda\ \Delta t \cdot S$

e quindi

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I\lambda\ \cdot \Delta t \cdot S}{\Delta t} = I\lambda S$$

Legge di massa-azione (1): iperreali

- L'idea è di calcolare l'aumento degli infettivi in un tempo Δt:
$$I(t+\Delta t)-I(t)$$
- $p=\lambda\cdot\Delta t$ è la probabilità che **un determinato** infettivo contagi un suscettibile nel tempo Δt
- $p'=1-(1-p)^I$ è la probabilità che **almeno un** infettivo contagi un suscettibile ma si ha $p'\approx Ip=I\cdot\lambda\Delta t$
- $p''=p'\cdot S=I\lambda\cdot\Delta t\cdot S$ è la probabilità che **almeno un** infettivo contagi **almeno un** suscettibile, allora $I(t+\Delta t)-I(t)=I\cdot\lambda\;\Delta t\cdot S$

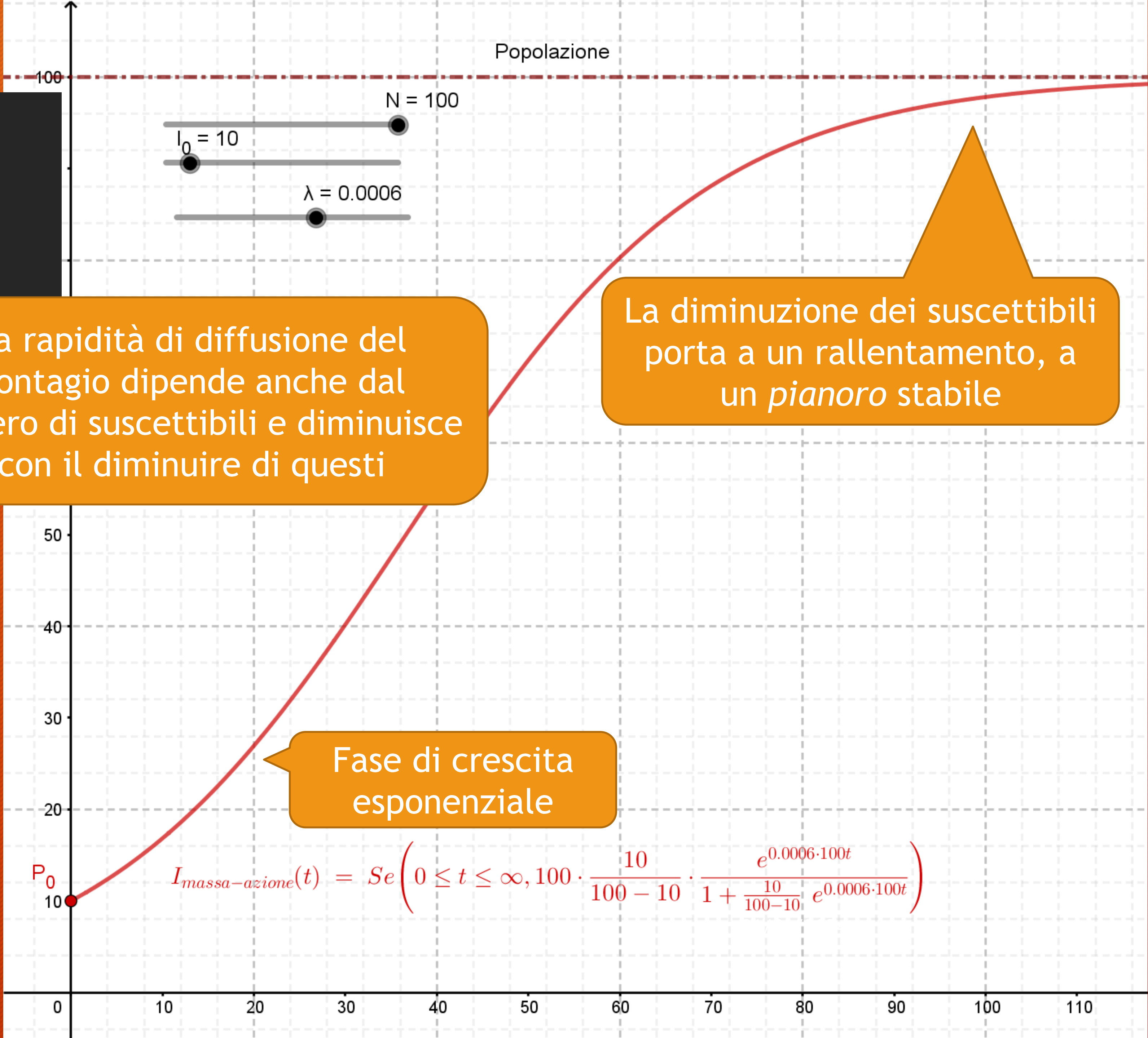
e quindi, se Δt è un infinitesimo
$$I'(t)=\operatorname{std}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=\operatorname{std}\frac{I\lambda\;\cdot\Delta t\cdot S}{\Delta t}=I\lambda S$$

Legge di massa-azione (2)

- L'equazione che è alla base di questo modello è $I'(t) = I\lambda S$
- La cui soluzione è

$$I(t) = \frac{kN \cdot e^{\lambda N t}}{1+ke^{\lambda N t}} \text{ con } k = \frac{I_0}{N-I_0}$$

- Il numero degli infettivi si assesta su N: il contagio colpisce via via tutta la popolazione
- È un modello migliore rispetto al precedente: **il numero degli infettivi non supera la popolazione**
- Ma è irrealistico che la malattia colpisca l'intera popolazione



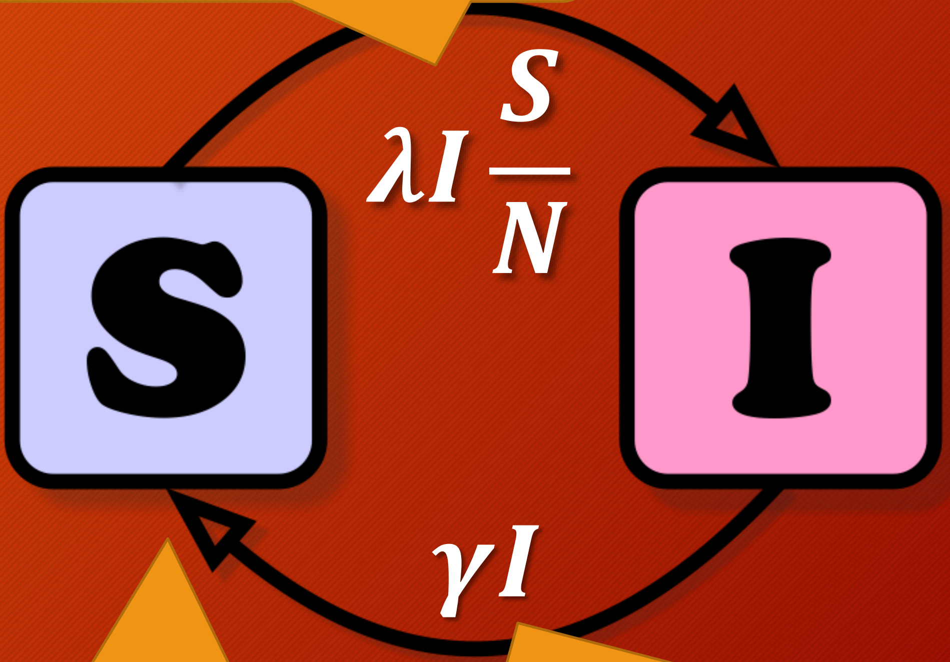
Modello SIS (1)

- Si tiene conto della possibilità che un infettivo guarisca
- Ma non c'è immunità: un infettivo può ammalarsi ancora

$$I'(t) = \lambda I \frac{S}{N} - \gamma I = \lambda I \left(1 - \frac{I}{N}\right) - \gamma I$$

- Il numero di infettivi:
  - aumenta di $\lambda I \frac{S}{N}$ (i suscettibili che si ammalano nell'unità di tempo)
  - diminuisce di γI (gli infettivi che guariscono)

Numero di suscettibili contagiati nell'uintà di tempo



Notare che i guariti possono essere di nuovo contagiati!

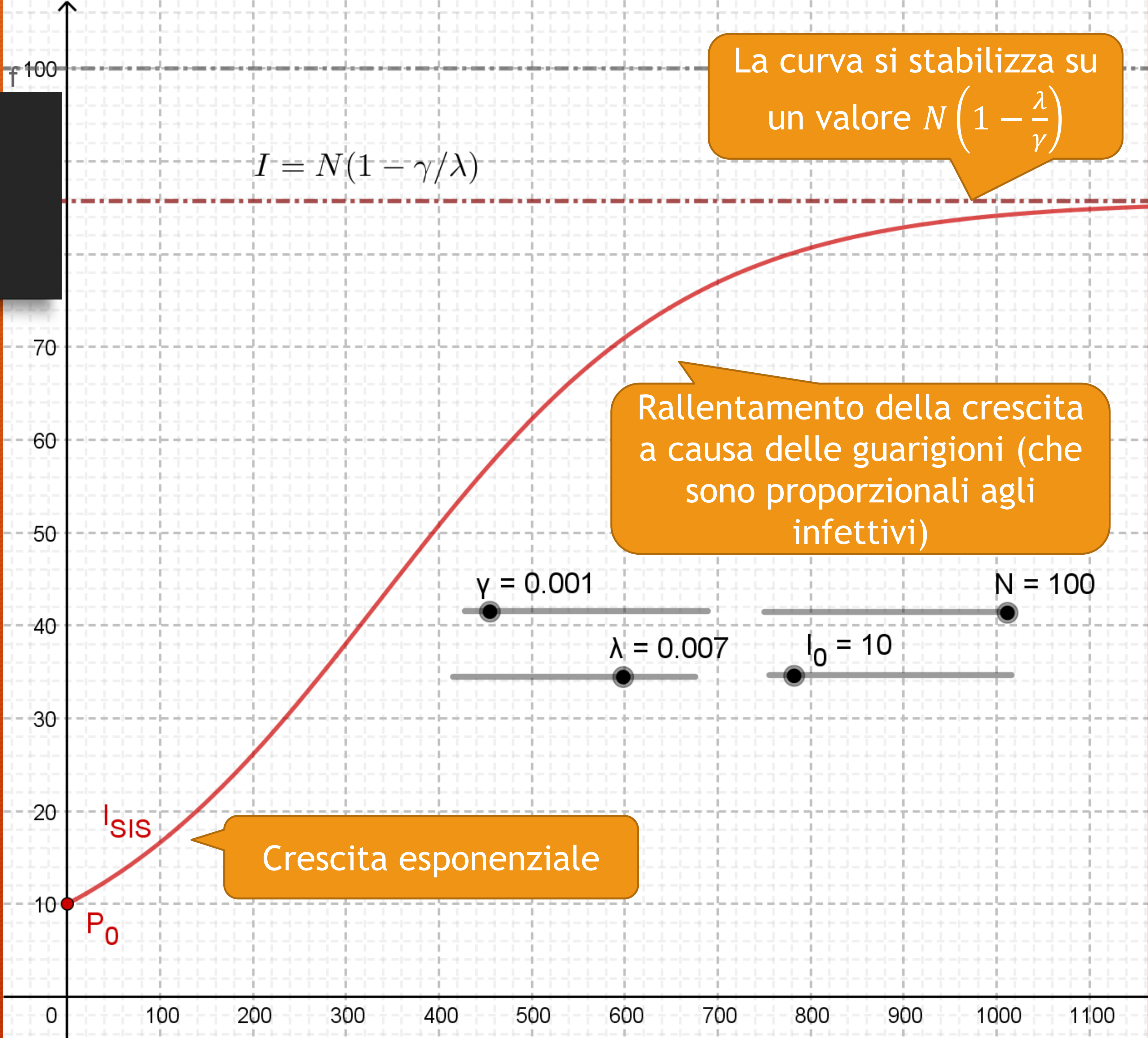
Numero di infettivi che guariscono nell'uintà di tempo

Modello SIS (2)

- L'equazione differenziale è:

$$I'(t) = \lambda I \frac{S}{N} - \gamma I = \lambda I \left(1 - \frac{I}{N}\right) - \gamma I$$

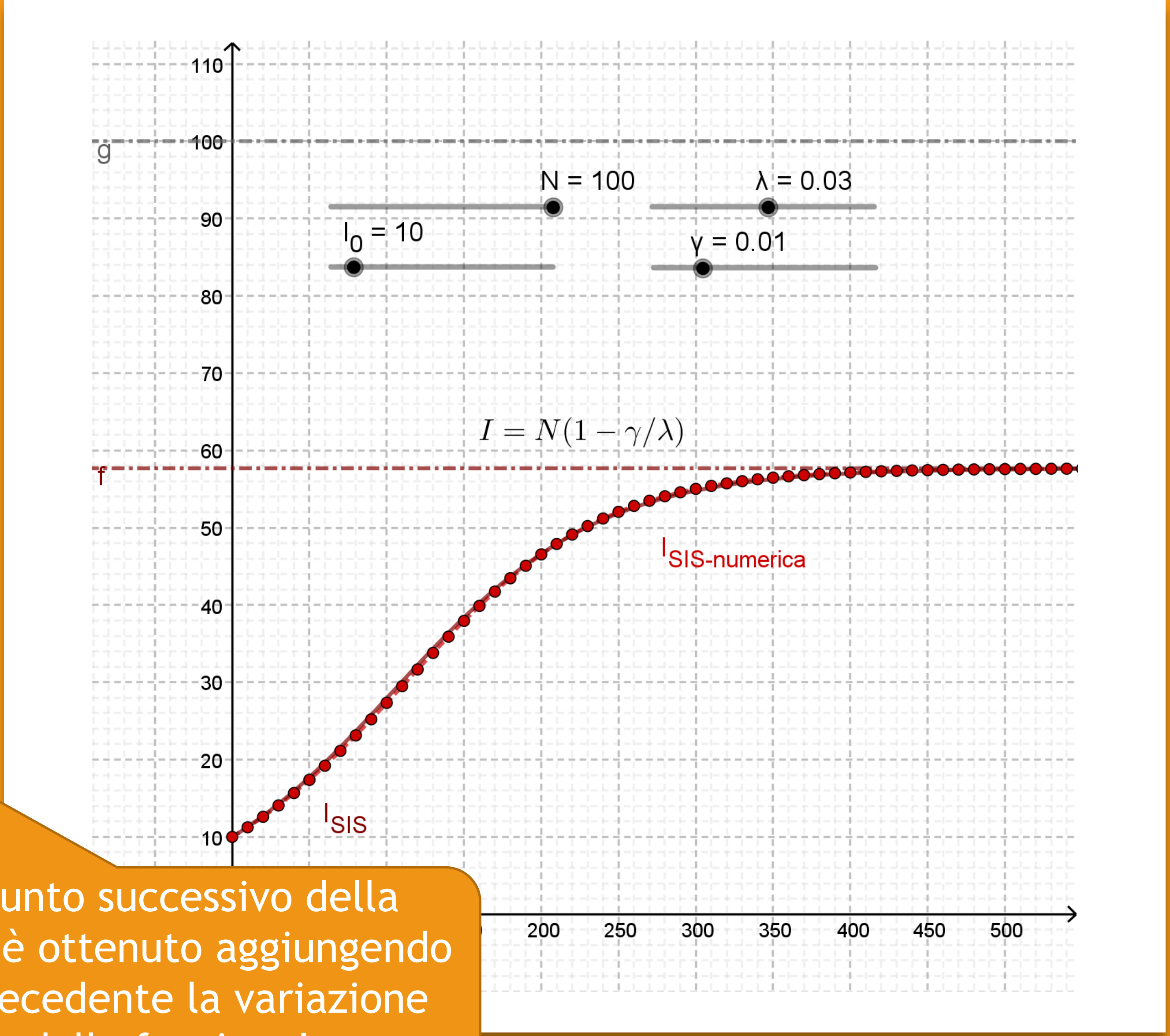
- La soluzione è $\boldsymbol{I(t) = \frac{kN(\lambda-\gamma)e^{(\lambda-\gamma)t}}{1+k\lambda e^{(\lambda-\gamma)t}}}$
- con $k = \frac{I_0}{N(\lambda-\gamma)-\lambda I_0}$
- L'andamento dipende dal valore di $(\lambda - \gamma)$:
    - se $\lambda > \gamma$ la malattia tende a stabilizzarsi su $N\left(1 - \frac{\gamma}{\lambda}\right) < N$
    - se $\lambda < \gamma$ la malattia *scompare*



Modello SIS (3)
Integrazione numerica

- $I(t+\Delta t) = I'(t) \cdot \Delta t$ quindi
- $I(t+\Delta t) = \left[\lambda I(t)\left(1-\frac{I(t)}{N}\right) - \gamma I(t)\right] \cdot \Delta t$
- Questo consente di usare un *trucco* per *costruire* la soluzione per punti
- I_0
- $I_1 = I(0+\Delta t) = \left[\lambda I_0\left(1-\frac{I_0}{N}\right) - \gamma I_0\right] \cdot \Delta t$
- $I_2 = I(0+2\Delta t) = \left[\lambda I_1\left(1-\frac{I_1}{N}\right) - \gamma I_1\right] \cdot \Delta t$
- $I_3 = \cdots$

In figura la soluzione $I_{SIS-numerica}$ costruita per punti sovrapposta alla soluzione analitica I_{SIS}



Il punto successivo della curva è ottenuto aggiungendo al precedente la variazione della funzione!

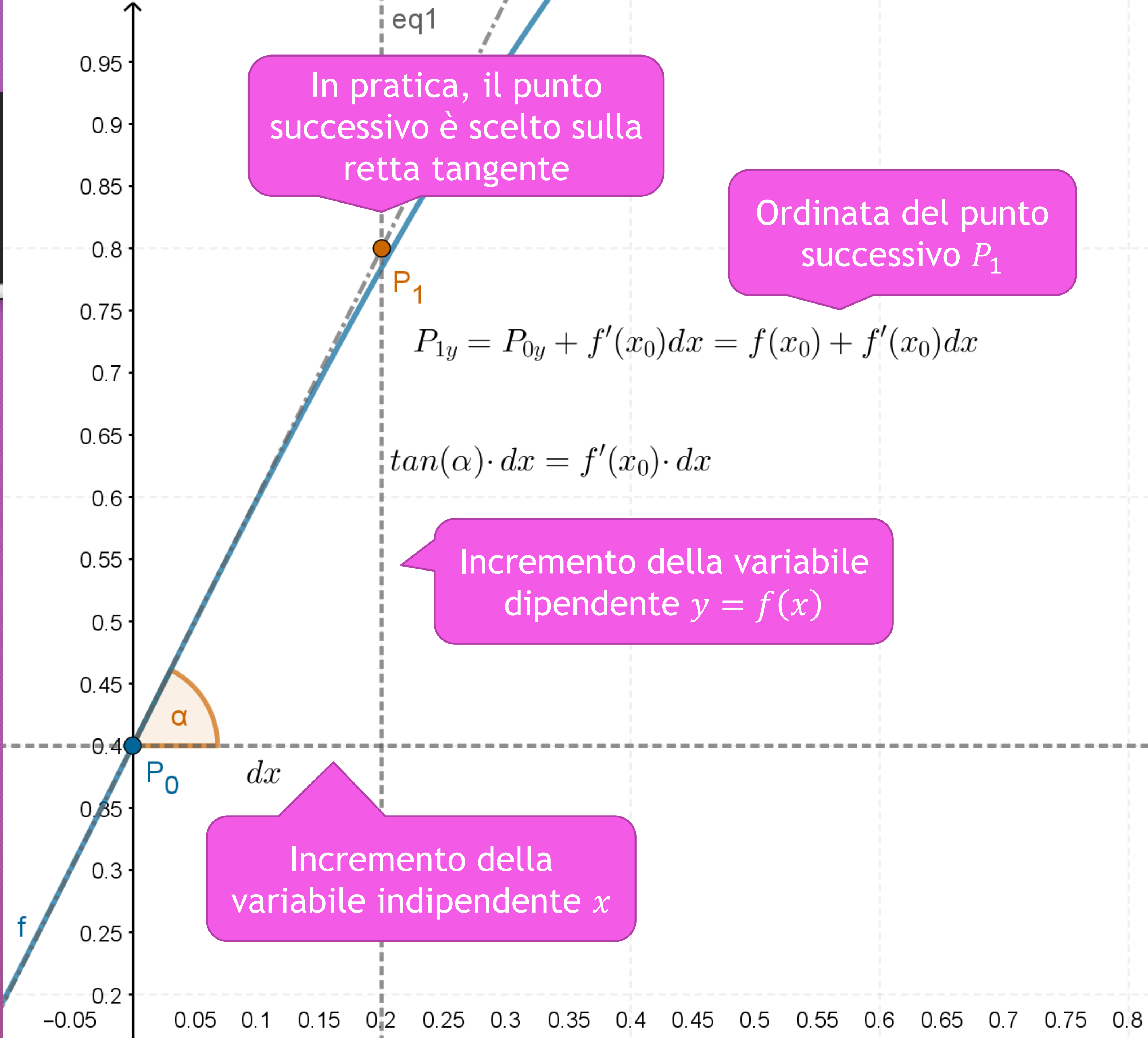
Integrazione numerica (1)

- Supponiamo di conoscere
  - la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$
  - le coordinate $(x_0, f(x_0))$ di un punto P_0 della funzione
- Si può approssimare l'ordinata di un altro punto P_1 della funzione con

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)dx$$

dove $x_1 = x_0 + dx$

- Infatti $f'(x_0) = \tan\alpha$
- Per il II teorema sui triangoli rettangoli l'incremento, cateto *verticale*, è pari all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto (al primo cateto)
- Ma la tangente dell'angolo è uguale al coefficiente angolare della retta tangente e quindi alla derivata in x_0



Integrazione numerica (2)

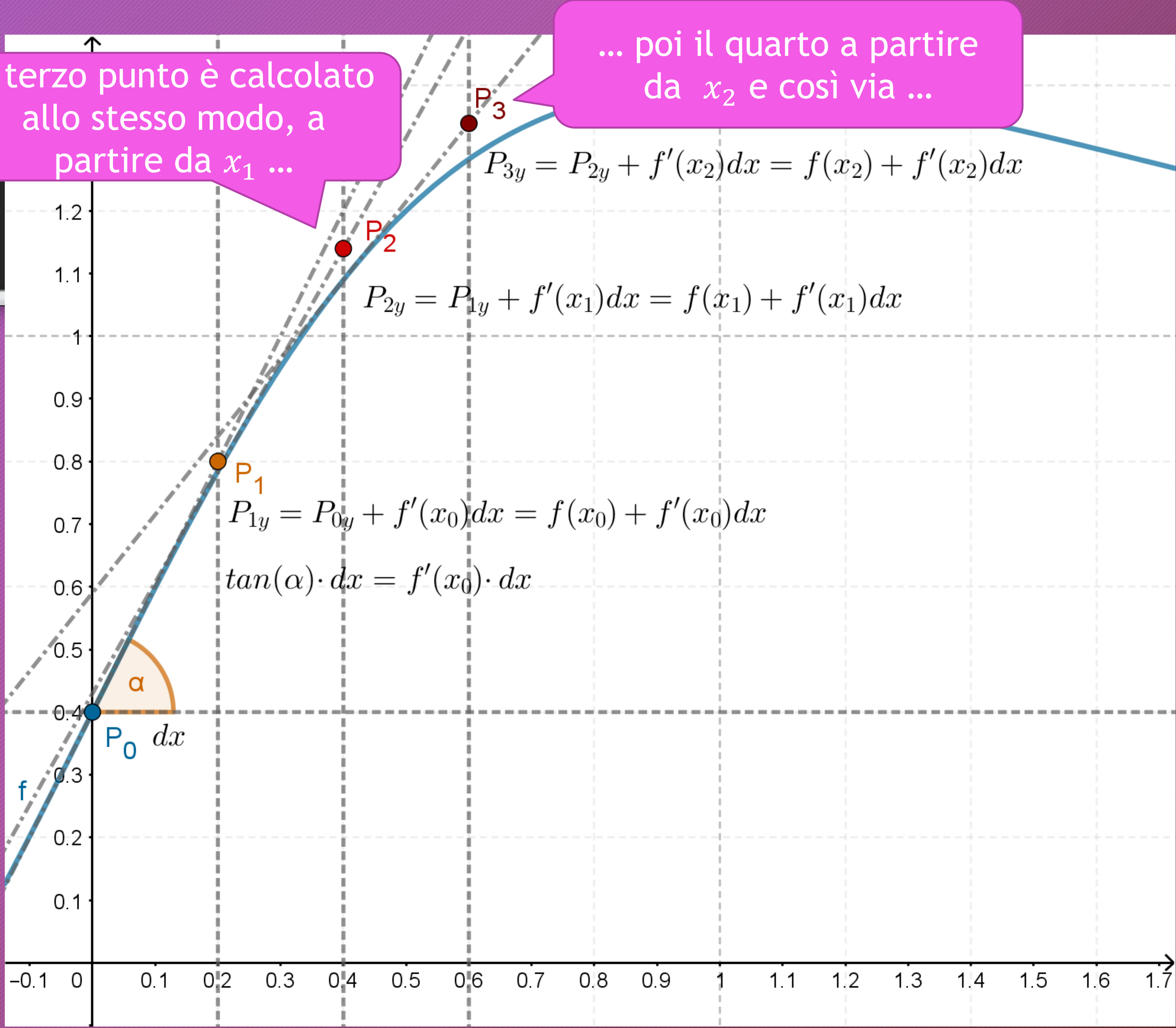
- Il procedimento s ipuò iterare più volte
- Si può approssimare l'ordinata di un altro punto P_2 della funzione con

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)dx$$

dove $x_2 = x_1 + dx$

e $f(x_1)$ è il valore calcolato in precedenza

- Il procedimento è tanto più preciso quanto più dx è piccolo!
- Successivamente, con un numero sufficiente di punti si può cercare una funzione approssimante opportuna!



Modello SIR (1)

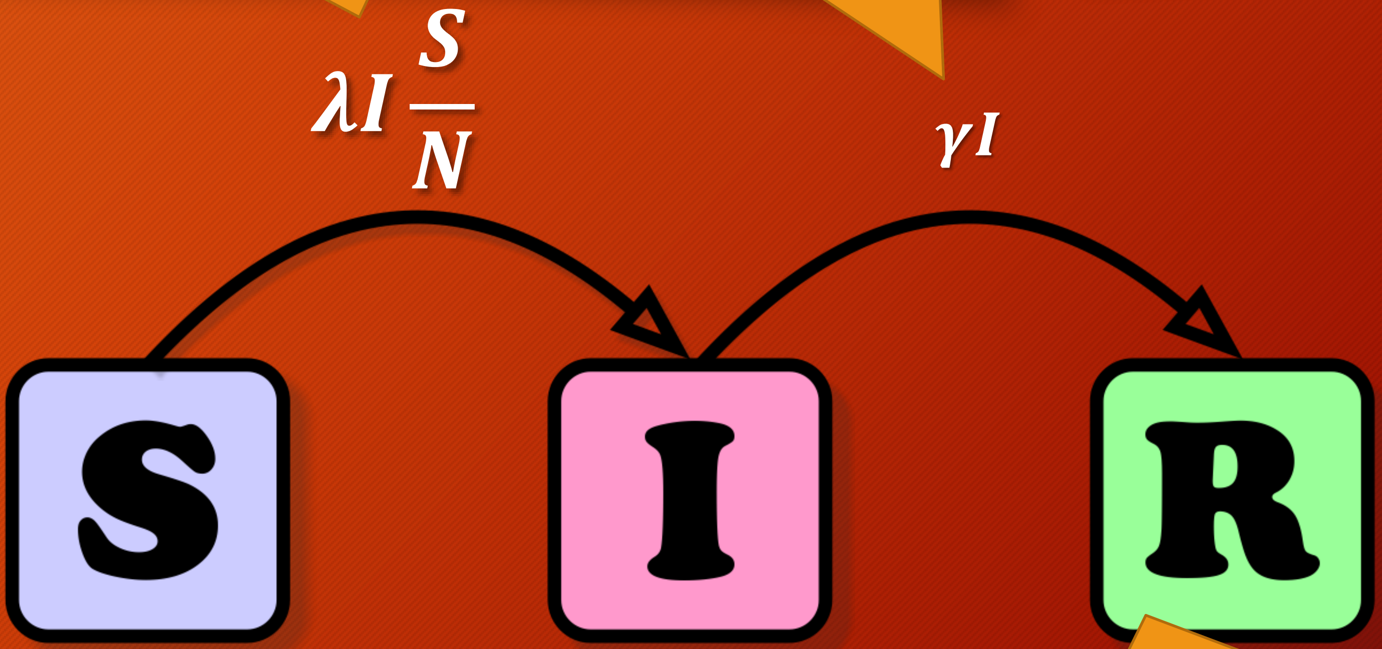
- Si tiene conto della possibilità che un infettivo guarisca
- C'è immunità: un infettivo non può ammalarsi ancora

$$\begin{cases} S' = -\lambda I \dfrac{S}{N} \\ I' = \lambda I \dfrac{S}{N} - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases}$$

- Il numero di infettivi aumenta a causa dei nuovi contagi: $+\lambda I \frac{S}{N}$
- Ma diminuisce a causa delle rimozioni: $-\gamma I$
  - Attenzione: le rimozioni comprendono guargioni e decessi!

Numero di suscettibili contagiati nell'uintà di tempo

Numero di infettivi rimossi (guariti o deceduti) nell'uintà di tempo

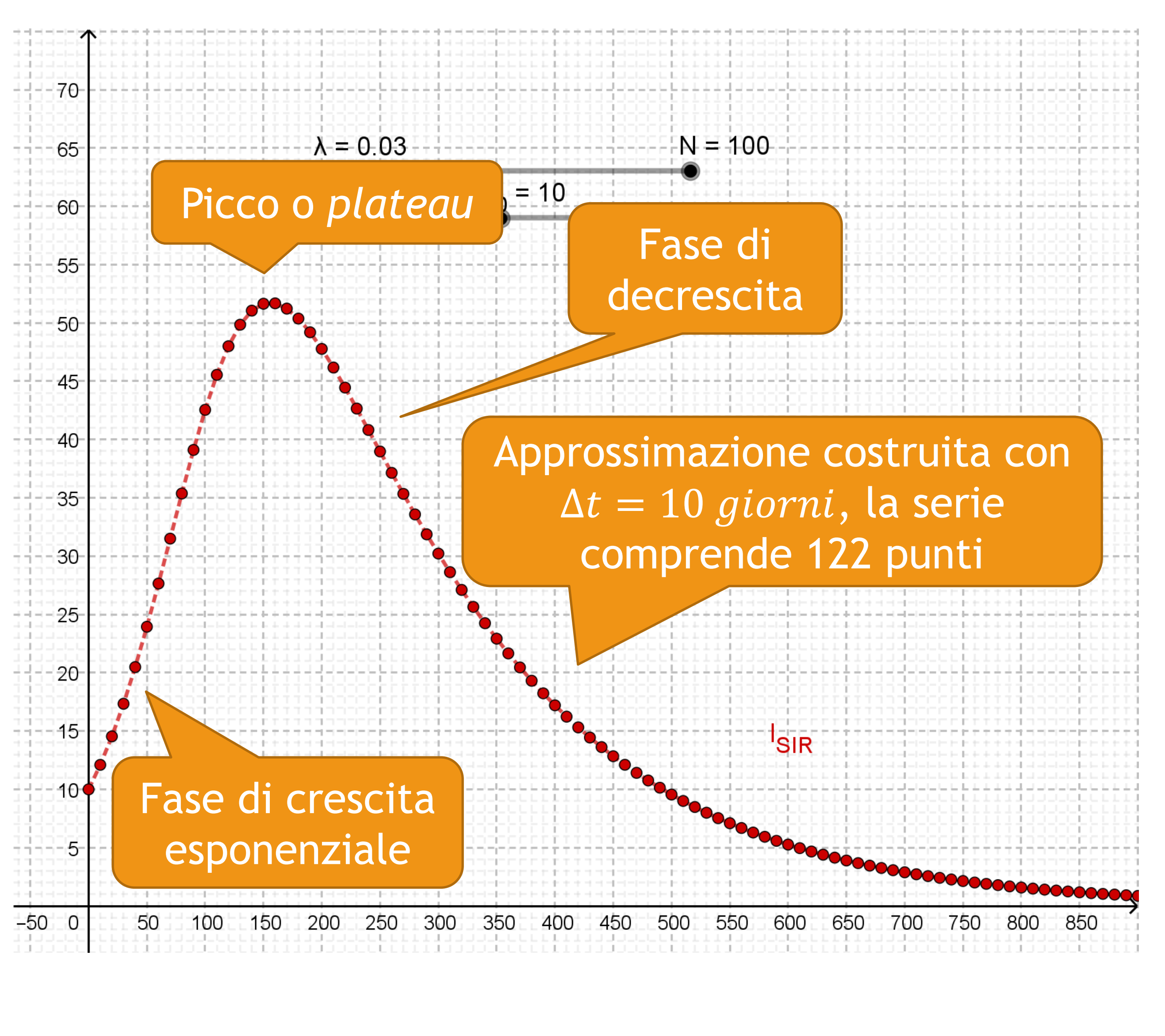


Il modello è dovuto al lavoro di Kermack e McKendrick per cui è anche chiamato *modello di Kermack e McKendrick*

Notare che i rimossi non possono essere nuovamente contagiati

Modello SIR (2)

- L'equazione (il sistema) è molto complessa da integrare
- Si può scegliere di costruire la soluzione *per punti*
- $S(t+\Delta t) = S(t) - \left[\lambda I(t) \frac{S(t)}{N}\right] \Delta t$
- $I(t+\Delta t) = I(t) + \left[\lambda I(t) \frac{S(t)}{N} - \gamma I(t)\right] \Delta t$
- A partire da I_0 e $S_0 = N - I_0$:
  - si calcolano S_1 e I_1 …
  - … poi si calcolano S_2 e I_2
- Quando si hanno punti sufficienti a comprendere l'andamento si approssima con una funzione adatta



Modello SIR (3)

- È chiaro che la malattia recede se:

$$\boldsymbol{\lambda I \frac{S}{N} - \gamma I < 0}$$

  - quindi quando $\lambda \frac{S}{N} - \gamma < 0$ $(I > 0\ \forall t)$ o, in altre parole $\frac{\lambda}{\gamma} \cdot \frac{S}{N} < 1$
- Sia $R_0 = \frac{\lambda}{\gamma}$ il numero di contagi per infettivo per l'intera durata della malattia (ricordiamo che $\frac{1}{\gamma}$ è la durata della malattia) …
- … e $\boldsymbol{R = R_0 \frac{S}{N} = \frac{\lambda}{\gamma} \cdot \frac{S}{N}}$, allora:
  - se $R > 1$ il contagio si propaga
  - **se $R < 1$ la malattia recede**

Modello SIR (4)

- In realtà il sistema presentato nella slide 16 si può semplificare:
- Innanzitutto l'ultima equazione $\boldsymbol{R' = \gamma I}$ è inutile, il numero dei rimossi si può ricavare per sottrazione conoscendo suscettibili e infettivi
- In secondo luogo, dividendo tutti i termini delle prime due equazioni per N e ponendo $x = S/N$ (e quindi $x' = S'/N$) $y = I/N$ (e quindi $y' = I'/N$) si ha

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -\lambda x y} \\ \boldsymbol{y' = \lambda x y - \gamma y} \end{cases}$$

… che poi è quello che abbiamo fatto nei grafici della *slide* 17: **lavorare sulle percentuali di infettivi $\boldsymbol{I/N}$ e suscettibili $\boldsymbol{S/N}$**

Bibliografia minima

- La matematica delle epidemie: istruzioni per l’uso
  http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/epidemie-matematica/
- Epidemia all'isola degli eremiti
  https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Dic_05/MateEpidemie.htm
- Riley, S., Eames, K., Ishamc, V., Mollisond, D., Trapmane, P. – *Five challenges for spatial epidemic models*
  https://www.journals.elsevier.com/epidemics
- Mascia, C. e Montefusco, E. – *Modelli deterministici in epidemiologia* - Dipartimento di Matematica *G. Castelnuovo*, Sapienza Universita di Roma